

Reglerteknikens grunder

Övningstal

Bengt Lennartson

Förord

Detta häfte med övningsuppgifter till läroboken Reglerteknikens grunder får fritt kopieras och distribueras elektroniskt. Sidorna är genererade för att kopieras dubbelsidigt. Övningsuppgifterna, som ingått i tidigare upplagor av läroboken, distribueras nu separat för att minska bokens totala omfång.

Olika typer av uppgifter ingår, vilket indikeras med följande förkortningar till höger om numret på respektive övningsuppgift

IR=Inledande räkneuppgift

R=Räkneuppgift

D=Datoruppgift

I=Instuderingsuppgift

Jag vill i sammanhanget tacka de personer som bidragit med uppgifter till denna övningssamling, bl a (i bokstavsordning) Claes Breitholtz, Bo Egardt, Hugo Flordal, Claes Lindeborg, Stefan Pettersson, Bengt Schmidtbauer, Michael Tittus, Bertil Thomas och Knut Åkesson, alla med anknytning till Chalmers.

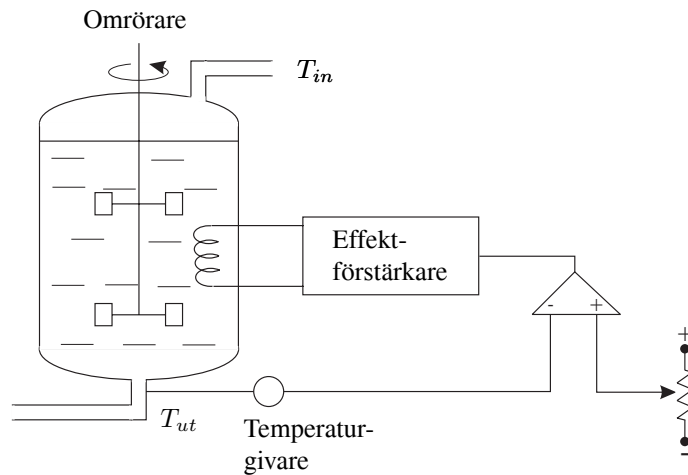
Synpunkter på övningsuppgifterna och tips på ytterligare relevanta uppgifter mottages med tacksamhet. Skicka i så fall ett mail till *bengt.lennartson@chalmers.se*

Göteborg 2006-06-01

Bengt Lennartson

1 Introduktion

1.1 (P) Temperaturreglering



En behållare med ett konstant genomflöde av vatten skall regleras så att temperaturen på det utgående vattnet T_{ut} hålls konstant. Temperaturen på det ingående vattnet är T_{in} . Rita ett principiellt blockschema som visar hur vattentermostaten är uppbyggd. Notera speciellt vilken storhet som kan betraktas som störning i systemet?

1.2 (P) En *intelligent farthållare* för bilar har bl.a. till uppgift att reglera hastigheten, så att ett säkert avstånd hålls till framförvarande fordon. Antag att det framförvarande fordonet kör i en rimlig hastighet v_f , och att farthållaren därför väljer att följa detta fordon med målsättningen att hålla ett konstant avstånd.

Avståndet y till framförvarande bil mäts med radar, och farthållaren kommanderar som styrsignal önskad acceleration. Verklig acceleration skiljer sig från begärd acceleration på grund av trögheten i bränslesystem/motor/bil. Denna tröghet representeras i denna uppgift av en systemmodell

$$a = G_v u$$

där den begärda accelerationen u är insignal och den verkliga accelerationen a är utsignal. Det önskade idealavståndet beräknas som Tv , där v är följebilens hastighet och konstanten T är *tidsluckan*. Antag också att en proportionell P-regulator med förstärkning K_p används i återkopplingen.

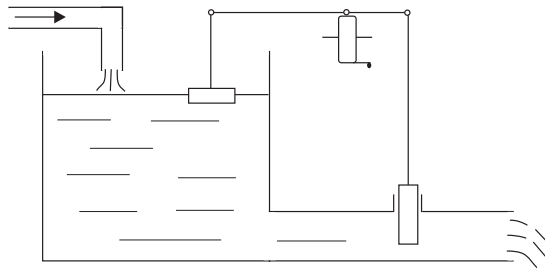
Rita ett principiellt blockschema som visar hur den beskrivna farthållaren är uppbyggd. Notera de ingående signalerna i systemet, och ange speciellt referenssignal, störning och reglerfel. På vilket sätt skiljer sig referenssignalen från en standardmässig reglerkonfiguration?

1.3 (P) Ett hus värms med hjälp av elektriska element. Både temperaturen inne i huset och temperaturen utanför huset mäts med givare som är kopplade till en styrfunktion (termostat) som i sin tur bestämmer önskad effekt på elementen. Rita ett blockschema som visar hur detta styrsystem fungerar.

1.4 (P) En vindsurfare färdas typiskt med en konstant kursriktning som bestäms av vinden, seglets vinkel i förhållande till brädan, samt mastens och kroppens lutning. Målsättningen är att färdas så snabbt som möjligt, varför höga vindstyrkor är populärt. Man måste dock kompensera för eventuella vindbyar. Rita ett blockschema som visar hur vindsurfaren agerar i ett återkopplat system med stör- och styrsignaler. Varför är det rimligt att betrakta detta som ett återkopplat styrproblem, i stället för ett öppet styrproblem?

Den erfarna vindsurfaren kan genom att upptäcka krusningar på vattenytan redan i förväg inse att en vindby är på gång. Vilken funktion motsvarar detta i reglersammanhang?

1.5 (P)



Fungerar ovanstående nivåreglersystem? Om inte, vad är det fundamentala felet i systemet? Föreslå ett förbättrat reglersystem. Rita enkel figur.

1.6 (I) I detta inledande kapitel berördes några styr- och reglerproblem från hemmiljön. Fundera på andra styr- och reglerproblem som du möter i din vardag. Är det fråga om öppen styrning eller återkopplad reglering? Vad är den primära uppgiften, att kompensera störningar (i så fall vilka), eller handlar det i första hand om att följa en önskad referenssignal? Identifiera målfunktion, samt aktuella signaler såsom referenssignal, utsignal, styrsignal och störsignaler.

1.7 (I) Rita ett blockschema för reglering av ångflödet i en ångmaskin med hjälp av centrifugalregulatorn, som beskrivs på sidan 29 och i fig. 1.22.

- 1.8 (I)** Ange minst tre fördelar och en nackdel med återkoppling jämfört med öppen styrning (referenssignalframkoppling).
- 1.9 (I)** Man vill oftast åstadkomma så snabb och effektiv reglering som möjligt, men får dock betala ett pris (there is no free lunch). Vari ligger kostnaden?

2 Linjära modeller för dynamiska system

2.1 (IR) Sambandet mellan insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$ för några system ges av följande differentialekvationer

a) $2\dot{y}(t) + 4y(t) = 8u(t)$

b) $\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 3u(t)$

c) $\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t) + 3u(t)$

d) $2\dot{y}(t) + 4y(t) + 4\dot{u}(t) - 8u(t) = 0$

Bestäm för dessa system överföringsfunktionen $G(s)$ i insignal/utsignalrelationen $Y(s) = G(s)U(s)$ samt poler och nollställen, tidskonstanter, och statisk förstärkning.

Beräkna utsignalen $y(t)$ då insignalen $u(t)$ är ett steg $u_0\sigma(t)$ (stegsvar), samt kommentera relationen mellan den statiska förstärkningen och $y(\infty)$.

2.2 (IR) Givet nedanstående överföringsfunktioner $G(s)$, bestäm utsignalen $y(t)$ då insignalen $u(t)$ är en impuls $\delta(t)$. Notera speciellt beteendet då $t \rightarrow \infty$.

a) $G(s) = \frac{4}{s(2s+6)}$ b) $G(s) = \frac{3}{(s^2+4)}$

2.3 (IR) Ett system beskrivs av en första ordningens överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{s+5}$$

Föreslå någon applikationsprocess som principiellt beskrivs av en sådan överföringsfunktion. Det givna systemet påverkas av en konstant insignal $u(t) = 10$ för $t < 0$. Vid tiden $t = 0$ ändras insignalen till $u(t) = 12$. Bestäm systemets utsignal $y(t)$. På vilket sätt förändras utsignalen då insignalen ändras vid en godtycklig tidpunkt $t = \tau$?

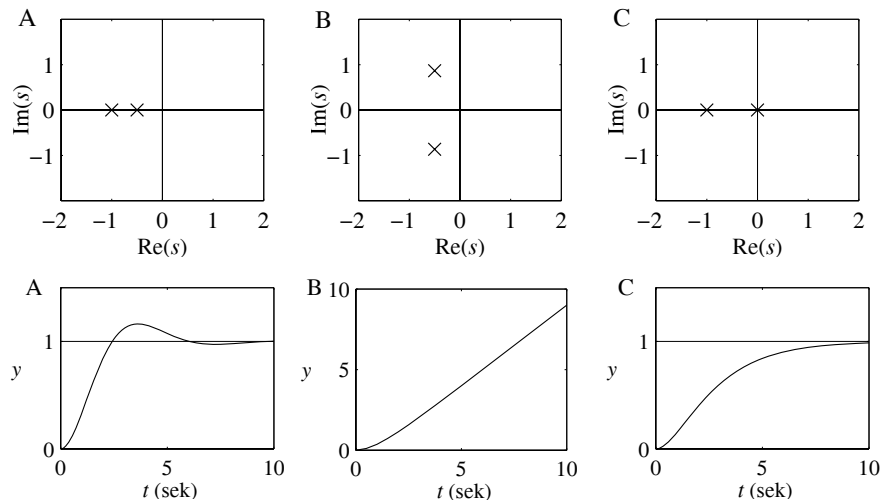
2.4 (IR) För fjäder-massasystemet i exempel 2.1 på sid.36 gäller följande differentialekvation

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = F_d(t)$$

a) Bestäm för motsvarande överföringsfunktion den odämpade svängningsfrekvensen ω_n och dämpningskonstanten ζ , samt den statiska förstärkningen K . På vilket sätt påverkas dessa parametrar av massan m , dämpningen b och fjäderkonstanten k ?

b) Bestäm den dämpade resonansfrekvensen ω_d och den exponentiella avklingningsparametern a (e^{-at}) (2.18) på sid. 49. På vilket sätt relateras dessa parametrar till systemets polplacering. Skissera motsvarande stegsvar för $m = b = k = 1$.

2.5 (IR) I denna uppgift visas polernas läge för tre olika andra ordningens system, samt motsvarande stegsvar. Tyvärr har dessa blandats ihop. Bestäm vilka pol-diagram och vilka stegsvar som hör ihop. Motivera!



2.6 (R) Ett system antas approximativt kunna beskrivas med hjälp av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{1 + Ts}$$

Visa hur tidskonstanten T kan skattas genom att bestämma ytan under impulssvaret då $T > 0$.

2.7 (R) Bestäm impulssvar och stegsvar för en första ordningens modell

$$G_1(s) = K/(1 + Ts)$$

samt för en andra ordningens modell

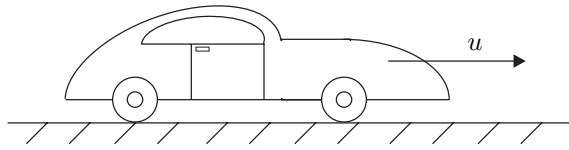
$$G_2(s) = \frac{2}{(1 + s)(1 + \tau s)}$$

för $\tau = 0.01, 100$. Jämför tidssvaren för dessa båda modeller av olika ordning, samt bestäm K och T för de aktuella värdena på τ , så att $G_1(s)$ approximativt ger samma tidssvar som $G_2(s)$.

Formulera utifrån de erhållna resultaten en allmän princip vid framtagning av approximativa lägre ordnings modeller.

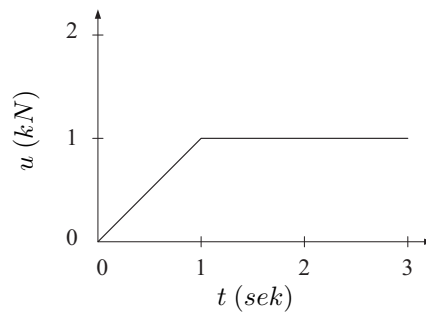
2.8 (R) Antag att viktfunktionen $g(t)$ för ett dynamiskt system är given. Bestäm motsvarande viktfunktion (impulssvar) och stegsvar då ett extra nollställe i $s = -b$ inkluderas. Ange även explicita uttryck då $g(t) = t e^{-t}$.

2.9 (R)

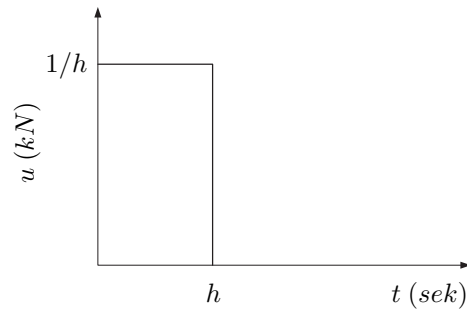


För en personbil antas gälla att vindmotståndet är proportionellt mot hastigheten $v(t)$ med konstanten $b = 0.25$ kN s/m. Bilens massa $m = 1$ ton. För motorns dragkraft $u(t)$ gäller att $u(t) = 0$ då $t < 0$.

- Beräkna överföringsfunktionen $G(s) = V(s)/U(s)$.
- Beräkna bilens hastighet $v(t)$ då dragkraften $u(t)$ varierar enligt följande:



- Beräkna $v(t)$ då $u(t)$ ges av nedanstående tidsfunktion. Vad händer då $h \rightarrow 0$? Jämför resultatet med viktfunktionen $g(t) = \text{impulsfunktionssvaret}$.



- På vilket sätt förändras ovanstående resultat då man utgår från att hastigheten $v(t) = 20$ m/s (72 km/tim) för $t < 0$, men att styrsignalen $u(t)$ förändras lika mycket som ovan för $t \geq 0$.

2.10 (R) Ett system beskrivs av differential-integralekvationen

$$\dot{v}(t) + bv(t) + \int_0^t v(\tau) d\tau = u(t)$$

Denna modell representerar ett fjäder-massasystem då v tolkas som hastighet (positionen $y(t) = \int_0^t v d\tau$) och massan samt fjäderkonstanten är lika med ett, jmf (2.2) på sid. 37. I detta exempel antas parametern b kunna anta godtyckliga värden. (Vilka värden är aktuella för ett fjäder-massasystem?)

- Bestäm $v(t)$ då insignalen $u(t)$ är ett steg $\sigma(t)$.
- Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ samt systemets poler och nollställe. Tolka nollställets betydelse. För vilka värden på parametern b är systemet stabilt?
- Använd slutvärdessatsen för bestämning av $y(\infty)$ och jämför med resultatet i uppgift a). För vilka värden på parametern b är resultatet korrekt? Förklara!

2.11 (R) Betrakta differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) - y(t) = u(t) - b\dot{u}(t)$$

- Bestäm $y(t)$ då $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ och insignalen $u(t)$ är ett enhetssteg, för fallet $b = 1$.
- Upprepa a) med skillnaden att $y(0) = 1$.
- Upprepa a) för fallet $b \neq 1$.

Förklara den dramatiska skillnaden mellan resultaten.

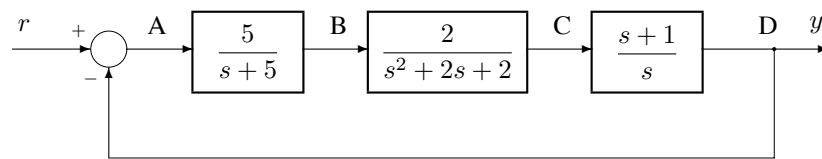
2.12 (R) Antag att insignalen $u(t)$ till systemet i övningsuppgift 2.6 är ett enhetssteg. Bestäm stigtiden som definieras som den tid det tar för utsignalen $y(t)$ att gå från 10% till 90% av dess slutvärde.

2.13 (R) En process kan approximativt beskrivas av följande kopplade differentialekvationer

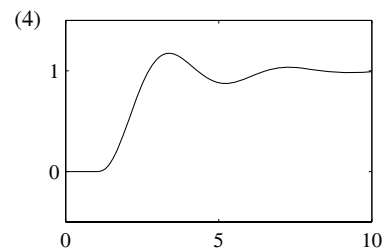
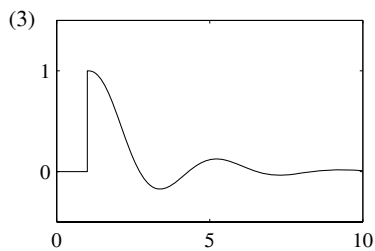
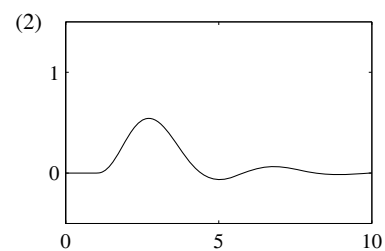
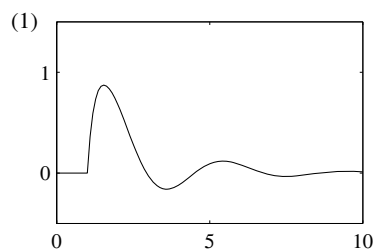
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -2y + x + u\end{aligned}$$

där $u(t)$ är systemets insignal och $y(t)$ dess utsignal. Är systemet stabilt? Bestäm processens svar på en enhetsramp, dvs bestäm $y(t)$ då $u(t) = t$ då $t \geq 0$.

2.14 (R)



Det återkopplade systemet enligt ovanstående figur påverkas av ett steg i referenssignalen $r(t)$. Fyra signaler registreras i punkterna A, B, C och D. Ange för var och en av kurvorna nedan från vilken punkt registreringen är hämtad.



2.15 (R) En termometer har tidskonstanten 20 sekunder. Man vill mäta temperaturen i ett bad som (p.g.a. intern effektgenerering) ökar med 0.10 K per sekund med denna termometer. Vilken stationär felvisning blir resultatet av mätningen?

2.16 (R) Para ihop vart och ett av enhetsstegsvaren på nästa sida med en av överföringsfunktionerna.

(1) $\frac{2(1 - 0.5s)}{(1 + 0.5s)(1 + 0.33s)}$

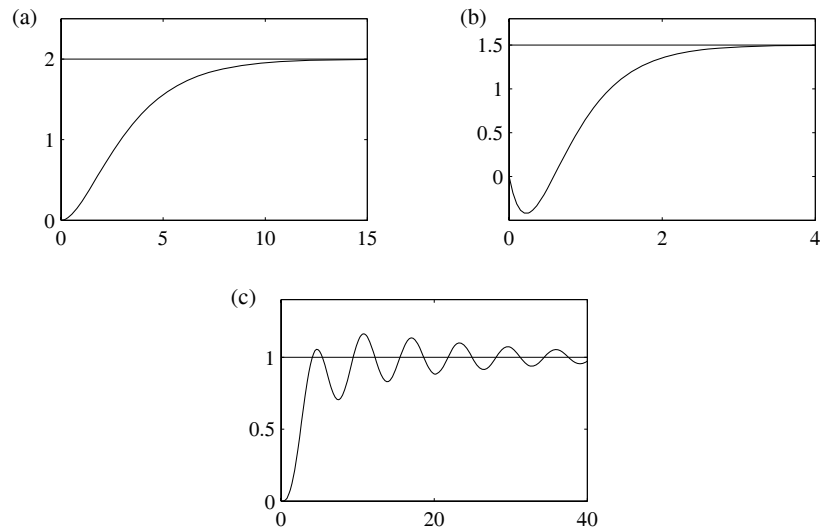
(2) $\frac{1}{(s + 0.5)(1 + 1.5s)}$

(3) $\frac{1}{s^2 + 0.8s + 1}$

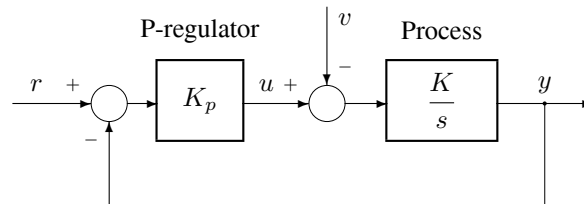
(4) $\frac{1}{(s + 0.67)(1 + 2s)}$

(5) $\frac{18}{s + 2} - \frac{22.5}{s + 3}$

(6) $\frac{1}{(s^2 + 0.1s + 1)(1 + 3s)}$



2.17 (IR) Integralprocessen i följande blockschema regleras med en P-regulator, jmf med buffertprocessen i exempel 1.15 på sid. 18 (utan tidsfördröjning).



- Beräkna stegsvaret för integralprocessen utan återkoppling (öppen styrning), d.v.s. då $u(t) = \sigma(t)$ ($v=0$). Ge exempel på processer som beter sig på detta sätt, gärna i din omgivning.
- Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s)$ från referenssignalen r till utsignalen y för godtycklig förstärkning K_p , samt bestäm det återkopplade systemets pol. Hur förflyttas denna pol då K_p ökar?
- Bestäm utsignalens Laplacetransform $Y(s)$ samt motsvarande tidsuttryck $y(t)$ för det återkopplade systemet då $r(t) = \sigma(t)$, d.v.s. bestäm utsignalen vid ett referenssteg. Kommentera relationen mellan systemets snabbhet och polens placering.

2.18 (IR) I denna uppgift studeras styrsignalen $u(t)$ för det återkopplade systemet i uppgift 2.17.

- Bestäm överföringsfunktionen $G_{ru}(s)$ från referenssignalen r till styrsignalen u för godtycklig förstärkning K_p , samt bestäm det återkoppla-

de systemets pol. Jämför med och kommentera motsvarande resultat i uppgift 2.17 b).

- b) Beräkna styrsignalen $u(t)$ för det återkopplade systemet då $r(t) = \sigma(t)$ (stegsvar).
- c) Använd begynnelsevärdessatsen för att bestämma $u(0)$ då $r(t) = \sigma(t)$, och jämför med resultatet i uppgift b). Kommentera relationen mellan förstärkningen K_p och $u(0)$ samt systemets snabbhet och polens placering (jmf med resultatet i uppgift 2.17 c). Vilket pris får man betala för att få ett snabbt återkopplat reglersystem?

2.19 (IR) I denna uppgift studeras reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ för det återkopplade systemet i uppgift 2.17.

- a) Bestäm överföringsfunktionen $G_{re}(s)$ från referenssignalen r till reglerfelet e för godtycklig förstärkning K_p .
- b) Beräkna reglerfelets Laplacetransform $E(s)$ och motsvarande tidsuttryck $e(t)$ då referenssignalen $r(t)$ är ett steg $\sigma(t)$.
- c) Bestäm då $r(t) = \sigma(t)$ kriteriet

$$J_r = \int_0^{\infty} e(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e(\tau) d\tau$$

som ett godhetsmått på reglersystemets förmåga att följa referenssignaler. Hur påverkas detta mått av valet av förstärkningen K_p ?

Ledning: Använd slutvärdessatsen och integralsatsen i tabell 2.2 på sidan 40.

2.20 (R) I denna uppgift studeras processtörningen $v(t)$ och dess inverkan på det återkopplade systemet i uppgift 2.17.

- a) Bestäm överföringsfunktionen $G_{vy}(s)$ från processtörningen v till utsignalen y för godtycklig förstärkning $K_p > 0$.
- b) Beräkna det kvarstående värdet på utsignalen $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ vid en stegstörning, då $v(t) = \sigma(t)$ och $r = 0$. Hur påverkas resultatet av K_p ?
- c) Ersätt P-regulatorn med en PI-regulator

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

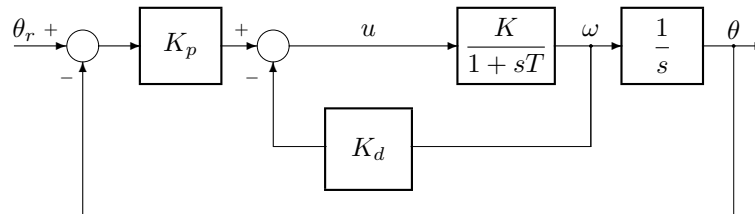
och bestäm överföringsfunktionen $G_{vy}(s)$ för godtyckliga förstärkningar $K_p > 0$ och $K_i > 0$. Observera speciellt nämnaren, och jämför med det generella polynomet

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Bestäm dämpningen ζ som funktion av PI-regulatorns parametrar. Välj specifikt en relation mellan K_i och K_p så att dämpningen blir $\zeta = 0.5$.

- d) Beräkna vid PI-reglering det kvarstående värdet på utsignalen $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ då $v(t) = \sigma(t)$ och $r = 0$. Jämför resultatet med uppgift b) (P-reglering)

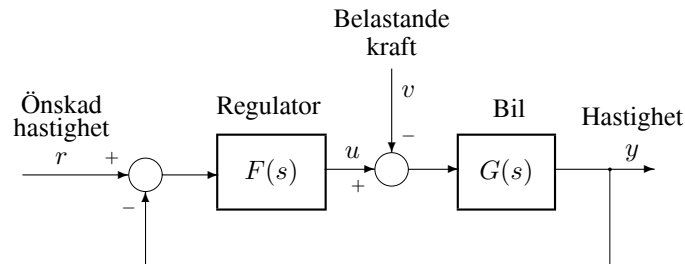
2.21 (R) Betrakta följande servosystem med en likströmsmotor



Både vinkeln θ och vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ återkopplas enligt blockschemat. Antag att $K = 3$ och $T = 0.5$.

- Bestäm överföringsfunktionen från referenssignalen θ_r till utsignalen θ , och välj regulatorparametrarna K_p och K_d så att slutna systemets poler hamnar i en dubbelpol $s = -\alpha$. Dubbelpolen garanterar ett väl dämpat återkopplat reglersystem ($\zeta = 1$).
- Bestäm och skissera utsignalen $\theta(t)$ samt styrsignalens begynnelsevärde $u(0)$ för $\alpha = 1$ och 5 , då referenssignalen är ett enhetssteg. Vilken motsättning råder mellan önskad snabbhet och styrsignalaktivitet, då dämpningen är konstant?

2.22 (R) Figuren nedan visar ett blockdiagram för en bil med farthållare.



Den belastande kraften $v(t)$ uppträder vid höjdförändringar (upp- och nedförsbackar). Bilens tröghet beskrivs av överföringsfunktionen (jmf uppgift 2.9)

$$G(s) = \frac{4}{1 + 4s}$$

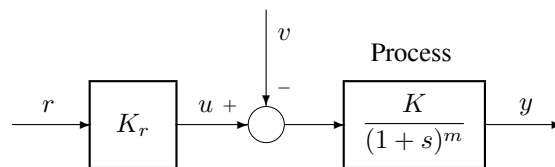
och regulatorn är av PI-typ, d.v.s.

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

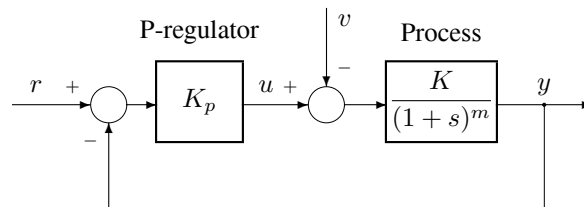
Notera att P-reglering erhålls då $K_i = 0$.

- Bestäm överföringsfunktionerna $G_{ry}(s)$ från r till y , $G_{ru}(s)$ från r till u och $G_{vy}(s)$ från v till y .
- Vad blir de kvarstående felen vid stegformade och rampformade referenssignaler $r(t)$ respektive laststörningar $v(t)$? Iakttag speciellt fallet $K_i = 0$, dvs P-reglering. Det kan antas att regulatorparametrar K_p och K_i är valda så att det återkopplade systemet är stabilt.
- Bestäm för godtyckliga K_p och K_i styrsignalens startvärde $u(0)$ vid stegformade referenssignaländringar. Vilka slutsatser kan man dra angående relationen mellan styrsignalaktivitet ($u(0)$) och kvarstående fel vid P-respektive PI-reglering.

2.23 (R)



Jämför ovanstående öppna styrning, där processens multipelpol är av ordning $m = 1, 2$, med nedanstående återkopplade system.



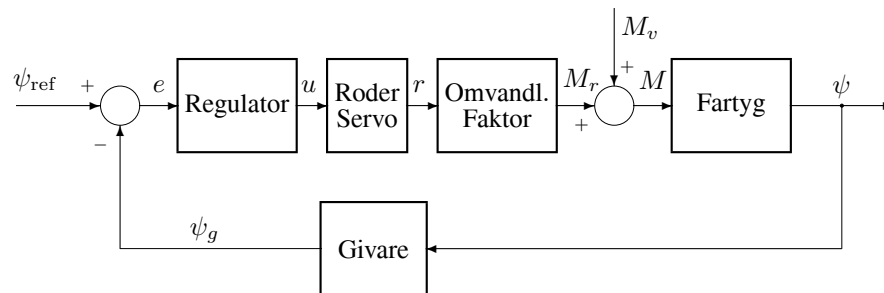
- Bestäm förstärkningen K_r vid öppen styrning, så att $y(t) \rightarrow r$ då $t \rightarrow \infty$, då referenssignalen $r(t)$ är en stegfunktion och $v = 0$. Antag att processförstärkningen $K = 2$.
- Antag nu att processförstärkningen K avviker från det nominella värdet $K = 2$. Bestäm därför, för ett godtyckligt värde på K , utsignalens slutvärde $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ vid öppen styrning och återkoppling, då referenssignalen $r(t)$ är ett enhetssteg. Notera skillnaden mellan öppen styrning och återkoppling, speciellt då P-regulatorns förstärkning K_p är stor.
- Antag att en stegformad laststörning $v(t)$ med amplituden ett subtraheras från styrsignalen $u(t)$. Bestäm det kvarstående felet orsakat av denna störning vid återkoppling respektive öppen styrning. Välj $r = 0$.

- d) Dålig dämpning och stabilitetsproblem kan uppstå i återkopplingsfallet. Bestäm därför dämpningen ζ för det återkopplade systemets nämnarpolynom för $m = 2$, då $K_p = 99$ och $K = 1$. Jämför med polplaceringen då $m = 1$ (återkoppling) samt öppen styrning.
- e) Vilka slutsatser kan vi dra angående fördelar och nackdelar med återkoppling respektive öppen styrning, då processens förstärkning K varierar eller ej kan bestämmas exakt (osäker parameter). Observera skillnaden mellan 1:a och 2:a ordningens system ($m = 1, 2$) vad avser dämpnings- och stabilitetsproblematiken.

2.24 (R) Figuren nedan beskriver ett regelsystem för automatisk styrning av ett fartyg. Systemet är uppbyggt med en elektrisk regulator. För de olika delarna gäller följande samband:

$$\begin{aligned} \text{Regulatorn} & u = 0.5e \\ \text{Roderservot} & 5\dot{r} + r = 0.1u \\ \text{Fartyget} & 100\ddot{\psi} + \dot{\psi} = 0.1M \\ \text{Givaren} & \psi_g = 0.1\psi \end{aligned}$$

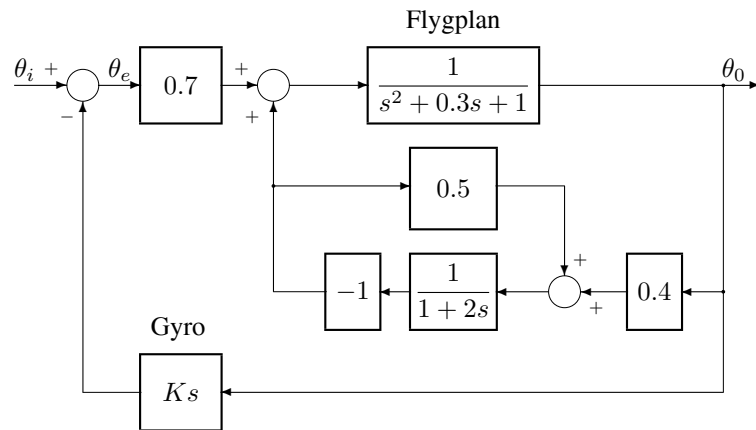
Omvandlingsfaktorn är vid den aktuella hastigheten 10^3 .



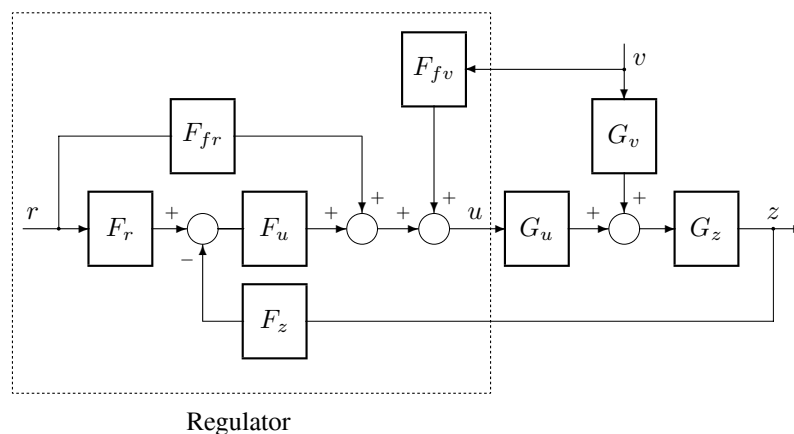
ψ = kursvinkel	u = spänning från regulatorn
M_v = vridmoment pga störningar	e = felsignal
M_r = vridmoment pga roderverkan	ψ_g = mätsignal från givaren
M = totalt vridmoment på båten	r = rodervinkel

Bestäm kretsöverföringen $L(s)$, överföringsfunktionen från referenssignalen ψ_r till utsignalen ψ , samt överföringsfunktioner från störningen M_v till kursvinkeln ψ .

- 2.25 (R)** Figuren nedan visar ett blockdiagram för ett flygplan vid ett vindtunnel-försök. Insignalen θ_i är pilotens styrsignal och utsignalen θ_0 är flygplanets vinkel. Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ samt överföringsfunktionen från θ_i till θ_0 .

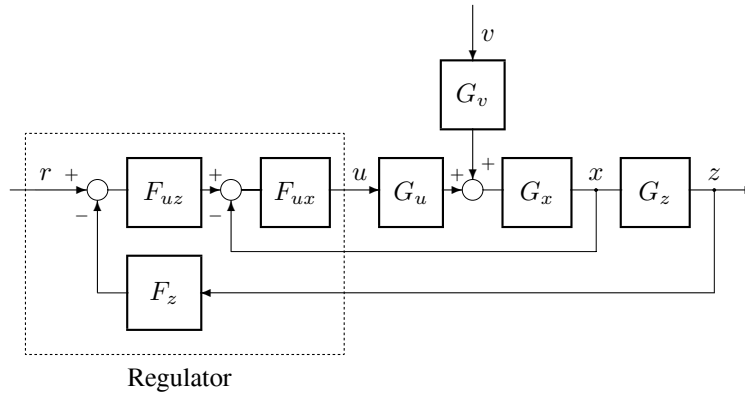


- 2.26 (R)**

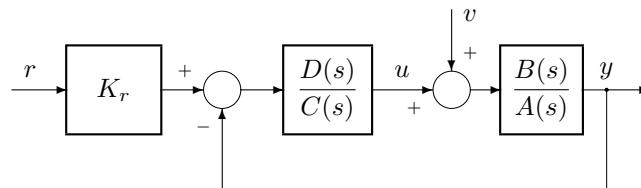


- a) Bestäm överföringsfunktionerna $G_{rz}(s)$ och $G_{vz}(s)$ från referenssignalen r respektive störsignalen v . Vad blir kretsöverföringen $L(s)$?
- b) Välj överföringsfunktionerna $F_{fr}(s)$ och $F_{fv}(s)$ sådana att $z = r$. Vilka komplikationer kan dyka upp i sammanhanget?

- 2.27 (R)** Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ samt överföringsfunktionerna $G_{rz}(s)$ och $G_{vz}(s)$ från referenssignalen r respektive störsignalen v till utsignalen z för följande reglersystem



- 2.28 (R)**



Figuren visar blockschemat för ett reglersystem där $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ och $D(s)$ är polynom. Beräkna överföringsfunktionerna för det återkopplade systemet från referenssignalen r och processtörningen v till den reglerade utsignalen y och styrsignalen u , dvs $G_{ry}(s)$, $G_{vy}(s)$, $G_{ru}(s)$ samt $G_{vu}(s)$.

Inför $P(s)$ som beteckning för slutna systemets nämnarpolynom (polerna ges av $P(s) = 0$). Bestäm förstärkningen K_r så att lågfrekvensförstärkningen från r till y blir ett. Vilken egenskap ska polynomet $C(s)$ ha, för att kvarstående fel efter stegstörningar skall undvikas? Använd slutvärdessatsen! Bestäm också explicit slutna systemets poler då

$$\frac{D(s)}{C(s)} = \frac{2(s+1)}{s} \quad \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

- 2.29 (I)** Ange typiska tillämpningar för Laplacetransformens deriveringsregel, begynnelsevärdes- och slutvärdessats samt faltningsintegralen.
- 2.30 (I)** Förklara med hjälp av viktfunktionen och faltningsintegralen begreppen kausalt, dynamiskt, linjärt respektive tidsinvariant system.

- 2.31 (I)** Bestäm viktfunctionens principiella utseende då överföringsfunktionens poler ligger i
- högra halvplanet.
 - vänstra halvplanet på realaxeln nära origo.
 - vänstra halvplanet på realaxeln långt bort från origo.
 - vänstra komplexa halvplanet med imaginärdel nära respektive långt från realaxeln.
- 2.32 (I)** På vilket sätt relateras kretsöverföringen och 1) det återkopplades systemets poler samt 2) kvarstående fel vid steg i referenssignalen.
- 2.33 (I)** Vilken relation råder i allmänhet mellan ökad förstärkning och det återkopplade systemets dämpning (översväng). Ange ett viktigt undantag.
- 2.34 (I)** Ange en enkel designstrategi vid PI-reglering för processer med poler utspridda på negativa realaxeln.

3 Tillståndsmodeller

3.1 (R) Representera följande system på tillståndsform, där u är insignalen och y är utsignalen:

a) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$

b) $2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) - 5u(t) = 0$

c) $\begin{aligned} 4\dot{v}(t) + 5v(t) &= 2u(t) \\ \dot{y}(t) + 2y(t) &= 5v(t) \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} \dot{v}(t) + 2v(t) &= 3u(t) \\ \ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 4y(t) &= 5v(t) \end{aligned}$

e) $y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t)$

f) $\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\dot{u}(t) + 10u(t)$

3.2 (R) Representera följande system på tillståndsform med hjälp av lämplig kano-nisk form:

a) $G(s) = \frac{4s + 8}{2s^2 + 6s + 4}$

b) $G(s) = \frac{3}{(s + 2)(s + 4)}$

c) $G(s) = \frac{s + 1}{s + 3} + \frac{2}{s + 4}$

d) $G(s) = \frac{2s^2 + 10s + 4}{s^2 + 3s + 1}$

e) $y^{(3)}(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 2u(t)$

3.3 (R) Insignalen till en första ordningens process med insignal/utsignalsambandet

$$Y(s) = \frac{4}{1 + 2s}X(s)$$

genereras via ett styrdon vars dynamik representeras av uttrycket

$$X(s) = \frac{1.5}{1 + 0.5s}U(s)$$

Ställ upp olika tillståndsrepresentationer för sambandet mellan u och y

a) för en modell där fysikaliska signalstorheterna också är tillstånd.

- b) för en tillståndsmodell på observerbar kanonisk form.
 c) för en tillståndsmodell på diagonalform.

3.4 (R) Bestäm överföringsfunktionen $G(s) = Y(s)/U(s)$ för följande system

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [2 \quad -1] x(t) + u(t)\end{aligned}$$

3.5 (R) En modell för en helikopters lutningsvinkel (pitch) θ vid justering av rotorvinkeln δ är

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) + \sigma_1 \dot{\theta}(t) + \alpha_1 \dot{x}(t) &= n \delta(t) \\ \ddot{x}(t) + \sigma_2 \dot{\theta}(t) + \alpha_2 \dot{x}(t) - g \theta(t) &= g \delta(t)\end{aligned}$$

Här är x den horisontella rörelsen och $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2, n$ och g konstanter.

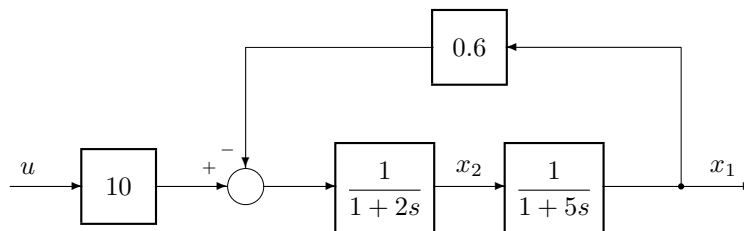
- a) Välj tillståndsvariabler och formulera modellen på tillståndsform.
 b) Tag fram överföringsfunktionen $\frac{\theta(s)}{\delta(s)}$

3.6 (R) Ett dynamiskt system beskrivs av följande kopplade differentialekvationer

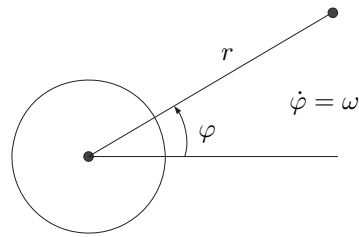
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ \dot{y}(t) - y(t) + 2x(t) &= u(t)\end{aligned}$$

- a) Formulera en tillståndsmodell för detta system samt överföringsfunktionen från u till y .
 b) Analysera systemets stabilitet med hjälp av dess tillståndsmodell och överföringsfunktion. Förklara skillnaderna i resultaten.

3.7 (R) Blockschemat nedan illustrerar två seriekopplade första ordningens system med återkoppling. Ställ upp systemet på tillståndsform och beräkna systemets egenvärden. Är systemet stabilt?



3.8 (R)



För en satellitbana i ett centralt gravitationsfält gäller följande differentialekvationer:

$$\ddot{r}(t) + \frac{k}{r^2(t)} - r(t)\omega^2(t) = u_1(t)$$

$$\frac{1}{r(t)} \frac{d}{dt}(r^2(t)\omega(t)) = u_2(t)$$

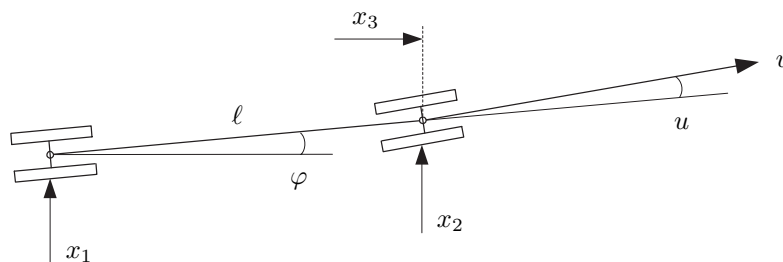
där k är gravitationskonstanten. Insignalerna u_1 och u_2 är radiella respektive tangentiella styrkrafter.

- Ställ upp satellitens rörelseekvationer på tillståndsform med r , \dot{r} och ω som tillståndsvariabler!
- För utveckling av regleralgoritmer ("station-keeping") till en geostationär satellit kring planeten Tellus vill man linjärisera ekvationerna kring den nominella cirkulära banan

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \text{ rad/s} \right).$$

Genomför linjäriseringen av tillståndsmodellen med utnyttjande av att tillståndsderivatorna är noll i "arbetspunkten" (nominella banan). Nominella styrkrafter: $u_{10} = u_{20} = 0$. Vilka är det linjäriserade systemets egenvärden?

3.9 (R)



En truck med längden $\ell = 5$ m enligt figuren har fasta bakhjul och styrbara framhjul. För att förenkla uppgiften antas spårvidden vara mycket liten.

Framhjulen drivs med konstant varvtal, vilket ger hastigheten $v = 8$ m/s i en riktning u radianer från truckens längsaxel.

- Ställ upp de olinjära tillståndsekvationerna för trucken.
- Inför antagandet att vinklarna u och φ är små och ställ upp den linjära tillståndsmodellen samt överföringsfunktionerna från u till x_1 respektive x_2 . Försök att förklara pol-nollställeskonfigurationen.

3.10 (R) Ett dynamiskt system beskrivs av modellen

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) + p(t) &= q^3(t)u(t) \\ \varepsilon\dot{q}(t) + q(t) &= e^{q(t)}u^2(t) \\ y(t) &= p(t)q(t)\end{aligned}$$

där u är instorheten, medan y är utstorheten. Antag att ε är litet, vilket kan approximeras med $\varepsilon = 0$.

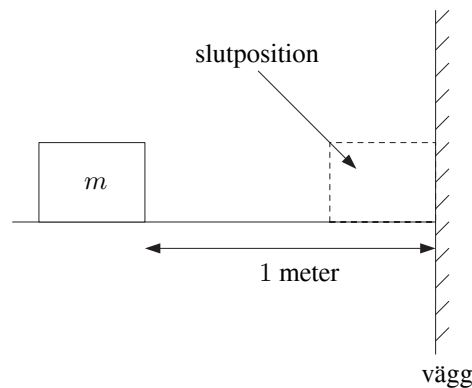
- Formulera en tillståndsmodell för godtyckligt ε och för $\varepsilon = 0$. På vilket sätt förändras den andra differentialekvationen och dimensionen på problemet (antalet tillståndsvariabler)? Tolka resultatet i termer av dynamisk respektive statisk relation.
- Bestäm den arbetspunkt (p_0, q_0, u_0) där stationärtillståndet $p_0 = 0.5$, d.v.s. bestäm q_0 och u_0 . (Det kan påpekas i sammanhanget att ekvationen $z^7 = e^z/4$ har lösningen $z = 0.9380$).
- Ställ upp en linjär tillståndsmodell för systemet, som gäller nära arbetspunkten (p_0, q_0, u_0) , då $\varepsilon > 0$. Bestäm systemets egenvärden och studera vad som händer då $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ från instorheten Δu till utstorheten Δy då $\varepsilon > 0$. Vad blir systemets tidskonstanter? Sammanfatta slutsatserna angående systemdimension, poler, tidskonstanter och dynamiskt kontra statiskt samband då $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.11 (R) En tillståndsmodell

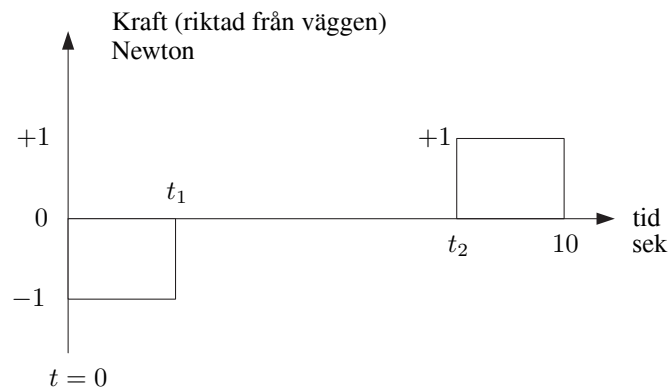
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

av andra ordningen har ett impulsfunktionssvar $y(t) = \sin t$. Vidare gäller att $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Bestäm matriserna A , B och C .

3.12 (R) En kropp med massan $m = 1$ kg befinner sig vid $t = 0$ på ett avstånd av 1 meter från en vägg. Underlaget är friktionsfritt. Hastigheten är då 1 m/s riktad från väggen.



Kroppen skall styras in mot väggen så att den efter 10 sekunder befinner sig exakt vid väggen, och hastigheten skall då vara noll. Styrkraften u är ± 1 Newton och styrningen skall ske enligt följande diagram.



Beräkna tiderna t_1 och t_2 via systemets tillståndsbeskrivning och dess övergångsmatrix.

- 3.13 (R)** En kraft F påverkar ett mekaniskt föremål utan dämpningskrafter. Då föremålets massa är $m = 1$ kg, bestäms dess hastighet y av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = F(t)$$

Kraften F genereras av styrsignalen u via ett styrdon, vars dynamik ges av överföringsfunktionen

$$G_u(s) = \frac{0.5}{1 + 0.5s}$$

samt av belastningskraften F_v , som agerar som en laststörning och därmed adderas med negativt tecken. Systemet styrs av en P-regulator

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t))$$

där förstärkningen $K_p = 1$.

- a) Rita ett blockschema för det återkopplade systemet och formulera en tillståndsmodell för den öppna icke-reglerade processen inklusive styrdon, samt för det återkopplade systemet.
- b) Bestäm för dessa båda system poler, övergångsmatrix och insvängningsförloppet för $t > 0$ då $u = 0$ och $F_v = 0$ respektive $r = 0$ och $F_v = 0$ samt $y(0) = 1$ m/s och $\dot{y}(0) = 1$ m/s².

3.14 (R) Visa hur tidssvar för en tillståndsmodell (A, B, C) kan beräknas med hjälp av övergångsmatriser, då insignalen är en ramp $u(t) = t\sigma(t)$ respektive en cosinussignal $u(t) = \cos(\omega t)\sigma(t)$.

3.15 (R) Ett system som beskrivs av en tillståndsmodell (A, B, C) ska regleras med en PI-regulator

$$U(s) = \frac{K_i + K_p s}{s}(R(s) - Y(s))$$

Formulera en tillståndsmodell för det återkopplade systemet från referenssignalen r till utsignalen y .

3.16 (I) Definiera begreppen tillstånd, tillståndsrum och tillståndstrajektoria. På vilket sätt relateras begynnelsevärden till differentialekvationer och ett systems tillstånd?

3.17 (I) På vilket sätt relateras egenvärdesproblem inom linjär algebra och poler för dynamiska system? Uppmärksamma speciellt kopplingen för system på diagonalform.

3.18 (I) Vad är det som avgör om en linjäriserad modell på ett noggrant sätt representerar det olinjära systemets dynamik?

3.19 (I) Oftast är tillståndsvektorns derivata i en linjäriserad arbetspunkt $\dot{x}_0 = 0$. Ange något exempel där så icke är fallet.

3.20 (I) Ange tre olika kanoniska former vid övergång från överföringsfunktion till tillståndsmodell. När blir D -matrisen i en tillståndsmodell skild från noll, och på vilket sätt bestäms den?

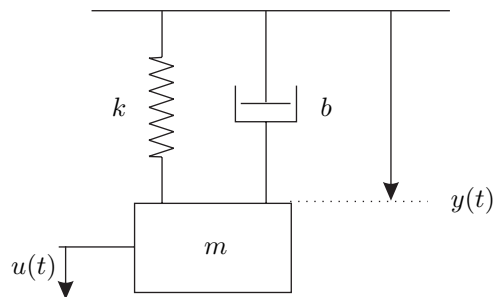
3.21 (I) Ange tre olika sätt att beräkna övergångsmatrisen för en tillståndsmodell. På vilket sätt beräknas tidssvar för specifika insignaler med kända signalmodeller? Vilket angreppssätt utnyttjas för godtyckliga insignaler?

3.22 (I) Ange en tidsdiskret tillståndsmodell som rekursivt uppdaterar tillståndet då insignalen är styckvis konstant.

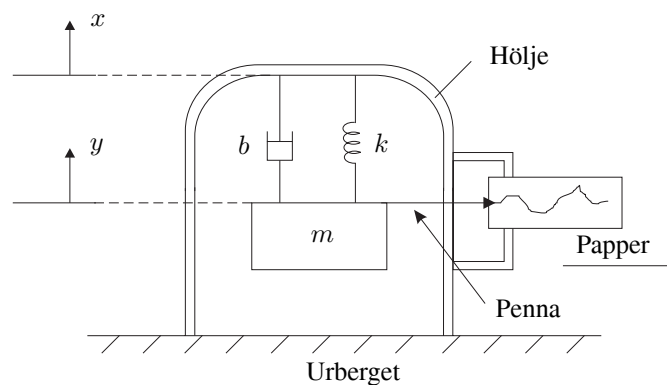
4 Dynamiska modeller för tekniska system

4.1 (R) Betrakta följande mekaniska system. Fjädern har längden av ℓ_0 då fjäderkraften är lika med noll.

- Bestäm massans stationära jämviktsläge y_0 då dragkraften $u(t) = u_0$.
- Beräkna överföringsfunktionen som beskriver det dynamiska sambandet mellan ändringen i dragkraft Δu och ändringen i massans läge Δy . Ange även systemets relativa dämpning ζ och dess odämpade egenvinkelfrekvens ω .



4.2 (R) Figuren nedan visar schematiskt funktionen hos en seismograf, avsedd att registrera jordbävningar. Seismografens hölje är fast förbundet med urberget. När berget skakar kommer massan m på grund av sin tröghet att nästan vara helt still, varvid jordens rörelse registreras med hjälp av skrivaren och den penna som massan är fast förbunden med.



x = jordens "läge" ($x = 0$ vid jämvikt)
 y = massans läge ($y = 0$ vid jämvikt)
 m = massa
 b = dämpkonstant
 k = fjäderkonstant

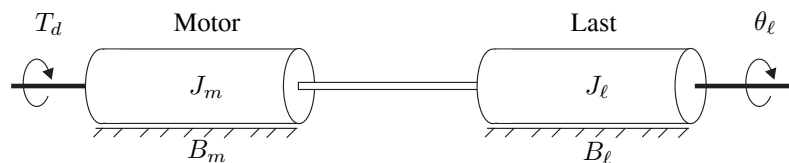
Bestäm överföringsfunktionen $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ för seismografen.

4.3 (R) Formulera en tillståndsmodell och bestäm överföringsfunktionen från drivande momentet T_d till vinkeln på utgående last θ_ℓ för nedanstående roterande system. Jämför resultaten speciellt för systemen a) och b).

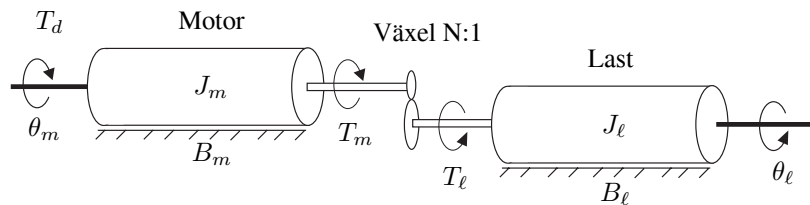
Allmänna beteckningar:

J = Tröghetsmoment θ = Vinkeln
 B = Dämpfaktor T_d = Moment
 K = Axelstyvhet

a)

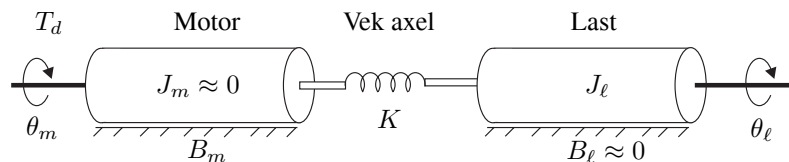


b)



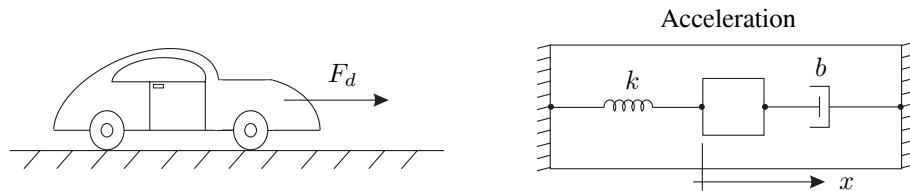
Ideal växel medför att effekt in ($\dot{\theta}_m T_m$) är lika med effekt ut ($\dot{\theta}_l T_l$).

c)



Motorns tröghetsmoment J_m och lastens friktion B_ℓ försummas.

- 4.4 (R) En bil är utrustad med en accelerometer, för att mäta accelerationen i bilens längsled. Instrumentet är stelt fastskruvat i bilen.



Beteckningar:

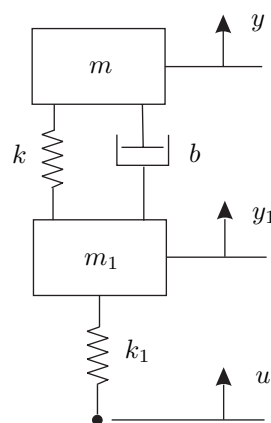
F_d = bilens framdrivande kraft	k = fjäderkonstant
M = bilens massa	b = dämpningskonstant
m = en massa vars rörelse i x -led utgör instrumentets utsignal	a = bilens acceleration

a) Bestäm instrumentets överföringsfunktion $G(s) = \frac{X(s)}{A(s)}$

- b) Antag att $m = 0.1$ kg och att $k = 10$ N/m. Vilket värde skall då väljas på dämpningskonstanten b för att systemets relativa dämpning skall bli $\zeta = 1$. Skissera stegsvaret för systemet i detta fall.

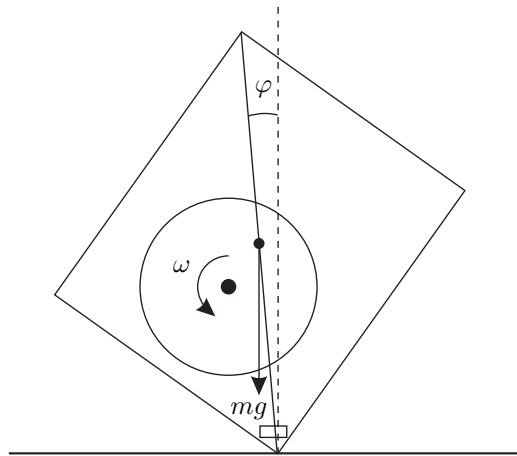
- 4.5 (R) Fjädringssystemet för en bil kan modelleras som två kopplade svängande massor, där m_1 är massan för hjul och axlar, m motsvarar massan för bilens övriga delar, k_1 modellerar däckens elasticitet, medan k och b representerar fjädrar och stötdämpare. Positionen $u(t)$ härrör från ojämnheter i vägbanan.

Bestäm överföringsfunktionen från vägbanans höjdvariation u till bilens vertikala rörelse y . Antag att systemet är i jämvikt när $u = y_1 = y = 0$.



- 4.6 (R)** Ett populärt reglertekniskt demonstrationsobjekt är en attachéväska som kan fås att balansera på högkant enligt nedanstående skiss. För detta ändamål är väskan utrustad med ett svänghjul med styrbar drivordning (vinkelhastighet ω), samt en accelerometer (rektangel i figuren) placerad nära markkontaktpunkten, med vilken väskans obalansvinkel φ kan mätas (egentligen den mot φ svarande komponenten av tyngdaccelerationen).

Antag vidare att det på svänghjulet verkande drivmomentet u [Nm] är systemets styrsignal och att svänghjulets tröghetsmoment är $J = 0.1 \text{ kg m}^2$. Väskans massa inklusive svänghjul är $m=5 \text{ kg}$ och tröghetsmomentet för vridningsrörelsen kring markkontaktpunkten är $J_0 = 1 \text{ kg m}^2$. Tyngdpunktens höjd över underlaget i balanseringsläge är $h = 0.5 \text{ m}$ och tyngdaccelerationen antas vara 10 m/s^2 .



Härled en tillståndsmodell för systemet som gäller vid små utslagsvinklar med φ och $\dot{\varphi}$ som tillståndsvariabler. Bestäm erhållen resonansfrekvens.

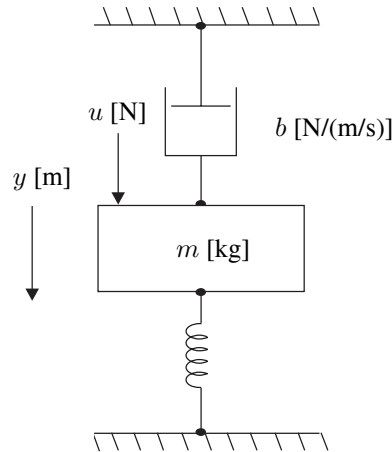
Notera att rörelsemängdsmomentet för hela systemet, väska plus svänghjul, blir $H = J\omega + J_0\dot{\varphi}$. Tidsderivatan av rörelsemängdsmomentet är lika med summan av *yttre* moment.

- 4.7 (R)** En massa $m = 10 \text{ kg}$ placeras på en progressiv (olinjär) fjäder med ett kraftläges-beroende

$$F = 2 \cdot 10^3 y + 10^6 y^3$$

där F [N] är fjäderkraften och y [m] är sammanpressningen av fjädern jämfört med ospänt läge (ospända fjäderns längd är 10 cm). För att stabilisera massan finns dessutom en linjär viskös dämpare med dämpningskonstant $b = 100 \text{ Nm/s}$, se figur på nästa sida.

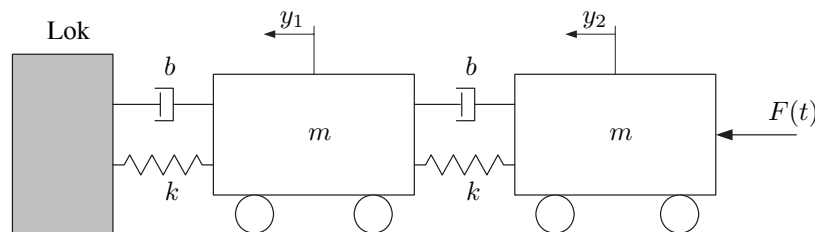
- a) Formulera en tillståndsmodell för det olinjära systemet. Vilket blir systemets jämviktsläge (arbetspunkt) om yttre kraften $u(t) = 0$?



- b) Linjärisera kring aktuell arbetspunkt och beräkna överföringsfunktionen mellan yttre kraften $u(t)$ (små krafter förutsätts) och motsvarande lägesändring $\Delta y(t)$. Vad blir systemets resonansfrekvens (odämpade egenfrekvens) och relativa dämpning?

- 4.8 (R)** Ett tåg med ett godtyckligt antal vagnar ska modelleras för att undersöka interaktionen mellan de olika vagnarna. Eftersom alla vagnar antas vara identiska räcker det att modellera några få tågsegment. En modell för det första tågsegmentet bestående av de första två vagnarna visas i nedanstående figur. Loket antas åka med konstant hastighet, och $F(t)$ antas vara kraften som överförs från nästa vagnsegment. Måtten y_1 och y_2 anger positionsändringar relativt loket och antas vara noll om fjädrarna är i viloläge (ingen fjäderkraft). Friktionen mellan hjul och räls kan försummas.

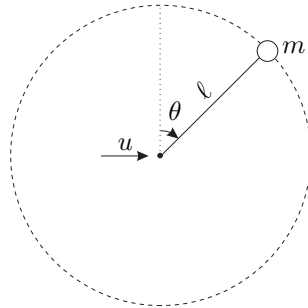
Ställ upp en tillståndsmodell av detta vagnsegment med $F(t)$ som insignal och avståndet $(y_1 - y_2)$ mellan vagnarna som utsignal. Välj dina tillstånd så att de har en fysikalisk tolkning (e.g. position, hastighet, acceleration, etc.)



- 4.9 (R)** I figuren på nästa sida visas en pendel med längd ℓ och massa m som styrs med accelerationen u i horisontell led. Låt θ vara vinkeln mellan vertikalen och pendeln enligt figuren. Genom momentbalans fås följande dynamik (g är

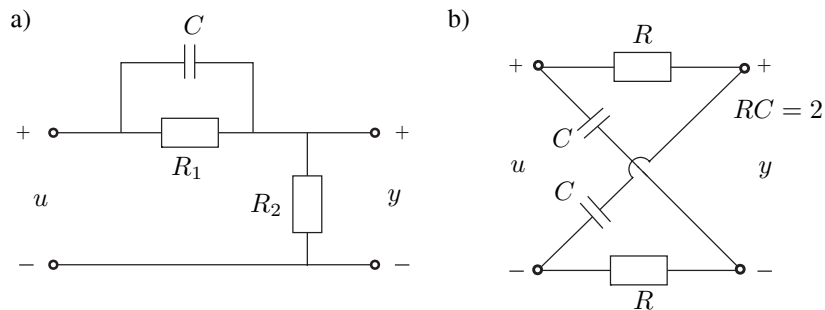
gravitationskonstanten)

$$m\ell^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - m\ell u \cos \theta$$



- Formulera en tillståndsmodell och linjärisera kring arbetspunkten (θ_0, u_0) .
- Var hamnar det linjära systemets poler då pendeln är i vila dels rakt upp och dels rakt ner?

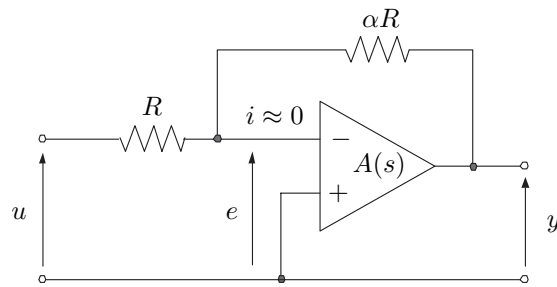
4.10 (R) Nedanstående två elektriska filter är obelastade på utgångssidan. Bestäm deras överföringsfunktioner $G(s) = Y(s)/U(s)$ och skissera motsvarande stegsvar och impulssvar. Rita även pol-nollställesdiagram. Ge en fysikalisk tolkning till det märkliga impulssvaret i uppgift a).



4.11 (R) Beräkna överföringsfunktionen från u till y , då operationsförstärkaren i figuren längst upp på nästa sida fungerar som en första ordningens överföringsfunktion med tidskonstant T och hög förstärkning K , d.v.s.

$$A(s) = \frac{K}{1 + Ts} \quad K \gg 1$$

Hur stor blir tidskonstanten för den återkopplade förstärkaren (överföringen från u till y) då α varierar mellan noll och ett, och $K \gg 1$? Ange speciellt värdet då $K = 10^5$, $T = 0.01$ och $\alpha = 1$.

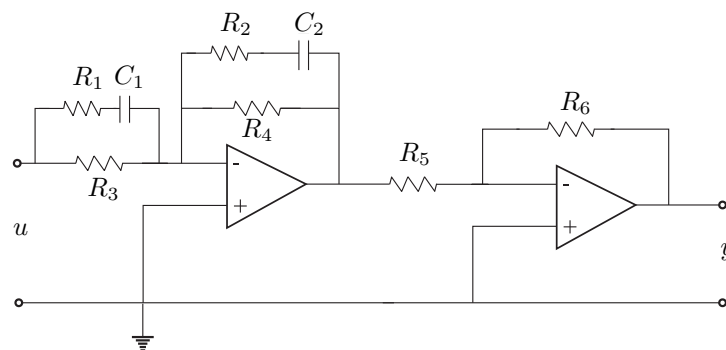


4.12 (R) Figuren nedan visar en kompenseringslänk som implementeras med hjälp av operationsförstärkare.

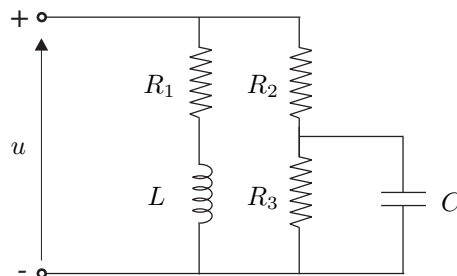
Visa, under antagande om ideala operationsförstärkare, att överföringsfunktionen från $U(s)$ till $Y(s)$ kan tecknas på formen

$$K \frac{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}{(s + \alpha_3)(s + \alpha_4)}$$

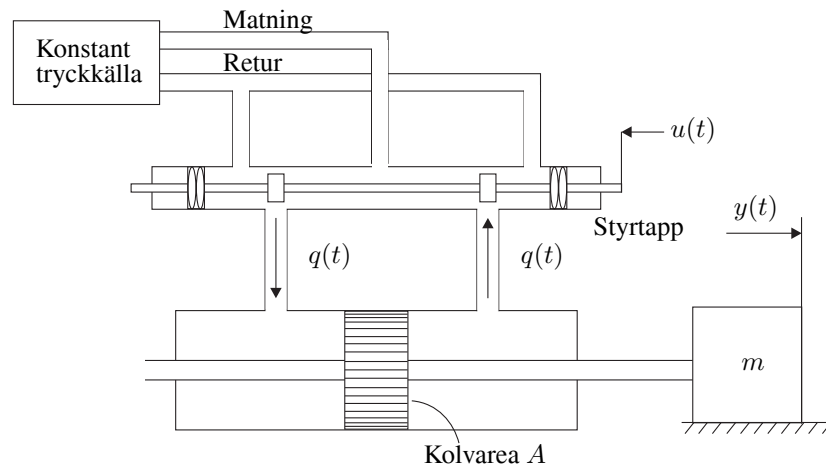
samt ange parametrarna K och $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ som funktioner av komponentvärdena R_1, \dots, R_6 och C_1, C_2 .



4.13 (R) Formulera en tillståndsmodell för nedanstående elektriska krets.



4.14 (R)



Den hydrauliska styrventilen ger ett flöde, q [m^3/s], av formen

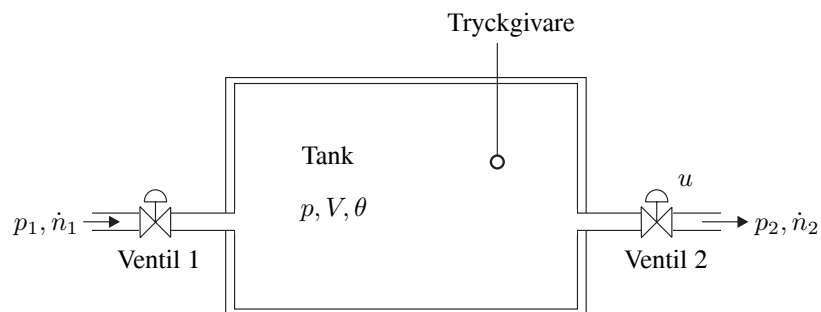
$$q = k_1 u - k_2 \delta p$$

där u är styrtappens läge och Δp är tryckdifferensen över kolven, som ger en högerriktad kraft

$$F = A\Delta p$$

Oljan antas vara inkompressibel och kolvläckaget kan försummas. Kraften F driver massan m , som glider utan friktion. Parametrarna k_1 , k_2 , A och m är konstanter. Man vill styra massans läge, $y(t)$, med hjälp av styrtappen. Bestäm överföringsfunktionen $G(s) = Y(s)/U(s)$

4.15 (R)



Gastrycket i ovanstående tank skall regleras med ventil 2, medan ventil 1 antas ha ett konstant läge. Följande beteckningar gäller:

p = tryck	\dot{n} = molflöde
V = volym	u = reglerventilens position
θ = temperatur	k = konstant

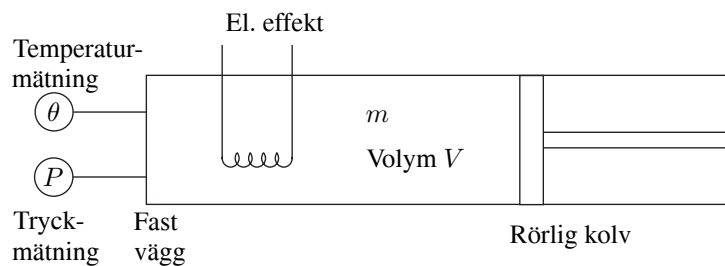
För molflödena genom respektive ventil gäller att

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= k_1 \sqrt{p_1 - p} \\ \dot{n}_2 &= k_2 u^2 \sqrt{p - p_2}\end{aligned}$$

Eftersom flödena anses variera långsamt gäller isothermiska förhållanden. Dessutom antas att allmänna gaslagen är giltig för den aktuella gasen (ideal gas).

- Ange den differentialekvation som bestämmer hur trycket p i tanken påverkas av trycken p_1 och p_2 samt ventilläget u .
- Bestäm vilket ventilläge u_0 som krävs för att få önskat tryck p_0 i tanken då $p_1 = p_{10}$ och $p_2 = p_{20}$.
- Beräkna den linjära överföringsfunktionen från ventilläge till tryck i tanken vid den önskade arbetspunkten enligt uppgift b).

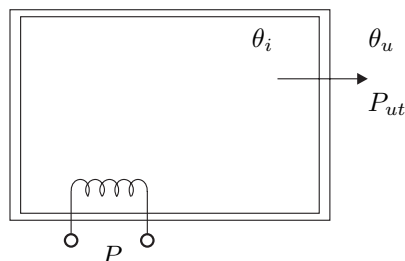
4.16 (R) En gasmassa m är innesluten i en cylinder, se figur. Allmänna gaslagen kan anses gälla.



Man vill nu styra trycket genom att variera temperaturen θ och volymen V . Ange ett linjärt samband mellan trycket och styrstorheterna θ och V . Låt P_0 , θ_0 och V_0 beteckna motsvarande värden vid önskad arbetspunkt.

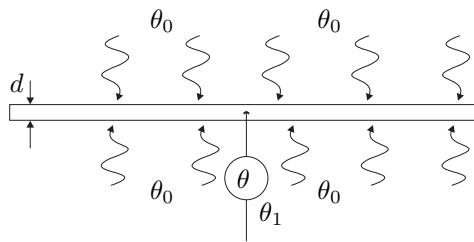
4.17 (R) Figuren visar en elektriskt uppvärmd ugn. Värmeförlusten P_{ut} genom ugnens väggar är proportionell mot differensstemperaturen $(\theta_i - \theta_u)$ enligt

$$P_{ut} = k(\theta_i - \theta_u)$$



Bestäm överföringsfunktionerna $G_1(s) = \theta_i(s)/\theta_u(s)$ och $G_2(s) = \theta_i(s)/P(s)$ samt rita blockschema för ugnen, då värmegenomgångstalet $k = 0.047 \text{ W/}^\circ\text{C}$ och värmekapaciteten hos den inneslutna luften $C = c\rho V = 50.4 \text{ J/}^\circ\text{C}$.

4.18 (R)

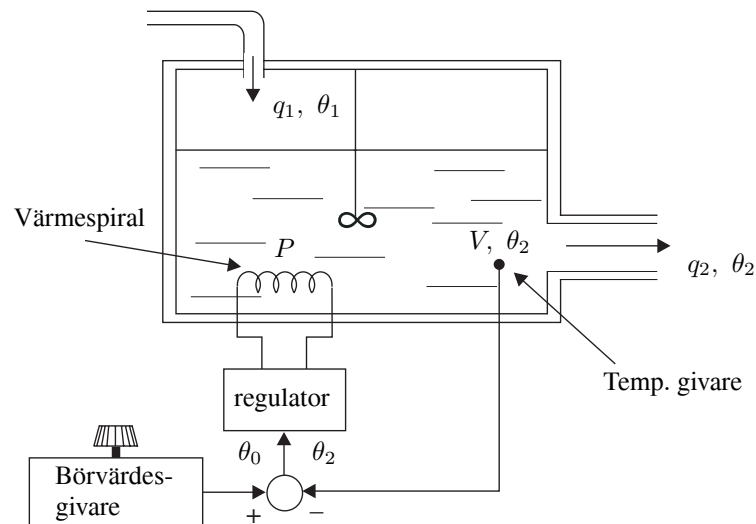


En tunn plåt (tjocklek d , densitet ρ , specifikt värme c) införs i en stålugn med temperaturen θ_0 . Temperaturen i plåten θ_1 mäts med pyrometer. För värmeövergången gäller Stefan Boltzmann's lag

$$q = \sigma(\theta_0^4 - \theta_1^4) \quad [\text{W/m}^2]$$

Bestäm överföringsfunktionen $\Delta\theta_1(s)/\Delta\theta_0(s)$ i arbetspunkten θ , där θ är en given konstant ugnstemperatur. Leder högre arbetstemperatur till ett snabbare eller ett långsammare system?

4.19 (R)



Ett reglersystem för temperaturreglering i en vattentank visas i figuren. Temperaturen regleras med en regulator som bestämmer effekten till värmespiralen.

Antag följande:

- Temperaturgivaren är ideal, d.v.s. den kan anses reagera momentant på förändringar i temperaturen.
- Effekttutvecklingen i värmespiralen är proportionell mot reglerfelet, d.v.s. $P = P_0 + \Delta P$, där $\Delta P = k(\theta_0 - \theta_2)$, $k = 4 \cdot 10^5$.
- Regleringen skall ske kring en arbetspunkt:

$$\theta_0 = \theta_{00} + \Delta\theta_0 \quad (\text{normalt börvärde } \theta_{00} = 40^\circ \text{ C})$$

$$\theta_1 = \theta_{10} + \Delta\theta_1 \quad (\text{normal tilloppstemperatur } \theta_{10} = 20^\circ \text{ C})$$

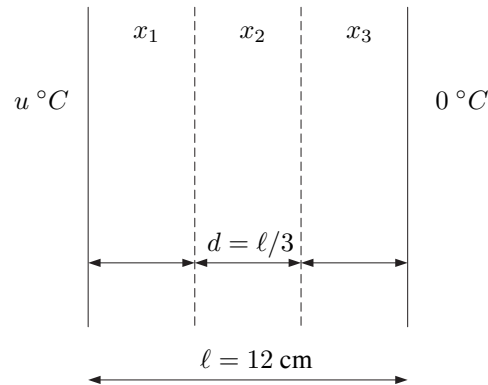
$$\theta_2 = \theta_{20} + \Delta\theta_2 \quad (\text{normalt ärvärde } \theta_{20} = 40^\circ \text{ C})$$

– Ideal blandning

$$-q_1 = q_2 = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}, V = 1 \text{ m}^3, c_p = 4.18 \text{ kJ/kgK}.$$

- a) Bestäm lämpligt värde på P_0 så att $\Delta P = 0$ i arbetspunkten.
- b) Rita blockschema för systemet med aktuella numeriska värden.
- c) Hur förändras blockschemat om temperaturgivaren inte är ideal utan motsvaras av ett första ordningens system med tidskonstanten $T = 2 \text{ s}$? Har temperaturgivarens överföringsfunktion någon praktisk betydelse i detta fall?

4.20 (R)



Två rum är åtskilda av en massiv stålvägg med 12 cm tjocklek. I det ena rummet varierar temperaturen ($u \text{ }^\circ\text{C}$) medan temperaturen i det andra är approximativt konstant ($= 0 \text{ }^\circ\text{C}$).

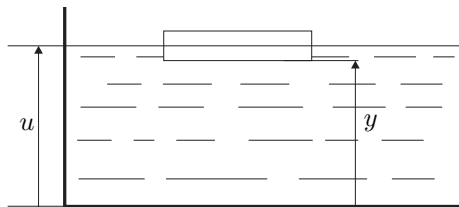
För att få en förenklad dynamisk modell av det termiska energiflödet mellan rummen delas väggen in i tre skikt enligt figuren, med antagen konstant temperatur inom varje skikt $x_1(t) \text{ }^\circ\text{C}$, $x_2(t) \text{ }^\circ\text{C}$ och $x_3(t) \text{ }^\circ\text{C}$.

Energiflödet mellan omgivningen och ytskikten bestäms av värmeövergångstalet, medan flödet mellan angränsande skikt bestäms av materialets värmekonduktivitet.

Ställ upp en tillståndsmodell (A, B, C) för systemet, där utsignalen $y(t)$ är den till det nollgradiga rummet strömmande effekten per väggareaenhet [kW/m^2]. Numeriska värden på vissa aktuella konstanter är:

$$\begin{aligned} \rho &= 7\,500 \text{ [kg/m}^3\text{]} && \text{(densitet)} \\ c &= 0.5 \text{ [kJ/(kg K)]} && \text{(värmekapacitivitet)} \\ \alpha &= 0.1 \text{ [kJ/(m}^2 \text{ s K)]} && \text{(värmeövergångstal)} \\ \lambda &= 0.08 \text{ [kJ/(m s K)]} && \text{(värmekonduktivitet,} \\ &&& \text{motsvarande värmegenomgång: } \lambda/d\text{).} \end{aligned}$$

4.21 (R)



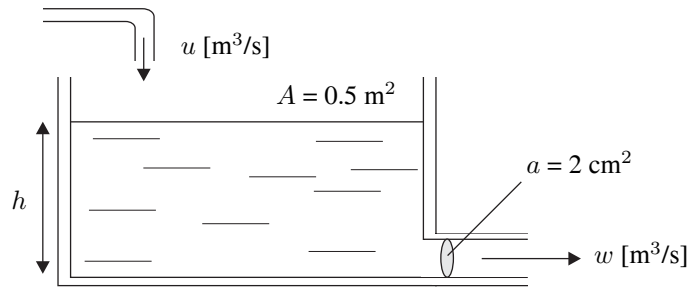
Som nivågivare i en vätsketank används en flottör med arean A , höjden h och densiteten lika med halva vätskedensiteten, som är ρ . Förutom av “lyftkraften” (enligt Arkimedes princip lika med vikten av den undanträngda vätskemängden) påverkas flottören av en dämpkraft proportionell mot den relativa hastigheten mellan flottören och vätskan, och motriktad denna. Proportionalitetskonstanten är c [Ns/m].

- Ställ upp den differentialekvation som beskriver det dynamiska sambandet mellan flottörens position y och vätskenivån u .
- Antag att systemet befinner sig i vila. Härled ett (statiskt) samband mellan jämviktsnivåerna y_0 och u_0 samt flottörens höjd h .
- Antag att små variationer från jämviktsläget förekommer, dvs att $y = y_0 + \Delta y$ och $u = u_0 + \Delta u$. Ställ upp överföringsfunktionen från nivåändringen Δu till motsvarande flottörförflyttning Δy .

4.22 (R) Figuren på nästa sida visar en vattentank med inflödet u och utflödet w . Enligt Bernoullis ekvation gäller att

$$\rho gh = \frac{\rho v^2}{2}$$

där ρ = vattnets densitet [kg/m^3], och v = vattnets utströmningshastighet [m/s]



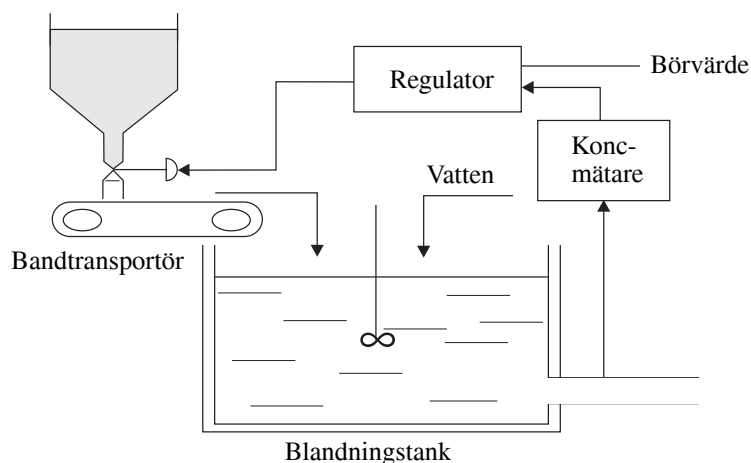
- a) Bestäm differentialekvationen för sambandet mellan inflödet u och vattennivån h .
- b) Linjärisera ekvationen kring arbetspunkterna $h_0 = 0.4$ m och $h_0 = 0.8$ m. Bestäm sedan motsvarande linjäriserade överföringsfunktioner. Hur påverkas systemets linjäriserade tidskonstant av höjden h_0 ?

4.23 (R) Figuren nedan visar ett system för koncentrationsreglering. Blandningstanken med volymen 0.5 m^3 matas dels med vatten med konstant flöde $0.1 \text{ m}^3/\text{min}$, och dels med ett pulverformigt material av varierande sammansättning. Genom styrning av matningsventilens öppning vill man åstadkomma en konstant koncentration $[\text{g}/\text{m}^3]$ i utflödet från tanken. Eftersom pulvermängden är relativt liten påverkas ej den totala volymen av pulvertillförseln.

Processen regleras med en PI-regulator, vars överföringsfunktion är

$$F_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

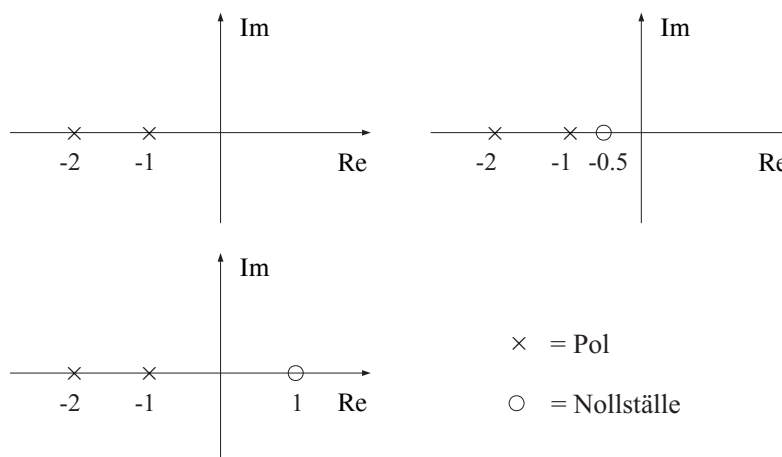
Bandtransportören motsvarar en tidsfördröjning på 2 minuter. Rita blockschema över systemet och ange de olika blockens överföringsfunktioner.



- 4.24 (I)** Redogör för skillnaden mellan intensitetsbalanser och flödesbalanser, samt några typiska exempel av vardera slaget.
- 4.25 (I)** Visa principiellt hur man tar fram en modell för ett antal massor exempelvis tågagnar som är sammankopplade via fjädrar och dämpare.
- 4.26 (I)** Visa hur en tredje ordningens överföringsfunktion med ett komplexkonjugerat polpar kan realiseras med hjälp av två operationsförstärkare och ett RC-nät, se exempel 4.12 och 4.13.
- 4.27 (I)** Rita elektriska kretsar för de icke-elektriska modellerna i avsnitt 4.8.
- 4.28 (I)** Formulera en modell för seriekopplade värme- alternativt blandningstankar, där även transportfördröjning mellan tankarna ingår. Studera speciellt block-schemat 4.19.

5 Analys och specifikation i tids- och frekvensplanet

- 5.1 (R)** I nedanstående figur visas pol-nollställesdiagram för tre olika system av andra ordningen. Samtliga system har förstärkningen ett vid låga frekvenser.



Beräkna och skissera stegsvaren och impulssvaren för de olika systemen. Hur påverkas resultaten av nollställets placering? Förklara speciellt det egendomliga beteendet då nollstället ligger i högra halvplanet, genom att partialbråksuppdelna motsvarande överföringsfunktion.

- 5.2 (R)** En PI-regulator med utsignalområdet 4-20 mA används för att styra ett ångflöde för uppvärmning av en process. En stegändring av styrsignalen på 4 mA leder vid *manuell* styrning till följande stegsvar (se tabell) för systemet med omvandlare, ventil, process och mätgivare. Mätgivarens arbetsområde är 0-200°C.

Tid (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	20	30	50
Temp (°C)	50	51	54	58	62	65	68	71	73	76	79	80

Ange en överföringsfunktion för processen med omvandlare, ventil och mätgivare. Antag att dynamiken approximativt kan beskrivas som ett första ordningens system med dödtd.

- 5.3 (IR)** Rita Bodediagram för överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{s(1 + s/2)}$$

genom addition av graferna för 5, $\frac{1}{s}$ och $\frac{1}{1 + s/2}$

5.4 (R) Rita Bodediagram för följande överföringsfunktioner

a)
$$G(s) = \frac{2(1 + s/0.5)}{s(1 + s/4)}$$

b)
$$G(s) = \frac{16}{(s + 4)(s^2 + 0.8s + 4)}$$

c)
$$G(s) = \frac{4(s + 0.5)}{s(s + 4)(s^2 + s + 1)}$$

d)
$$G(s) = \frac{2.5}{(s + 0.5)} e^{-0.4s}$$

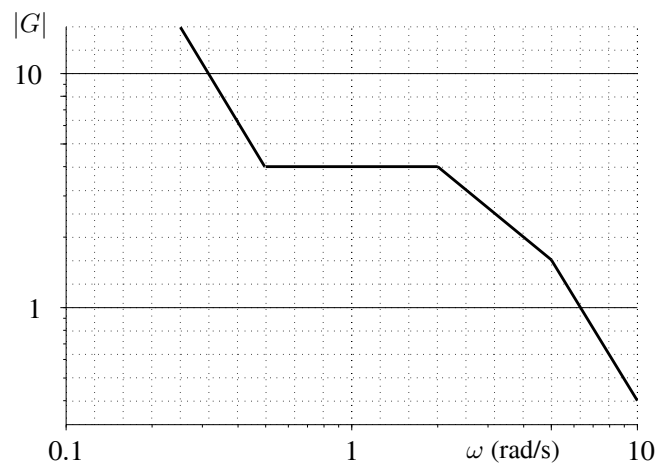
e)
$$G(s) = \frac{10(s + 0.5)}{s^2(s + 5)^2}$$

5.5 (R) Ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)^2}$$

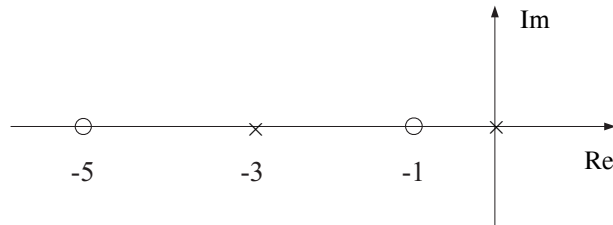
matas med insignalen $u(t) = 3 \sin(2t) - e^{-t} \cos(0.5t)$. Vad blir utsignalen $y(t)$ då alla transienter har dött ut?

5.6 (R)



För en stabil överföringsfunktion $G(s)$ utan dödtid och icke-minfas nollställen gäller ovanstående asymptotiska beloppsskurva. Bestäm $G(s)$.

- 5.7 (R)** Rita Bodediagrammet för ett system med nedanstående pol-nollställesdiagram. Högfrekvensförstärkningen är 0.5.



- 5.8 (R)** Överföringsfunktionen för en dödtid e^{-sT_d} kan approximeras med en rationell överföringsfunktion exempelvis Padé-approximationen

$$\frac{1 - sT_d/2}{1 + sT_d/2}$$

Utnyttja denna approximation för modellen

$$G(s) = \frac{e^{-s/3}}{1 + s}$$

och studera avvikelserna mellan den exakta och den approximativa modellens amplitud och fasvridning i ett Bodediagram. Bestäm också stegsvaren för de båda modellerna. Kommentera approximationens giltighet för olika frekvensområden.

- 5.9 (R)** Modellreduktion innebär att en modell av hög ordning approximeras med en modell av låg ordning. Betrakta modellen

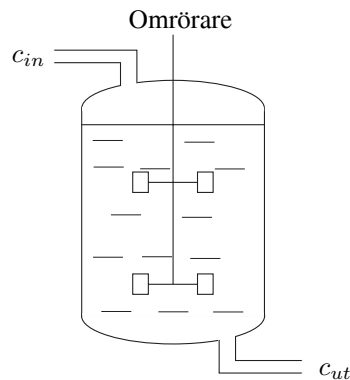
$$G(s) = \frac{8}{(s + 2)^4}$$

Approximera denna modell med överföringsfunktionen

$$\hat{G}(s) = \frac{K}{(1 + Ts)^2}$$

så att lågfrekvensförstärkningen och vinkelfrekvensen vid -90° överensstämmer för dessa modeller. Rita Bodediagram samt skissera stegsvaren för de båda modellerna. Kommentera den approximativa modellens noggrannhet.

- 5.10 (R)** I en anläggning för tillverkning av pappersmassa pumpas en kemikalie mellan två fabriksdelar. På grund av svängningar i reglersystemet varierar koncentrationen kring den önskade nivån ungefär sinusformat. Den mottagande anläggningen kräver små koncentrationsvariationer och man installerar därför en s.k. bufferttank, som utjämnar koncentrationsvariationerna, se figur.



a) Antag att flödet genom tanken (både in och ut) är konstant och lika med q , samt att volymen i tanken är V . Beräkna överföringsfunktionen från koncentrationsvariationen in till tanken c_{in} till dito ut från tanken c_{out} . Tanken antas vara idealt omrörd.

b) Anta att inflödets koncentration varierar som

$$c_{in}(t) = c_0 + 0.2c_0 \sin(\omega t)$$

Ange ett uttryck för utgående koncentration c_{out} som funktion av tiden, vid stationaritet.

c) Hur stor bör tanken vara om utgående koncentrationsvariationer högst får vara $\pm 5\%$. Periodtiden för koncentrationssvängningarna är c :a 1/2 timme och flödet $q = 6 \text{ m}^3/\text{h}$.

5.11 (R) I uppgift 2.21 studeras ett servosystem med en likströmsmotor. Bestäm överföringsfunktionerna $G_{\theta_r, \theta}$ från referenssignalen θ_r till utsignalvinkeln θ samt $G_{\theta_r, u}$ från θ_r till styrsignalen $u(t)$, och välj liksom i uppgift 2.21 regulatorparametrarna K_p och K_d så att slutna systemets poler hamnar i en dubbelpol $s = -\alpha$. Rita ett amplituddiagram för $G_{\theta_r, \theta}$ och $G_{\theta_r, u}$ för $\alpha = 1$ och 5. Vilken motsättning råder mellan ökad bandbredd (snabbhet) och styrsignalaktivitet, då dämpningen är konstant?

5.12 (R) Rita amplituddiagram för följande lågpas- och bandpassfilter, samt ange aktuella bandbredder.

$$G_{LP1}(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

$$G_{LP2}(s) = \frac{1}{1+1.4s+s^2}$$

$$G_{BP}(s) = \frac{4s^2}{(1+s/0.5)^2(1+s/10)^2}$$

Ange en fördel med att introducera komplexkonjugerade poler och nollställen i stället för multipelrötter.

- 5.13 (R,I)** Rita låg- och högfrekvensasymptoterna för $G_{vy}(j\omega)$, $G_{ry}(j\omega)$ och $G_{wu}(j\omega)$ i exempel 5.14. På vilket sätt relaterar dessa asymptoter till processens och regulatorns låg- respektive högfrekvensasymptoter och till kriterierna J_v och J_u ? Hur avgörs systemets dämpning (inga räkningar), och på vilket sätt påverkas den vid förändring av J_v då J_u är konstant?
- 5.14 (I)** På vilket sätt relaterar polplaceringen för ett andra ordningens system till de transienta prestandaparametrarna stigtid, insvängningstid, ekvivalent tidskonstant, maximal relativ översväng och dämpad självsvängningsfrekvens. Ange explicit, i de fall det är möjligt, vad som händer då polerna vandrar i vänstra halvplanet vid konstant imaginärdel, konstant realdel, konstant radie respektive konstant vinkel.
- 5.15 (I)** Relatera begreppen tidskonstant, bandbredd och periodtid ($T_p = 2\pi/\omega$) till varandra, för ett första ordningens system som drivs av en sinussignal med godtycklig frekvens ω .
- 5.16 (I)** Antag att en extra pol respektive ett extra nollställe läggs till en överföringsfunktion $G(s)$. Förklara hur stegsvaret påverkas, genom att betrakta polen respektive nollstället som ett extra filter som seriekopplas med $G(s)$. Förklara speciellt varför nollställen i högra halvplanet ger en undersväng, och på vilket sätt avståndet till origo för polen respektive nollstället (relativt övriga rötter i $G(s)$) påverkar resultatet.
- 5.17 (I)** Ge en enkel fysikalisk förklaring till Bodediagrammet för bilen i exempel 5.4
- 5.18 (I)** Utred med hjälp av den geometriska betraktelsen i avsnitt 5.7
- vilken inverkan poler och nollställen har på frekvensfunktionen, då dessa ligger nära varandra relativt avståndet till imaginäraxeln (nästan pol-nollställeskancellation).
 - företeelserna resonans och antiresonans i ett Bodediagram.
 - Bodediagrammet för den instabila processen $1/(s - 1)$.
 - Bodediagrammet för icke-minimumfas processen $(1 - s)/(1 + s)^2$.
- 5.19 (I)** Varför är inte följande överföringsfunktioner minimumfasset? $1/(s - 1)$, $(1 - s)/(1 + s)^2$, e^{-s} . Bestäm motsvarande minimumfasöverföringsfunktion som har samma belopp.

- 5.20 (I)** Vilka fördelar och nackdelar har Padéapproximationen då den approximerar en dödtidsprocess. Hur lång får dödtiden högst vara då man önskar en god approximation upp till 5 rad/sek vid första respektive andra ordningens Padé-approximation.
- 5.21 (I)** På vilket sätt relateras PI-regulatorns parametrar till förmågan att kompensera processtörningar och regulatorns styrsignalaktivitet.

6 Stabilitet och stabilitetsmarginaler

6.1 (IR) Beräkna och skissera impulsfunktionssvaren för

$$G(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \quad \text{för } a = -1, 0, 1$$

För vilka värden på a är systemet stabilt?

6.2 (R) Ett dynamiskt system beskrivs av följande kopplade differentialekvationer

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2u \\ \dot{y} &= y - x + u \end{aligned}$$

Bestäm motsvarande överföringsfunktion från u till y . Är systemet stabilt?

6.3 (IR) Ett system har karakteristiska ekvationen

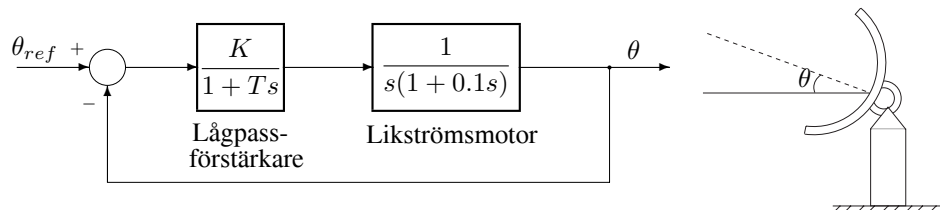
- $s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$
- $s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 10 = 0$
- $s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 12s + 10 = 0$

Utred stabiliteten med hjälp av Routh-Hurwitz stabilitetskriterium.

6.4 (IR) Bestäm med hjälp av Routh-Hurwitz kriterium K_p så att amplitudmarginalen blir $A_m = 2.5$, då kretsöverföringen är

$$L(s) = \frac{K_p}{(s+1)^3}$$

6.5 (R) Ett servosystem för en radarantenn består bl.a. av en likströmsmotor och en förstärkning K . På grund av begränsad snabbhet hos de ingående komponenterna ingår i modellen för förstärkaren en lågpasfilterande länk. En lång tidskonstant T motsvaras av en långsam förstärkare medan en kort tidskonstant representerar en snabb förstärkare med brett frekvensområde.



Dimensionera förstärkningen K så att amplitudmarginalen för det återkopplade systemet blir $A_m = 2$, dvs se till att K kan ökas med en faktor 2 innan

systemet blir instabilt. Ange speciellt vad som händer med K då T är mycket stor respektive mycket liten.

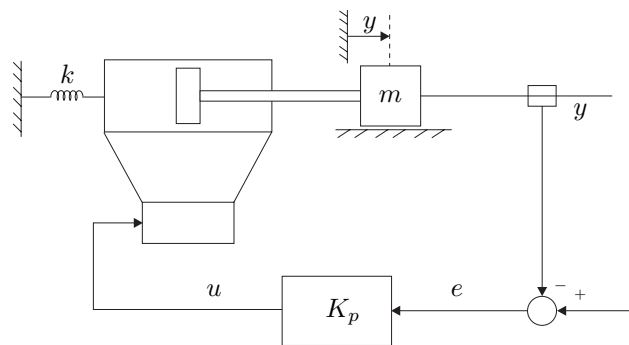
- 6.6 (R)** Den friktionsfritt rörliga massan m styrs av en hydraulkolv i nedanstående positionsservo. Man dimensionerade servokretsen utan att beakta fjädningen k , som alltså avsågs oändligt styv, $k = \infty$. Den beräknade öppna kretsöverföringen var

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = L(s) = \frac{50}{s(1 + 0.02s)}$$

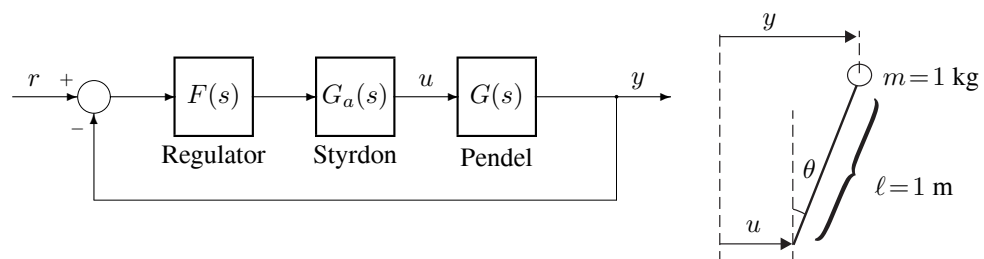
I verkligheten blev den

$$L(s) = \frac{50}{s(s^2/\omega_n^2 + 0.02s + 1)}$$

där $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (cylinders vikt försummad). Beräkna hur hög den odämpade resonansfrekvensen ω_n minst måste vara för att fjädningen inte skall leda till instabilitet.



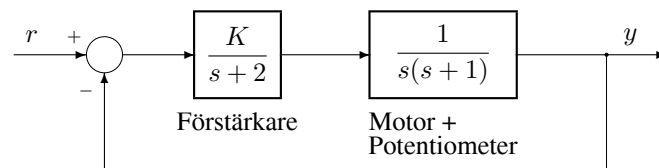
- 6.7 (R)** En inverterad pendel balanseras genom styrning av upphängningspunkten u . Läget y mäts optiskt och återkopplas enligt ovanstående blockschema. Styrdonet som används för styrning av u är så snabbt att dess överföringsfunktion kan sättas till $G_a(s) = 1$.



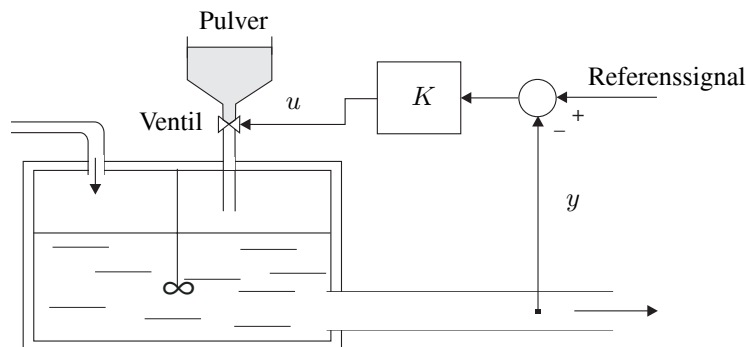
- Bestäm överföringsfunktionen för pendeln $G(s)$ under antagandet att stavens massa kan försummas och att vinkeln θ är liten. Beräkna polerna för $G(s)$, och ange den inverterade pendelns dynamiska karaktär.
- Bestäm parametrarna K_p och T_d i regulatorn $F(s) = K_p(1 + T_d s)$ så att det återkopplade systemets poler får en dämpning $\zeta = 0.7$, och att amplitudmarginalen blir $A_{min} = 0.5$.
- Vad gäller allmänt för amplitudmarginalen vid reglering av denna typ av process.

6.8 (R) Figuren nedan visar blockschemat för en potentiometerskrivare. Referenssignalen r [V] utgörs av den mätsignal som skall registreras. Utsignalen (pensnans position) omvandlas till en spänning med hjälp av en linjär potentiometer i skrivaren (därför namnet potentiometerskrivare).

Det är önskvärt att skrivaren skall kunna följa en referenssignal som växer linjärt med hastigheten 0.2 V/s med ett stationärt fel som är mindre än 10 mV. Kan detta uppnås genom att ställa in lämpligt värde på förstärkningen K ? För vilka värden på K är systemet stabilt?



6.9 (R)



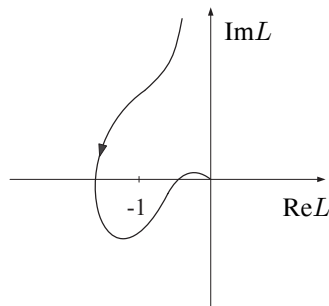
För ovanstående koncentrationsprocess gäller att överföringsfunktionen är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{1 + 5s}$$

Koncentrationen skall regleras med en proportionell regulator med förstärkningen K . Givaren som mäter koncentrationen kan antas vara av ideal typ.

Hur stor förstärkning kan tillåtas i regulatorn innan systemet blir instabilt? Kommentera möjligheterna att utnyttja Routh-Hurwitz' metod alt. polbestämning vid stabilitetsanalysen.

- 6.10 (R)** En kretsöverföring representeras av nedanstående Nyquistkurva. Öppna systemets poler ligger inte i högra halvplanet. Bestäm med hjälp av detta diagram reglerketsens stabilitet och antalet integrationer i kretsöverföringen då kretsförstärkningen är positiv. Jämför Nyquists förenklade kriterium med det fullständiga Nyquistkriteriet.



- 6.11 (R)** Skissera Nyquists kontur i $L(s)$ -planet för kretsöverföringarna

a) $L(s) = \frac{4}{(s-1)(s+2)}$

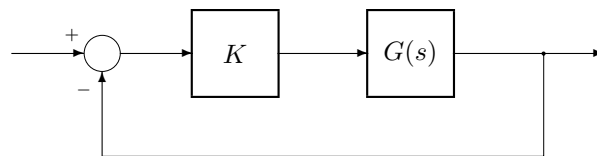
b) $L(s) = \frac{s+2}{s(2-s)}$

c) $L(s) = \frac{1}{s^3(1-s)}$

Avgör systemens stabilitet med hjälp av Nyquists fullständiga kriterium. Notera att då Nyquists kontur i s -planet passerar origo gäller i fallen b) och c) att

$$s = re^{j\theta} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad r \ll 1$$

- 6.12 (R)**

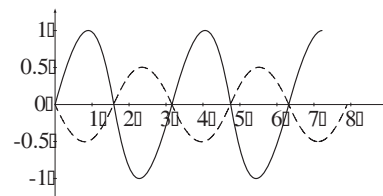
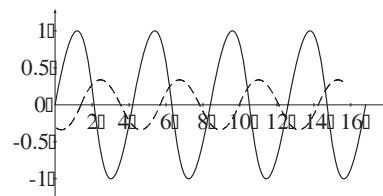
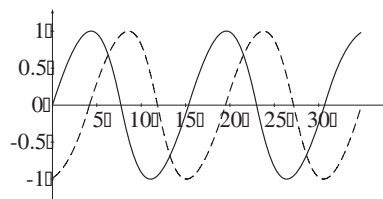


Undersök med hjälp av Nyquistkriteriet för vilka värden på förstärkningsparametern K som det återkopplade systemet är stabilt då

$$G(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}$$

Jämför med Routh-Hurwitz stabilitetskriterium. Vilka värden på K är acceptabla då en minimal och maximal amplitudmarginal $A_{min} = 0.5$ respektive $A_{max} = 2$ efterfrågas?

- 6.13 (R)** En labprocess exciterades med hjälp av sinussignaler med amplituden ett och frekvenserna $\omega_1 = 0.4$ rad/s, $\omega_2 = 1.5$ rad/s och $\omega_3 = 2$ rad/s. In- och utsignalerna plottades efter att transienterna hade dött ut (insignal heldragen linje). Man kan anta att kretsöverföringen inte har några poler i högra halvplanet, och att processen regleras med en P-regulator $K_p = 1$. I alla tre fallen observerade man en negativ fasförskjutning på maximalt -180 grader. Baserat på informationen från dessa plottar, kommer det återkopplade systemet att bete sig stabilt? Och om så är fallet, vilka stabilitetsmarginaler gäller?



- 6.14 (R)** Vid analys av dynamiska system utgår man i allmänhet från att överföringsfunktioner har rationella och ändliga täljar- och nämnarpolynom. Eftersom Laplacetransformen för dödtid ej kan beskrivas på detta sätt, införs ofta den så kallade Padéapproximationen för att modellera dödtidsprocesser. I denna uppgift ska vi undersöka hur denna approximation påverkar stabiliteten för ett återkopplat system. Utgå från följande kretsöverföring med dödtid

$$L(s) = \frac{0.3e^{-2s}}{1 + 0.3s}$$

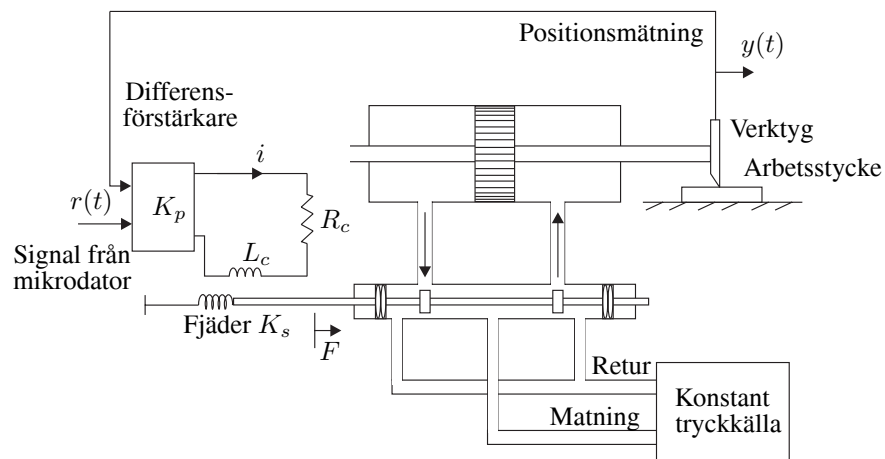
- a) Vi använder oss av en första ordningens Padéapproximation och ersätter döttidsfaktorn med

$$\frac{2 - T_d s}{2 + T_d s}$$

där T_d betecknar döttiden. Bestäm amplitudmarginalen A_m för det återkopplade systemet med Padéapproximation, baserat på Routh-Hurwitz' kriterium.

- b) Beräkna amplitudmarginalen A_m för det verkliga systemet med döttid och jämför med marginalen i uppgift a). Kommentera resultatet.

6.15 (R) En numeriskt styrd verktygsmaskin får kommandosignal (referenssignal) från en mikro dator. Systemet enligt figur studeras i en dimension $y(t)$.



För differentialförstärkaren (P-regulator) gäller att utsignalen

$$U(s) = K_p[R(s) - Y(s)]$$

där $K_p = 0.2$, och solenoidkretsen har överföringsfunktionen

$$\frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R_c + sL_c}$$

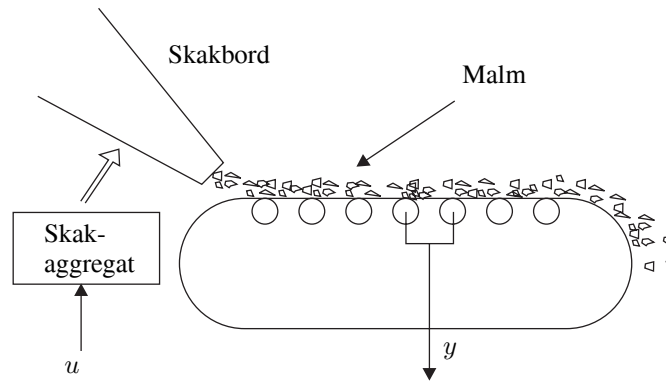
där $R_c = 0.1 \Omega$ och $L_c = 0.2 \text{ H}$. Kraften F på den nedre axeln (magnetspole) antas vara proportionell mot strömmen, d.v.s. $F(t) = K_2 i(t)$ där $K_2 = 3.0$. Antag också att överföringen från kraften $F(t)$ till utsignalpositionen $y(t)$ är

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{K_a}{s(1 + sT_a) + K_s}$$

där $T_a = 0.5 \text{ s}$, $K_a = 1.0$ och $K_s = 2.0$ (fjäderkonstant)

Rita Bodediagram för den öppna kretsöverföringen och bestäm fasmarginalen φ_m , samt uppskatta stigtiden t_r med hjälp av överkorsningsfrekvensen ω_c .

6.16 (R)



Påmatningen av krossad malm på ett transportband styrs genom att variera frekvensen hos ett skakbord, som ger ett viktsflöde ungefär proportionellt emot styrstorheten u . Viktsflödet mäts sedan med en bandvåg, som ger utstorheten y . Överföringsfunktionen anses vara

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = K e^{-sT_d}$$

med $T_d = 10$ sek och $K = \Delta y / \Delta u = 200$ kg/sek. En I-regulator, $F(s) = K_i / s$, skall styra u så att y regleras mot ett referensvärde r .

Bestäm högsta värde på regulatorkonstanten K_i som uppfyller stabilitetsmarginalerna $\varphi_m \geq 40^\circ$, $A_m \geq 2.5$ gånger (fas- och amplitudmarginal).

6.17 (R) Visa följande samband, då kretsöverföringen $L(s)$ saknar poler i högra halvplanet.

a) $|S(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\varphi_m/2)}$

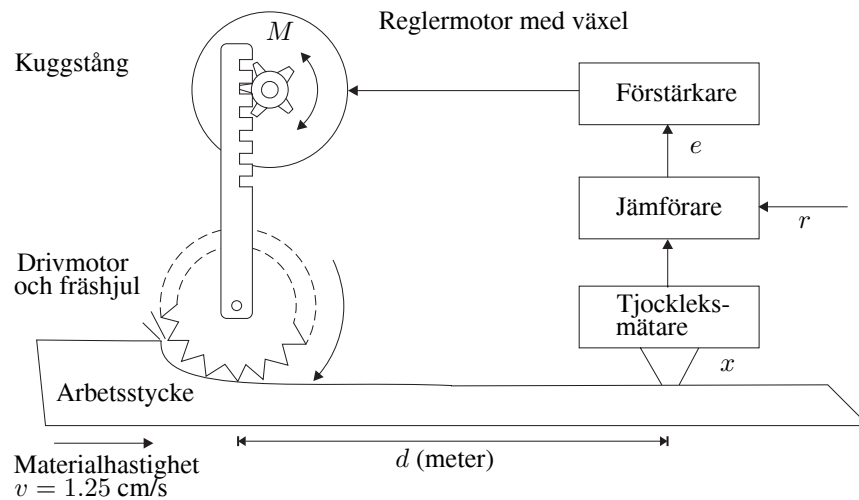
b) Maximering av minsta avståndet från $L(j\omega)$ till punkten -1 motsvaras av att minimera $\max_\omega |S(j\omega)|$.

c) Då $L(j\omega)$ passerar innanför enhetscirkeln med centrum i punkten -1 gäller att $\max_\omega |S(j\omega)| > 1$ och $\varphi_m < 60^\circ$. Då tvärtom $\max_\omega |S(j\omega)| \leq 1$ gäller att $\varphi_m \geq 60^\circ$ och $A_m = \infty$.

- 6.18 (R)** Figuren visar en fräs med automatisk reglering av tjockleken. Fräshjulet höjs och sänks med hjälp av reglermotorn M och tjockleken x mäts med en givare placerad d meter från fräshjulet. Överföringsfunktionen från felet $e(t)$ till fräshjulets vertikala rörelse är

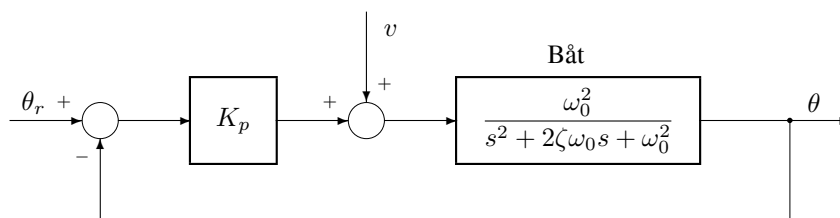
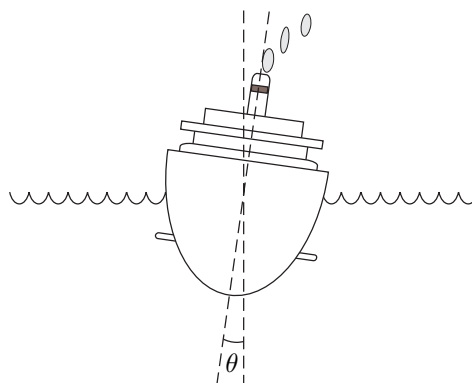
$$\frac{0.1}{s(1 + 0.1s)}$$

Det visar sig att systemet blir instabilt om avståndet d görs alltför stort. Bestäm det största avståndet d för vilket det återkopplade regelsystemet är stabilt.



7 Principer för dimensionering av regulatorer I: Prestanda

- 7.1 (R)** Figuren visar ett system för stabilisering av båtar i sjögång. Störningen $v(t)$ representerar det vridande moment, som vågorna utövar på båten. Bestäm den förstärkning K_p , som för lågfrekventa störningar reducerar rullningen från 20° utan reglering till 0.4° med reglering. Antag att kretsöverföringen är mycket stor vid dessa låga frekvenser.

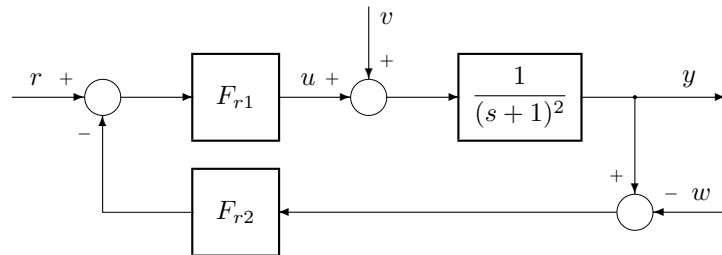


- 7.2 (R)** Antag att kretsöverföringen för ett system är

$$L(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

Bestäm K så att inverkan från en laststörning v på den reglerade utsignalen y för $\omega \leq 0.5$ rad/sek reduceras med minst en faktor 3 för det återkopplade systemet jämfört med det öppna systemet. Inverkan från mätbruset w på den reglerade utsignalen y skall samtidigt reduceras med en faktor 4 eller mer för $\omega \geq 3$ rad/sek, jämfört med mätbrusnivån i den uppmätta utsignalen y_m utan återkoppling. Angående signalbeteckningar se läroboken fig. 7.3.

7.3 (R)



Reglersystemet i ovanstående figur skall analyseras då det utsätts för olika typer av excitation. Tre styrstrategier jämförs, P-reglering, PI-reglering och öppen styrning.

- | | | | |
|-----|--------------------------------|--------------|------------------|
| I | $F_{r1} = 7$ | $F_{r2} = 1$ | (P-regulator) |
| II | $F_{r1} = 1.4 \frac{(s+1)}{s}$ | $F_{r2} = 1$ | (PI-regulator) |
| III | $F_{r1} = 1$ | $F_{r2} = 0$ | (Öppen styrning) |

P- och PI-regulatorerna är inställda så att fasmarginalen $\varphi_m = 45^\circ$. Rita låg- och högfrequens asymptoterna för följande överföringsfunktioner i ett amplituddiagram

- känslighetsfunktionen $S = 1/(1 + L)$ (L =kretsöverföringen)
- komplementära känslighetsfunktionen $T = L/(1 + L)$
- störkänslighetsfunktionen $GS = G/(1 + L)$ (G =processmodell)

Uppskatta utifrån dessa diagram det stationära reglerfelet (amplituden) för de tre styrstrategierna vid följande typer av excitation

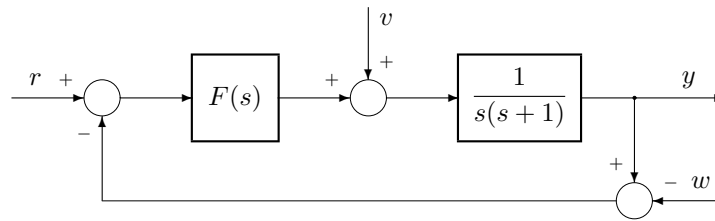
- a) $v =$ enhetssteg
- b) $v = \sin(\omega t)$ där $\omega = 0.05, 20$
- c) $w = \sin(\omega t)$ där $\omega = 0.05, 20$
- d) $r =$ enhetssteg
- e) $r = \sin(\omega t)$ där $\omega = 0.05, 20$

Vilka slutsatser kan man dra av denna analys vid en jämförelse mellan de tre styrstrategierna?

7.4 (R)

Figuren på nästa sida beskriver ett servosystem för positionering av en last. Systemets förmåga att hantera referenssignalvariationer, last- och mätstörningar skall undersökas. En P-regulator $F(s) = K_p$ undersöks därför med olika förstärkningsnivåer $K_p = 0.25, 1$ och 4 .

- a) Rita ett Bodediagram för kretsöverföringen $L(j\omega)$ och studera fasmarginalen φ_m och överkorsningsfrekvensen ω_c för de tre förstärkningsnivåerna. Vilken allmän relation råder mellan K_p , φ_m och ω_c .

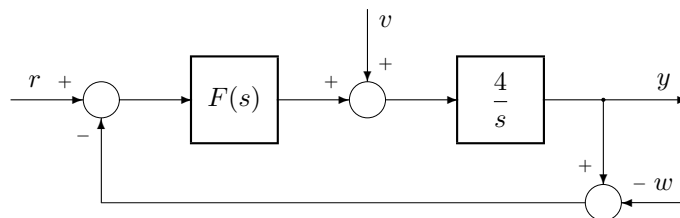


b) Rita amplitudkurvas låg- och högfrekvensasymptoter för känslighetsfunktionen $S = 1/(1+L)$, komplementära känslighetsfunktionen $T = L/(1+L)$, störkänslighetsfunktionen $GS = G/(1+L)$ (G =processmodell) och styrkänslighetsfunktionen $FS = F/(1+L)$. Vilken relation råder mellan förstärkningen K_p och

- förmågan att följa referenssignaländringar $r(t)$
- förmågan att kompensera processtörningar $v(t)$ och mätstörningar $w(t)$
- styrsignalaktiviteten $u(t)$

c) Bestäm slutna systemets polplacering. Vad blir den relativa dämpningen ζ för de olika förstärkningarna? Kommentera kopplingen mellan dämpning och fasmarginal. Vilken relation råder mellan snabbheten för slutna systemets stegsvar från r till y och överkorsningsfrekvensen ω_c ?

7.5 (R)



Ovanstående integralprocess skall regleras med en PI-regulator $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$.

- Bestäm ett samband mellan K_p och K_i som ger en polplacering med ett komplexkonjugerat polpar motsvarande en relativ dämpning $\zeta = 0.7$. Vad blir fasmarginalen φ_m ?
- Bestäm för lämpliga frekvensfunktioner deras låg- eller högfrekvensasymptot, för att studera reglersystemets förmåga att följa referenssignaländringar, kompensera process- och mätstörningar samt styrsignalaktiviteten.

- c) Studera $1/K_i$ som funktion av K_p . På vilket sätt relaterar detta samband till föregående deluppgift. Vilka slutsatser kan vi dra angående den föreslagna reglerstrategin?

7.6 (R) En första ordningens process

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

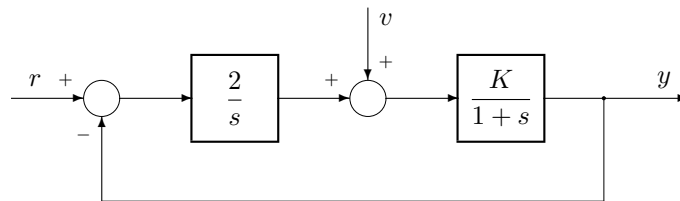
skall regleras. De tre regulatorerna

$$F_I(s) = \frac{0.7}{s} \quad F_{PI}(s) = 5 \frac{s+5}{s} \quad F_{PI_f}(s) = 6 \frac{s+1}{s(s+3)}$$

jämförs. Den tredje regulatorn kan ses som en PI-regulator i serie med ett lågpasfilter. De tre regulatorerna är inställda så att fasmarginalen $\varphi_m = 60^\circ$.

Utred de tre regulatorernas egenskaper för denna enkla process genom att bestämma låg- eller högfrekvensasymptot för lämpliga frekvensfunktioner. Studera reglersystemets förmåga att följa referenssignaler, kompensera process- och mätstörningar samt styrsignalaktiviteten. Notera speciellt skillnaderna i erhållen bandbredd. Vilka positiva och negativa egenskaper har respektive regulator?

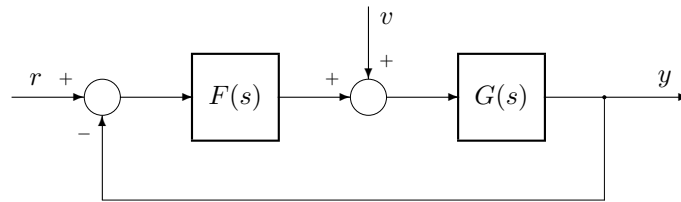
7.7 (R)



Kompensering av processtörningen v vid förstärkningsvariationer i processen skall studeras med och utan återkoppling.

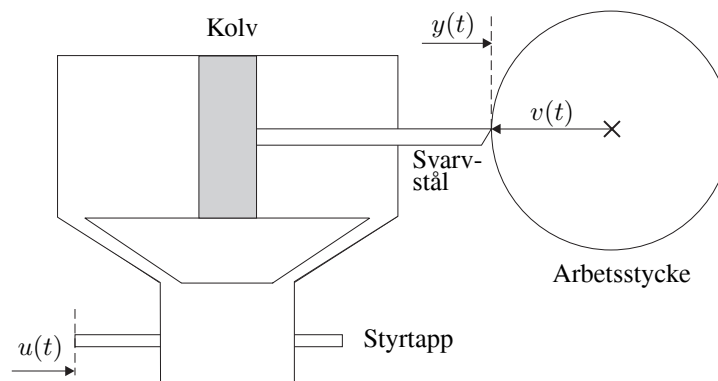
- Rita $|Y(j\omega)|/|V(j\omega)|$ för ovanstående återkopplade reglersystem då $K = 1$ och 2 . Jämför med fallet utan återkoppling. Rita asymptoter om du saknar datorverktyg.
- För vilka frekvenser ger återkopplingen bättre kompensering jämfört med det öppna systemet? Vad gäller för känslighetsfunktionen $S(j\omega)$ i detta frekvensområde? Hur påverkas resultatet av processens förstärkningsvariation?

7.8 (R) Betrakta reglersystemet enligt figuren nedan.

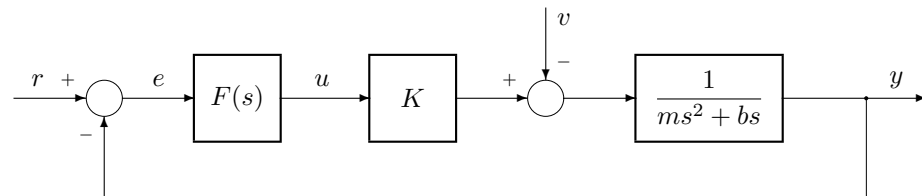


- Visa hur känslighetsfunktionen $S(s)$ uttrycker minskningen av störningens inverkan på det återkopplade systemet relativt det icke återkopplade systemet (dvs med $F(s) = 0$).
- Visa att det återkopplade systemet ger bättre kompensering av störningen än det icke återkopplade systemet för alla frekvenser ω om Nyquistkurvan för kretsöverföringen ligger utanför en cirkel med medelpunkt i -1 och med radien 1. För vilka typer av processer är detta möjligt?

7.9 (R) Svarvstålet i en automatsvarv positioneras med hjälp av ett hydraulservo.



Hydraulservots uppgift är att balansera skärkraften $v(t)$ så att önskad position hos svarvstålet $y(t)$ erhålls. Det principiella utseendet för det återkopplade servosystemet ges i följande figur (jfr uppgift 4.14).

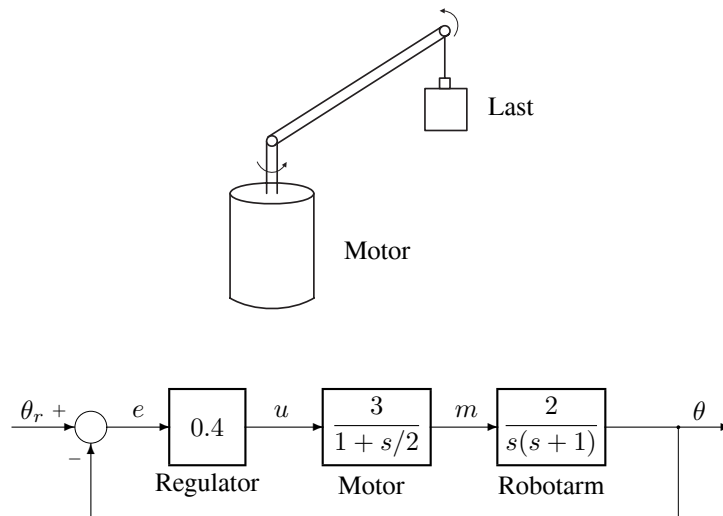


Beräkna kvarstående felet vid konstant skärkraft $v(t) = v_0$ då följande regulatorer används:

a) $F(s) = K_p$ (P-regulator)

b) $F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$ (PI-regulator)

- 7.10 (R)** Figuren och blockschemat nedan beskriver ett system för positionering av en robotarm. Beräkna hur stort det kvarstående felet blir då robotarmen skall följa en referenssignal, som växer linjärt med hastigheten 30 grader per sekund.



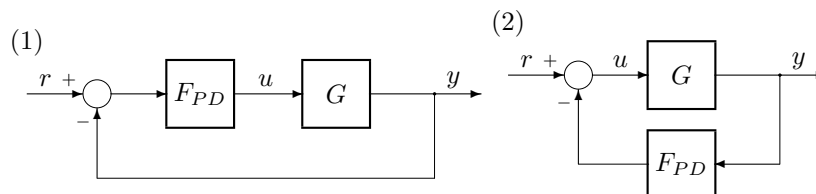
- 7.11 (R)** Vid attitydreglering av en raket i vakuum blir processmodellen i linjäriserad form en dubbelintegral,

$$G(s) = \frac{2.5}{s^2}$$

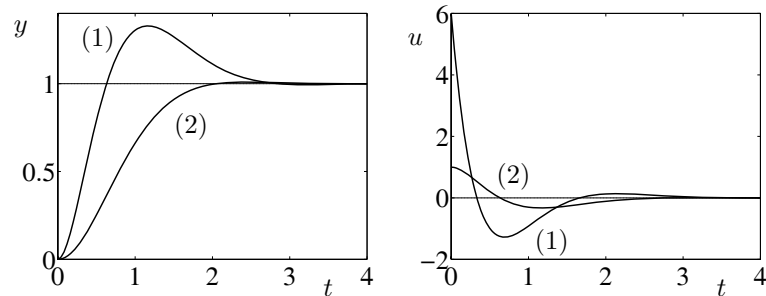
För att reglera denna process införs ett kompenserande filter i form av en PD-regulator (se kapitel 8).

$$F_{PD}(s) = \frac{1+s}{1+s/6}$$

Kompenseringslänken kan placeras enligt följande två alternativ



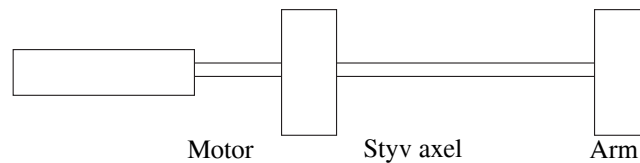
Utsignalen $y(t)$ och styrsignalen $u(t)$ för de återkopplade systemen vid en stegändring $r(t) = \sigma(t)$ ges i följande diagram.



- Beräkna slutna systemets överföringsfunktion i de båda fallen. Vad är orsaken till översvingen i det första fallet?
- Beräkna kvarstående felet för de båda fallen då referenssignalen $r(t) = t$.

Kommentera placeringen av kompenseringslänken med avseende på steg- och rampsvar.

7.12 (R) Figuren visar en enkel modell av en industrirobot i en frihetsgrad.



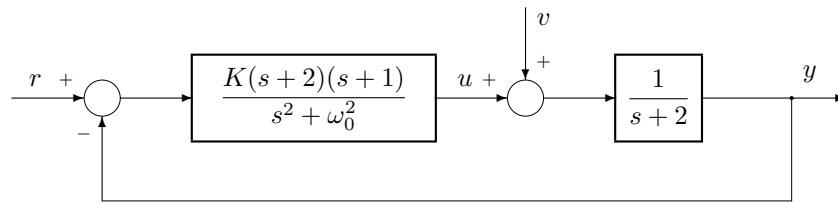
Systemet kan förenklat beskrivas av ekvationen

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_m I$$

där ω är vinkelhastigheten, I är motorströmmen, J är summan av motorns och axelns tröghetsmoment, samt k_m är en motorkonstant. Följande parametervärden gäller: $k_m = 0.5 \text{ Nm/A}$, $J = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/s}^2$.

- Man vill att roboten skall kunna följa en vinkelhastighetsreferens ω_r , som växer linjärt med 1 rad/s^2 , med ett stationärt fel som är mindre än 0.05 rad/s . Visa hur detta kan uppnås genom att återkoppla vinkelhastigheten med en proportionell regulator, vars utsignal styr motorströmmen. Vilken förstärkning erfordras?
- För att eliminera det stationära felet vid rampformade vinkelhastighetsreferenser, utökas regulatorn med en integralterm. Beräkna de parametervärden för den så erhållna PI-regulatorn, som uppfyller (i) att regulatorns högfrekvensförstärkning bibehålls från uppgift a) och (ii) att det slutna systemet får en relativ dämpning på ca 0.7.

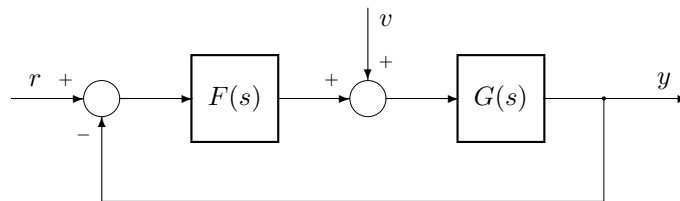
7.13 (R)



En första ordningens process utsätts för intensiva lågfrekventa störningar kring frekvensen ω_0 . Enligt den interna modellprincipen införs därför en resonans i regulatormen vid denna frekvens (oändlig förstärkning vid ω_0).

Bestäm förstärkningen K så att det återkopplade systemet får en dubbel-pol (kritisk dämpning). Skissera speciellt $|G_{ry}(j\omega)|$, $|G_{vy}(j\omega)|$ och $|G_{ru}(j\omega)|$ då $\omega_0 = 0.2$

7.14 (R)



Antag att processen $G(s)$ innehåller en integration, d.v.s. $G(s) = \frac{K}{s} \bar{G}(s)$ där $\bar{G}(0) = 1$. Bestäm och rita låg- och högfrekvensasymptoterna för kretsöverföringen $L = GF$, känslighetsfunktionen $S = 1/(1 + L)$, komplementära känslighetsfunktionen $T = L/(1 + L)$, styrkänslighetsfunktionen $FS = F/(1 + L)$ och störkänslighetsfunktionen $GS = G/(1 + L)$ då

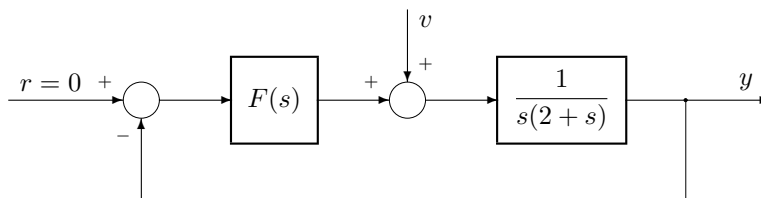
$$\text{a) } F(s) \rightarrow \begin{cases} K_p & \text{när } \omega \rightarrow 0 \\ K_\infty & \text{när } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{b) } F(s) \rightarrow \begin{cases} \frac{K_i}{s} & \text{när } \omega \rightarrow 0 \\ K_\infty & \text{när } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Vad blir det kvarstående felet för de båda regulator typerna då laststörningen $V(s) = 1/s^\ell$ där $\ell=1, 2$ ($\ell = 1 \leftrightarrow$ steg, $\ell = 2 \leftrightarrow$ ramp).

8 Dimensionering av PID-regulatorer

8.1 (R)



Reglersystemet i ovanstående figur skall vara stabilt med tillfredsställande stabilitetsmarginaler och får högst ha ett kvarstående fel på 0.1 enheter efter en rampstörning $v(t) = 2t$. Ange vilken av följande regulatorer, som kan användas i systemet.

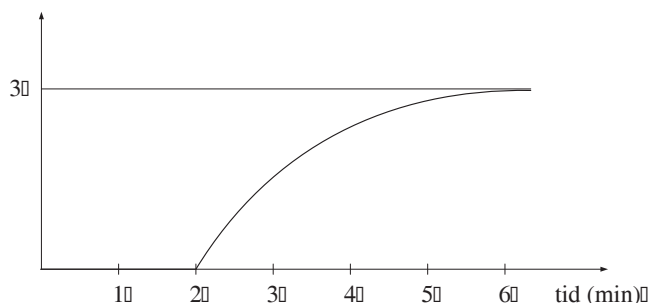
- A: I-reg med $F(s) = \frac{20}{s}$ D: PI-reg med $F(s) = 100 + \frac{20}{s}$
 B: P-reg med $F(s) = 20$ E: I reg med $F(s) = \frac{10}{s}$
 C: P-reg med $F(s) = 200$

8.2 (R) En process bestående av tre seriekopplade nivåtankar har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{(1 + 10s)^3}$$

Dimensionera en PI-regulator för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Välj en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$. Vad blir regulatorns integralförstärkning K_i och högfrequensförstärkning K_∞ ?

8.3 (R,D) För en enkel första ordningens termisk process med transportfördröjning har man mätt upp följande stegsvar:

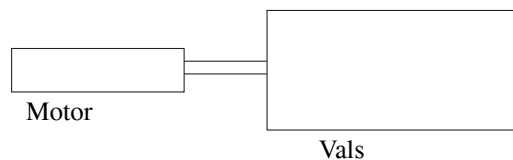


- Dimensionera en PI-regulator så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Starta med en överkorsningsfrekvensen $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$.
- Variera sedan ω_c så att integralförstärkningen K_i maximeras. Vid handräkning studeras fallen $\omega_c = 0.3, 0.4$ och 0.5 .
- Använd rutinen `pi_opt`, se avsnitt 8.9, för att med bivillkoren $M_S \leq 1.7$ och $M_T \leq 1.3$ söka den kombination av ω_c och φ_m som maximerar K_i . Jämför med resultaten i föregående deluppgifter.

- 8.4 (R)**
- Dimensionera en PI-regulator för processen i uppgift 8.2 enligt tabell 8.1 på sid. 346.
 - Vilken typ av experiment behöver genomföras för att bestämma parametrarna $G(0)$, κ_{180} och ω_{G180} i tabell 8.1, då processens överföringsfunktion inte är känd?

- 8.5 (D)** Bestäm för processen i uppgift 8.2 en PI-regulator med hjälp av rutinen `pi_opt`, se avsnitt 8.9. Välj den kombination av ω_c och φ_m som maximerar K_i med bivillkoren $M_S \leq 1.7$ och $M_T \leq 1.3$. Jämför denna PI-regulator med de regulatorer som erhöles i uppgifterna 8.2 och 8.4, vad avser prestanda J_v och stabilitetsmarginal M_S .

- 8.6 (R)** I denna uppgift skall vi studera motordriften av en vals i ett valsverk (se figur).



Systemet kan förenklat beskrivas av ekvationen

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_m - M_l$$

där ω är vinkelhastigheten, J är summan av motorns och valsens tröghetsmoment, samt M_m och M_l är motorns drivande moment respektive lastmoment. Motorns drivande moment ges av $M_m = k_m \cdot I$, där k_m är en motor-konstant och I är motorströmmen. Följande parametervärden gäller: $k_m = 5$ Nm/A, $J = 100$ kg m².

Man vill att valsens vinkelhastighet skall följa en vinkelhastighetsreferens ω_r , och för att uppnå detta återkopplas vinkelhastigheten med en regulator, som styr motorströmmen.

- Dimensionera en lämplig regulator, som uppfyller följande specifikationer:

- i) Vinkelhastighetsreferensen skall följas utan stationärt fel för konstant lastmoment.
 - ii) Ett lastmoment, som växer linjärt med 10 Nm/s skall stationärt ge upphov till ett vinkelhastighetsfel på högst 0.5 rad/s.
 - iii) Det slutna systemet skall ha en relativ dämpning $\zeta = 0.7$.
- b) Vilket allmänt samband råder mellan regulatorns integralförstärkning K_i och dess högfrekvensförstärkning K_∞ då slutna systemet har en konstant relativ dämpning ζ . Skissera $1/K_i$ som funktion av K_∞ för $\zeta = 0.5, 0.7$ och 1.
- c) Tolka resultatet i uppgift b) i termer av prestanda vid kompensering av laststörningen M_l kontra stabilitetsmarginaler, styrsignalaktivitet samt känslighet för mätstörningar.

8.7 (R) En process har överföringsfunktionen

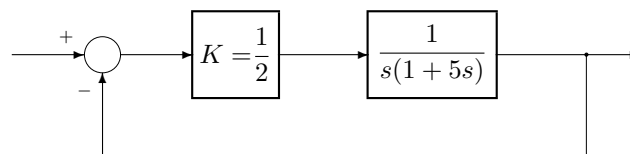
$$G(s) = \frac{0.5}{s(1+2s)^2}$$

För att erhålla önskad snabbhet erfordras en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 0.4$ rad/s för kretsöverföringen $L(s)$. Dimensionera en PD-regulator med maximalt faslyft vid önskat ω_c , så att fasmarginalen blir

- a) $\varphi_m = 45^\circ$
- b) $\varphi_m = 60^\circ$

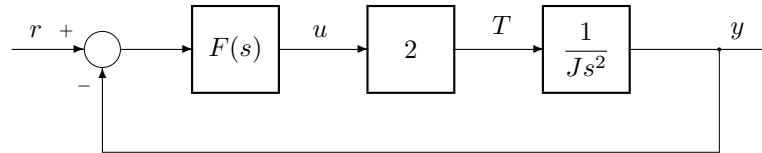
Bestäm regulatorns låg- och högfrekvensförstärkning för de båda fallen och diskutera sambandet mellan prestanda, stabilitetsmarginaler och styrsignalaktivitet.

8.8 (R)



I ovanstående system har en förstärkningsfaktor på 0.5 visat sig ge tillräckliga stabilitetsmarginaler och tillräcklig statisk noggrannhet. Tyvärr är man inte helt nöjd med snabbheten utan önskar öka den med en faktor 5. Visa hur detta kan göras med lämplig regulator. Hur förändras låg- och högfrekvensförstärkningarna vid denna reglerstrategi, jämfört med den enklare P-regleringen.

- 8.9 (R)** När astronauterna Armstrong och Aldrin landsatte mänsklighetens första farkost på månen, hade de god hjälp av ett reglersystem för reglering av attitydvinkeln, se figur. Här är r önskad attitydvinkel, y verklig attitydvinkel, u styrsignal till jetstrålarna och T moment på farkosten. Tröghetsmomentet antas vara $J = 0.25$.



- Vilken av följande regulatorer fungerar för denna typ av process: P- PI- eller PD-regulatorn? Motivering krävs.
 - Dimensionera en regulator, som ger en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 5$ rad/s samt en fasmarginal $\varphi_m = 60^\circ$. Placera regulatorns maximala faslyft vid önskad överkorsningsfrekvens.
- 8.10 (R)** Läsarmen på en hårddisk ska styras med en servomotor. Eftersom motorns tidskonstant är några storleksordningar mindre än läsarmens, ersätts motormodellen med en ren förstärkning. Den förenklade servomotormodellen blir då med tidsenheten millisekunder

$$G(s) = \frac{0.4}{s(1 + 5s)}$$

- Dimensionera en P-regulator som ger det slutna systemet en fasmarginal $\varphi_m = 50^\circ$. Vilken överkorsningsfrekvens ω_c , dämpning ζ , bandbredd ω_b (se (5.41) på sid. 203) och stigtid t_r (se (5.5) på sid. 173) erhålls för det reglerade systemet?
- En bra hårddisk har en stigtid t_r på c:a 2 ms. Dimensionera en PD-regulator som uppfyller detta krav med bibehållen fasmarginal. Välj strategin att kancellera processens tidskonstant med regulatorns nollställe. Bestäm överkorsningsfrekvensen ω_c , dämpningen ζ och bandbredden ω_b för denna reglerstrategi. Hur mycket har regulatorns lågfrekvens- och högfrekvensförstärkning förändrats jämfört med uppgift a).
- Dimensionera nu i stället en regulator med samma överkorsningsfrekvens ω_c och fasmarginal φ_m som i föregående deluppgift, men välj PD-regulatorn så att det maximala faslyftet hamnar vid den önskade överkorsningsfrekvensen. Bestäm regulatorns låg- och högfrekvensförstärkning?

- d) Vad blir det kvarstående felet efter en stegformad referenssignaländring, samt en stegformad laststörning (enhetssteg) som adderas till styrsignalen, för de tre fallen ovan.
- e) Vilka slutsatser kan man dra angående relationen mellan PD-regulatorns låg- och högfrequensegenskaper i förhållande till placeringen av dess centerfrekvens, där det maximala faslyftet inträffar? Studera specifikt kvoten mellan regulatorns låg- och högfrequensförstärkning.

- 8.11 (R)** En viss process har på grund av långa rörledningar en dödtid på cirka 10 sekunder. Processen styrs av en PID-regulator med överföringsfunktionen

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right)$$

Regulatorn har det konstanta referenssignalvärdet 80°C, varvid reglerfelet är approximativt lika med noll. Referenssignalen ändras plötsligt till 90°C. Hur ändras styrsignalens värde omedelbart efter denna referensändring då $T_i = 30$ sek, $T_d = 6$ sek, $T_f = 1$ sek och $K_p = 0.20$. Ange också ett uttryck för denna styrsignalförändring för godtyckliga värden på regulatorparametrarna.

- 8.12 (R)** En regulator ska dimensioneras för den termiska processen med transportfördröjning i uppgift 8.3. Av stegsvaret framgår att överföringsfunktionen är

$$G(s) = \frac{3e^{-2s}}{1 + 2s}$$

- a) Välj en PID-regulator med dubbelnollställe ($\zeta = 1$) så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 50^\circ$. Välj dessutom regulatorns styrsignalaktivitet och överkorsningsfrekvensen ω_c så att $\beta = 10$ och $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$.
- b) Hur stor förbättring i prestanda erhålls med PID-regulatorn jämfört med PI-regulatorn i uppgift 8.3. Hur mycket ökar styrsignalaktiviteten.

- 8.13 (R)** I uppgift 8.2 dimensionerades en PI-regulator för en process bestående av tre seriekopplade nivåtankar med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{5}{(1 + 10s)^3}$$

I denna uppgift ska även derivataverkan introduceras för att öka reglersystemets snabbhet.

- a) Dimensionera en PID-regulator för denna process så att fasmarginalen $\varphi_m = 50^\circ$. Välj ett dubbelnollställe för regulatorn och en överkorsningsfrekvens $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$, samt regulatorns högfrequensförstärkning så att $\beta = 5$.

- b) Genomför samma räkning som i uppgift a) men nu med $\beta = 10$.
- c) Jämför de båda PID-regulatorerna med avseende på prestanda och styrsignalaktivitet med PI-regulatorn i uppgift 8.2. Hur mycket förbättras förmågan att kompensera laststörningar i förhållande till den ökade styrsignalaktiviteten?

8.14 (R) För att hitta lämplig inställning av en PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

för reglering av en process gjordes följande experiment. Först genomfördes ett stegsvar utan återkoppling. En ändring av insignalen med 2 enheter gav då en stationär förändring av processens utsignal på 2.5 enheter.

Därefter återkopplades systemet med en ren P-regulator vars förstärkning K_p ökades långsamt tills dess att reglersystemet började självsvänga. Självsvängningarna inträffade då K_p hade värdet 4.28. Med tidtagarur mätte man samtidigt upp tiden för 20 stycken självsvängningar till 14 minuter och 33 sekunder.

- a) Bestäm med hjälp av ovanstående data en lämplig inställning för en PI- och en PID- regulator enligt tabell 8.1 på sid. 346 (Regulatortidskonstanterna skall anges i sekunder.)
- b) Bestäm integralförstärkningen och högfrekvensförstärkningen för de båda regulatorinställningarna i uppgift a). Tolk resultatet i form av prestanda och styrsignalaktivitet.

8.15 (R) Lämpliga parametrar för en PID-regulator med dubbelnollställe har bestämts på den generella formen

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1 + s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

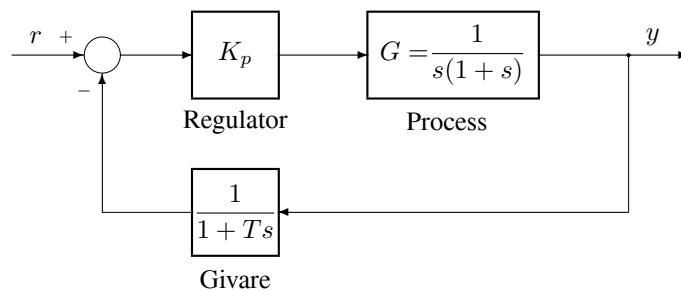
Denna regulator ska nu implementeras som en parallellkoppling på den additiva formen

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_f} \right)$$

Bestäm K_p , T_i , T_d och T_f samt kvoterna $a = T_i/T_d$ och $b = T_d/T_f$ som funktion av parametrarna K_i , τ och β .

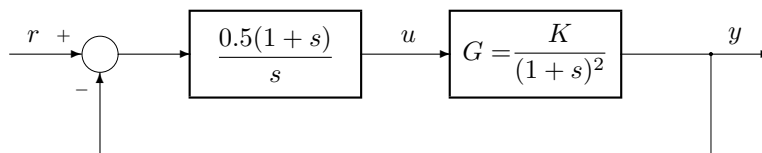
9 Principer för dimensionering av regulatorer II: Robusthet

- 9.1 (R)** Nedanstående blockschema visar ett reglersystem för reglering av en process $G(s)$. I systemet används en proportionell regulator med förstärkningen K_p . Givaren som mäter processens utsignal beskrivs med en första ordningens överföringsfunktion med tidskonstanten T . För regulatorn gäller att $K_p > 1$ och för givaren att $T > 0$.



- Hur lång får givarens tidskonstant maximalt vara om man önskar en amplitudmarginal på minst två gånger, $A_m = 2$? (Bestäm T_{max} som funktion av K_p .)
- Beräkna explicit hur stor tidskonstanten får vara då $K_p = 3$.

9.2 (R)



I ovanstående reglersystem varierar processförstärkningen K . PI-regulatorn är dimensionerad för det nominella värdet $K = 3$, vilket ger en fasmarginal på knappt 45° .

- Undersök baserat på kravet för robust stabilitet, $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$, för vilka värden på K som systemet garanterat är stabilt.
- För vilka värden på K är systemet stabilt enligt Routh-Hurwitz kriterium? Jämför med resultatet i uppgift a) och kommentera olikheterna.

9.3 (R) Ersätt processmodellen i föregående uppgift med

$$G(s) = \frac{3}{(1+s)^2} e^{-sT_d}$$

där den nominella dödtiden $T_d = 0$, dvs samma nominella modell som i föregående uppgift.

Bestäm den största dödtiden T_d som uppfyller det robusta stabilitetskravet $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$, och jämför med den största dödtid T_d som ger ett stabilt återkopplat system enligt Nyquistkriteriet. Kommentera skillnaderna i resultaten.

9.4 (R) För ett system med nollställe i högra halvplanet

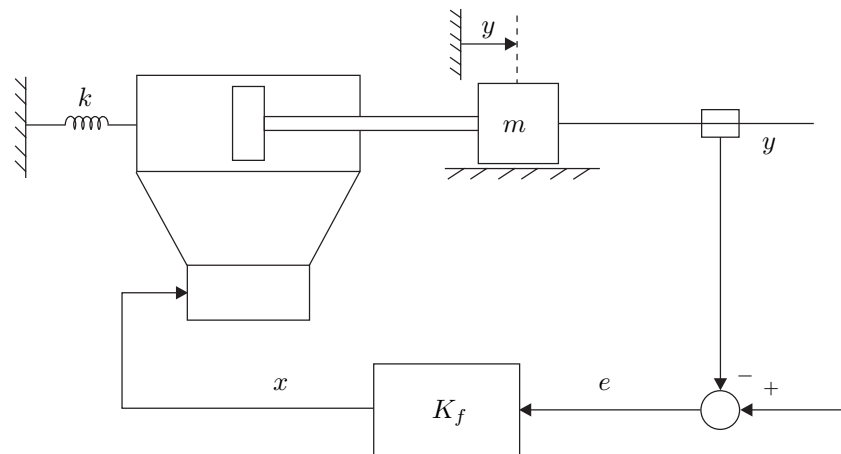
$$G_0(s) = \frac{1 - T_z s}{1 + 5s}$$

ska en PI-regulator dimensioneras baserat på följande förenklade nominella modell

$$G(s) = \frac{1}{1 + 5s}$$

Välj PI-regulatorns nollställe så att systemmodellens pol cancelleras. Vilken största bandbredd för det nominella systemet kan accepteras med bibehållande av det robusta stabilitetskravet $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$?

9.5 (R)



Den friktionsfritt rörliga massan m styrs av en hydraulkolv i ovanstående positionsservo. Servokretsen dimensioneras utan att beakta fjädningen k , som följaktligen antas vara oändligt styv, $k = \infty$. Kretsöverföringen blir då

$$L(s) = \frac{50}{s} \cdot \frac{1}{1 + 0.02s}$$

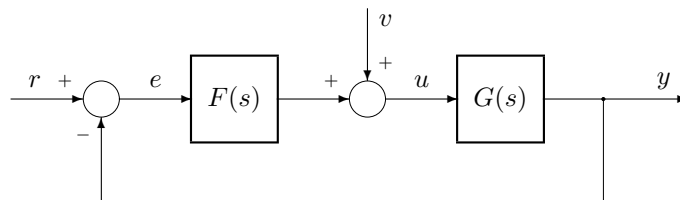
Med hänsyn taget till fjädningen blir i stället kretsöverföringen

$$L_0(s) = \frac{50}{s(1 + 0.02s + (s/\omega_n)^2)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{cylinders vikt försummad})$$

Beräkna hur hög den odämpade resonansfrekvensen ω_n minst måste vara för att fjädningen inte skall leda till instabilitet enligt det robusta stabilitetskriteriet $\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$. Jämför resultatet med uppgift 6.6, där samma problemställning studerades med utnyttjande av Routh-Hurwitz kriterium.

9.6 (R)



Processens dynamik i ovanstående reglersystemet ges av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 0.1s + 1}.$$

Som synes har processen mycket svagt dämpade poler. En metod att kompensera sådana svagt dämpade poler är att använda ett s.k. spärrfilter. Metoden går ut på att förse regulatorn med nollställen, som kraftigt reducerar förstärkningen för frekvenser i närheten av processens resonans. I detta fall antar vi en regulator

$$F(s) = K \frac{s^2 + 0.1s + 1}{s(s + a)}$$

där förutom spärrfiltret även inkluderats en integrator samt två parametrar, K och a , att användas som designparametrar.

- Fullborda dimensioneringen av regulatorn genom att bestämma K och a så att det slutna systemet får en dubbelpol i -2 .
- Beräkna överföringsfunktionerna från r och v till u och y och skissa motsvarande amplituddiagram. Kommentera de icke önskvärda egenskaperna för denna dimensioneringsmetod.
- Anta nu att den verkliga överföringsfunktionen skiljer sig från den antagna ($G(s)$) med kvantiteten $\Delta_G^a(s)$, men att man vet att det relativa

felet uppfyller olikheten

$$\left| \frac{\Delta_G^a(j\omega)}{G(j\omega)} \right|^2 < \frac{4\omega^2}{4 + \omega^2}.$$

Visa att det återkopplade systemet med den i uppgift a) dimensionerade regulatorm fortfarande är stabilt!

- 9.7 (R)** En process antas ha en nominell överföringsfunktion $G(s)$, medan det verkliga systemets överföringsfunktion antas vara $G_0(s) = G(s)\tilde{G}(s)$. Den multiplikativa faktorn $\tilde{G}(s)$ kan ses som icke-modellerad dynamik som ej har beaktats i den nominella modellen.

Bestäm den multiplikativa osäkerhetsfunktionen $\Delta_G(\cdot)$. Antag att regulatorm har utformats så att den komplementära känslighetsfunktionen (återkopplade systemet) har överföringsfunktionen

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2}$$

där ω_0 kan väljas fritt.

Uppskatta högsta acceptabla bandbredd ω_b för det återkopplade systemet $T(s)$ baserat på kravet för robust stabilitet, nämligen att $|T(j\omega)\Delta_G(j\omega)| < 1$. Gör detta genom att rita $|1/\Delta_G(j\omega)|$ och $|T(j\omega)|$ var för sig och välj ω_0 så att de ej korsar varandra. Studera följande osäkerheter

- a) $\tilde{G}(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$ $\zeta = 0.54$ och 0.1 (extra resonans)
- b) $\tilde{G}(s) = \frac{1}{1 + Ts}$ (extra tidskonstant)
- c) $\tilde{G}(s) = 1 - Ts$ (extra icke-minimumfas nollställe)
- d) $\tilde{G}(s) = e^{-sT}$ (extra dödtid)

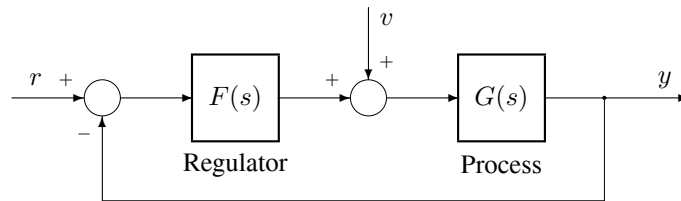
Kommentera rimligheten i analysen.

- 9.8 (R)** Hur hade resultatet i föregående uppgift utfallit om komplementära känslighetsfunktionens högfrekvensasymptot i stället hade haft lutning -20 dB/dekad exempelvis

$$T(s) = \frac{\omega_b}{s + \omega_b}$$

Vilken största acceptabla bandbredd ω_b hade då erhållits?

- 9.9 (R)** Betrakta reglersystemet enligt figuren nedan, där r är referenssignal, y är processens utsignal och v är en laststörning. Antag att v är sinusformad med frekvensen ω_v .



a) Det är förstås önskvärt att laststörningen påverkar utsignalen y mindre för det slutna systemet (med regulator) jämfört med det öppna (d.v.s. utan regulator). Härled ett villkor på kretsöverföringens frekvenskurva för att detta skall gälla oberoende av frekvensen, samt tolka villkoret grafiskt.

b) I allmänhet är det omöjligt att uppnå målet som formuleras i a) – varför?

9.10 (R) Vilket minsta alternativt största värde på överkorsningsfrekvensen ω_c är acceptabelt vid reglering av följande processer?

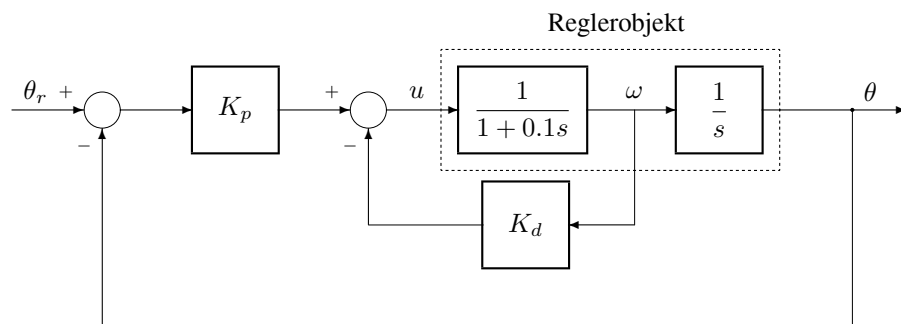
a)
$$G(s) = \frac{e^{-0.4s}}{(1+s)^3}$$

b)
$$G(s) = \frac{1-s}{(1+s)^3}$$

c)
$$G(s) = \frac{1}{(s-0.5)(s+1)^2}$$

10 Alternativa designprinciper och regulatorstrukturer

- 10.1 (R)** Figuren nedan beskriver ett servosystem för positionering av en last. I systemet används reglering med *inre återföring*, dvs förutom reglerobjektets utsignal (vinkeln θ) återkopplas ytterligare en variabel (vinkelhastigheten ω). Denna princip används ofta för att erhålla snabbare och noggrannare reglering.



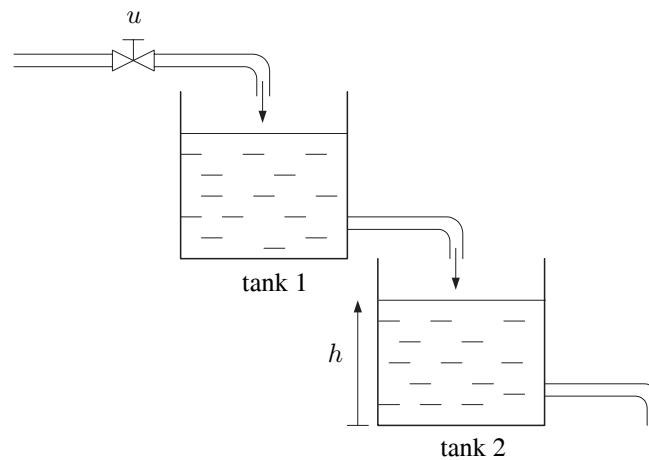
- Välj K_d och K_p så att polerna för det återkopplade systemet hamnar i $s = -10 \pm j10$.
- Vilken relativ dämpning ζ motsvarar denna polplacering? Vilken överkorsningsfrekvens ω_c och fasmarginal φ_m erhålls då återkopplingen bryts upp vid styrsignalen u ?
- Dimensionera ett alternativt positionsservo *utan* inre återföring av vinkelhastigheten ω . Använd i stället seriekompensering i form av en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b}$$

Se till att systemet får samma fasmarginal φ_m och överkorsningsfrekvens ω_c som i fallet med inre återföring.

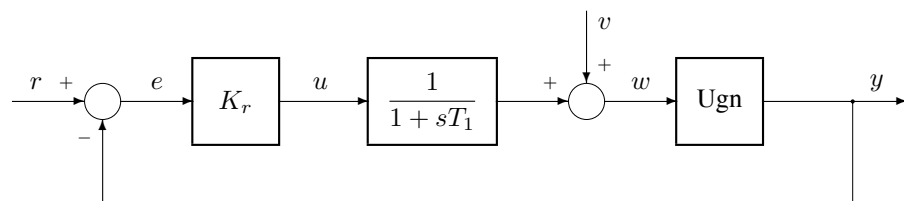
- Jämför kretsöverföringen för de båda fallen i ett Bodediagram. Diskutera robust stabilitet med avseende på icke-modellerad dynamik exempelvis högfrekventa resonanser.

10.2 (R)



Att reglera höjden h i tank 2 med ventilläget u kan medföra vissa problem på grund av dynamiken i den första tanken. Med utnyttjande av flödesgivare skulle man kunna förbättra regleringen. Visa principiellt med hjälp av ett blockschema hur detta skulle kunna gå till.

10.3 (R) Figuren nedan visar en enkel proportionell reglering av temperaturen (y) i en oljeeldad ugn. Styrsignalen u är kommenderat bränsleflöde, vilket utgör insignalen till ett bränsleventilservo. Ugnens verkliga bränsletillflöde (w) karakteriseras av en tidskonstant T_1 i servot samt av ett störflöde v , som representerar variationer i bränsletryck, viskositet m m. Själva ugnens dynamik $G(s)$ kan beskrivas av en förstärkning K_p , en tidskonstant T_2 och en dödtid T_d . Numeriska värden är enligt följande: $K_p = 20^\circ\text{C}/\text{flödesenhet}$, $T_1 = 5$ s, $T_2 = 100$ s, $T_d = 20$ s.

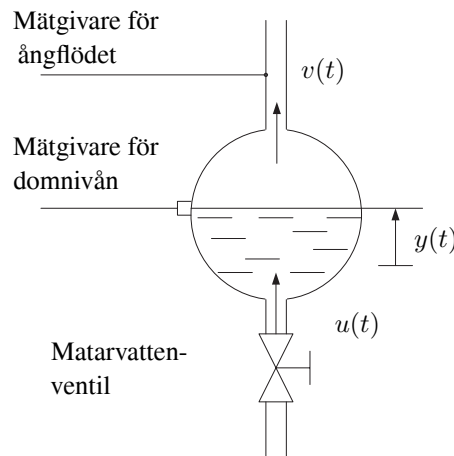


- Rita upp systemets Bodediagram och bestäm härur det högsta värdet på regulatorförstärkningen K_r som uppfyller specifikationen: $A_m \geq 2.5$ och $\varphi_m \geq 50^\circ$. Hur mycket reduceras temperaturbidraget från störningen v jämfört med det oreglerade fallet?
- Antag att en stegformad störning $v = 2$ flödesenheter får ge en kvarstående temperaturändring på högst 1°C . För att klara detta krav ut-

rustas systemet med en bränsleflödesgivare och en inre krets för reglering av bränsleflödet (kaskadreglering). Den inre kretsen förses också med en proportionell regulator. Rita ett blockschema som illustrerar det kompletta reglersystemet samt bestäm vilken förstärkning som skall väljas i den inre kaskadloopen för att noggrannhetskravet skall bli uppfyllt (övriga parametrar enligt ovan).

- c) Vilken fördel finns med detta sätt att reducera störningens inverkan jämfört med alternativet att införa integralverkan i den ursprungliga reglerkretsen?

10.4 (R) I en ångpanna av sk domtyp används en behållare (domen) för att skilja vatten och ånga. Det är väsentligt att hålla konstant vattennivå i domen vid belastningsändringar.



Domen kan beskrivas med modellen

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s} U(s) - \frac{10^{-4}(1 - 100s)}{s(1 + 10s)} V(s)$$

där y är vattennivån i meter, u matarvattenflödet i kg/sek och v är ångflödet i kg/sek.

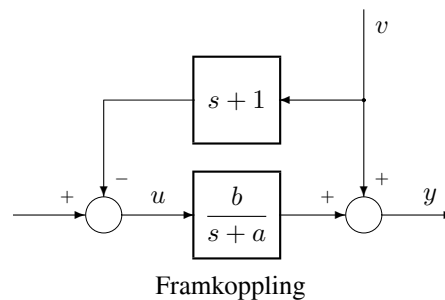
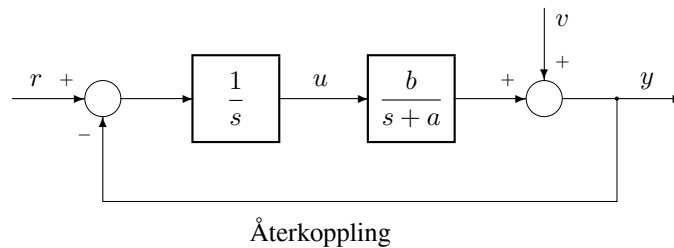
- I systemet införes en P-regulator för konstanthållning av nivån y via styrning av matarvattenflödet. Rita blockschema över det slutna systemet, inklusive störningens (ångflödets) inverkan!
- Dimensionera regulatorns förstärkningsfaktor K (kg/sek)/m så att ett begynnelsefel i nivån minskar till 25% av ursprungsvärdet efter 1 minut! Vad blir då kvarstående nivåfelet svarande mot en stegstörning i ångflöde på 2 kg/sek?
- Ange en framkoppling i reglersystemet, baserad på mätning av ångflödet, så att nivån blir oberoende av ändringar i ångflödet. Rita blockschema!

d) Hur påverkas slutna systemets stabilitet av framkopplingen?

10.5 (R) Vilket påstående om framkoppling är korrekt? (Endast ett är korrekt!)

- A: Framkoppling används för att undertrycka verkan av icke-mätbara störningar.
- B: Framkoppling innebär att ärvärdet men inte reglerfelet deriveras i en reglerkrets med PID-regulator.
- C: Framkoppling påverkar i princip inte återkopplingsloopens stabilitet i ett reglersystem.

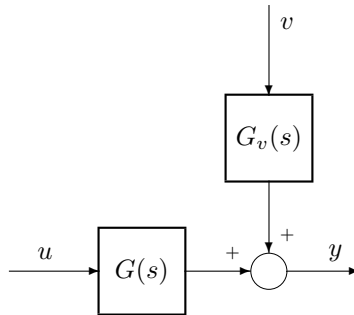
10.6 (R)



Återkoppling, framkoppling alternativt öppen styrning skall analyseras med avseende på laststörningen v och dess inverkan på utsignalen y då processens dynamik $G(s) = \frac{b}{s+a}$ varierar.

- a) Rita asymptotiskt amplituddiagram för överföringsfunktionen från störningen v till utsignalen y för de tre fallen. Välj $a = b = 1$ (nominellt fall) och som alternativ $a = 1.5$ och $b = 0.5$.
- b) Ange baserat på dessa frekvenskurvor fördelar och nackdelar med framkoppling respektive återkoppling. Vad blir resultatet då dessa metoder kombineras?

10.7 (R)



En framkopplingslänk skall dimensioneras för ovanstående process där störningen v antas vara mätbar. Processens överföringsfunktioner antas ha formen

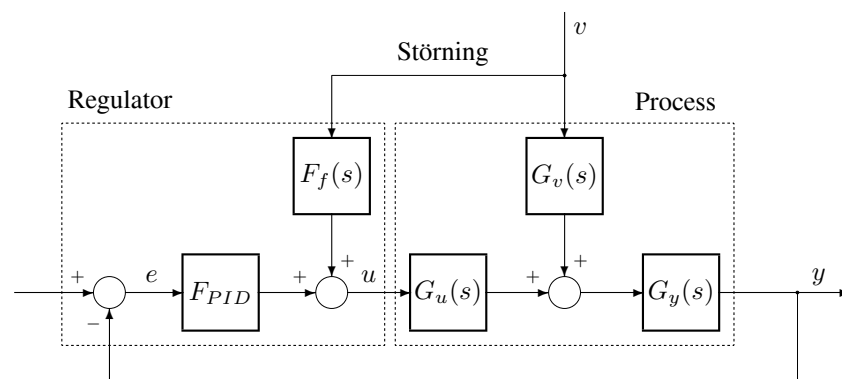
$$G(s) = \frac{s + b}{s + a} e^{-sT_d}$$

$$G_v(s) = \frac{s + b_v}{s + a_v} e^{-sT_{dv}}$$

- Bestäm framkopplingslänken $F_f(s)$.
- För vilka värden på parametrarna i processmodellerna går det att åstadkomma en praktiskt realiserbar länk $F_f(s)$ som ger ett stabilt reglersystem? Ange alternativa förslag på kompensering för övriga parameterkombinationer.

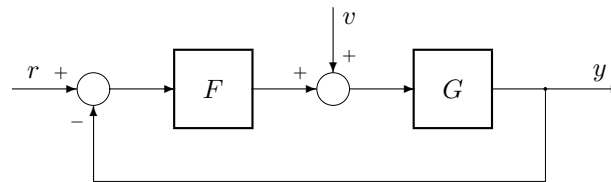
Ledning: Vid stabilitetsanalysen bör en viss osäkerhet hos processens poler och nollställen beaktas.

- 10.8 (R)** Figuren nedan visar ett reglersystem med återkoppling från utsignalen y och framkoppling från den mätbara störningen v .



- a) Antag att PID-regulatorn i systemet ovan är lämpligt inställd, och att överföringsfunktionerna $G_u(s)$, $G_v(s)$ och $G_y(s)$ är stabila minimumfassystem. Bestäm ett lämpligt framkopplingsfilter $F_f(s)$.
- b) Antag som tidigare att $G_u(s)$, $G_v(s)$ och $G_y(s)$ är stabila men att *precis en av* dessa överföringsfunktioner är icke-minimumfas. Kan detta leda till besvärligheter vid idrifttagningen av reglersystemet? Motivering krävs! (OBS! Det finns tre olika fall att ta ställning till!).

10.9 (R)



Förkortningen av en del av processens poler och nollställen via regulatorn $F(s)$ ingår ofta i designmetoder. Hur påverkas utsignalen y av laststörningen v och referenssignalen r , och vad blir kretsöverföringen $L(s)$ då regulatorn förkortar bort poler och nollställen i processen?

- a) $G(s) = \frac{1}{s+1}$ $F(s) = 10 \frac{(s+1)}{s}$
- b) $G(s) = \frac{s+2}{s^2+0.1s+1}$ $F(s) = 10 \frac{s^2+0.1s+1}{s(s+2)}$
- c) $G(s) = \frac{s-1+\varepsilon}{s-2+\varepsilon}$ $F(s) = 10 \frac{s-2}{s(s-1)}$

Vilka fördelar och nackdelar uppstår? I uppgift c) har en liten osäkerhet ε införts. Vilken effekt får detta och vilka inskränkningar är lämpliga att införa när det gäller pol-nollställes förkortning?

10.10 (R) En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1} \quad -1 < a < 1$$

ska regleras. En PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_f} \right)$$

kan utnyttjas för att kancellera processens poler.

- a) Bestäm T_i och T_d som funktion av T_f och processparametern a så att kancellationen genomförs.

- b) Bestäm den öppna kretsöverföringen $L(s)$ och den komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$. Välj T_f och K_p så att slutna systemet får en dubbelpol i $s = -\alpha$. Uttryck T_f och K_p som funktion av α .
- c) En processtörning v adderas till styrsignalen d.v.s. utsignalen

$$Y(s) = G(s)(U(s) + V(s))$$

Bestäm överföringsfunktionen $G_{vy}(s)$ från v till y för det återkopplade systemet då ovanstående kancerande regulator utnyttjas. För vilka värden på parametern a erhålls ett stabilt system?

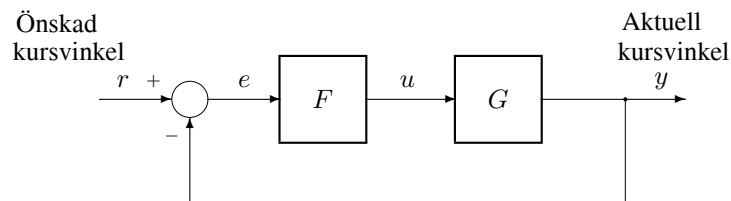
Skissera det principiella utseendet för $|G_{vy}(j\omega)|$. Vilka slutsatser kan man dra angående kancellation av resonanser i processen med tanke på kompensering av processtörningar.

- d) Bestäm överföringsfunktionen $F_{PID}(s)S(s)$ (överföringsfunktionen från börvärde till styrsignal vid enhetsåterföring). Skissera principiellt motsvarande amplituddiagram och notera speciellt högfrekvensasymptoten. Jämför med slutna systemets dubbelpol α och motsvarande bandbredd för $T(s)$.

- 10.11 (R)** Man skall bygga ett reglersystem för att reglera kursvinkeln hos ett medelstort lastfartyg. Genom identifiering och stegsvarsexperiment har man bestämt en approximativ överföringsfunktion från fartygets rodervinkel u (som mäts i radianer) till fartygets kursvinkel y (som också mäts i radianer). Denna överföringsfunktion ser ut på följande sätt:

$$G(s) = \frac{k}{s(1 + as)} \quad \text{där } k = 0.1 \quad \text{och } a = 5 \text{ s.}$$

För regleringen används en givare som mäter kursvinkeln y enligt nedanstående blockschema, samt en regulator $F(s)$ som bestämmer systemets styrsignal utgående från aktuell felsignal e .

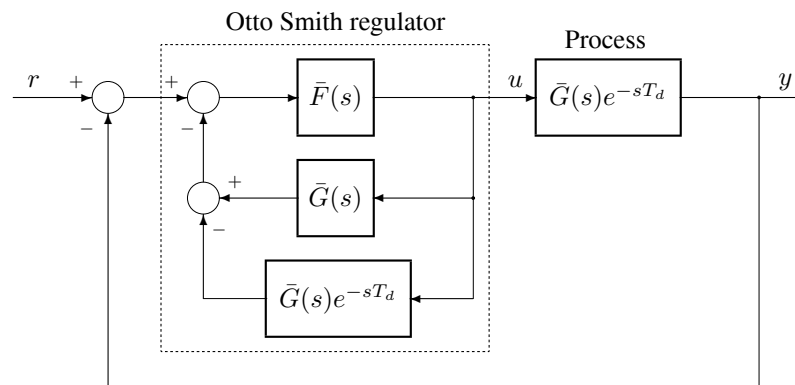


- a) Hur skall regulatorns överföringsfunktion $F(s)$ se ut om man önskar att det återkopplade systemet från r till y skall ha överföringsfunktionen

$$G_{ry} = \frac{1}{(1 + \tau s)^2}$$

- b) Hur stor blir regulatorns maximala styrsignal (rodervinkeln u) vid en stegformad referenssignaländring r på 0.3 radianer? Notera speciellt värdet då $\tau = 4$ respektive 1.
- c) Hur stor blir fasmarginalen φ_m då $\tau = 4$ respektive 1.
- d) Hur mycket ökar bandbredden och snabbheten då tidskonstanten τ minskar från 4 till 1?
- e) Vilka slutsatser kan man dra angående prestanda, stabilitetsmarginaler, styrsignalaktivitet och robusthet för högfrekvent ickemodellerad dynamik i förhållande till tidskonstanten τ ?

10.12 (R)

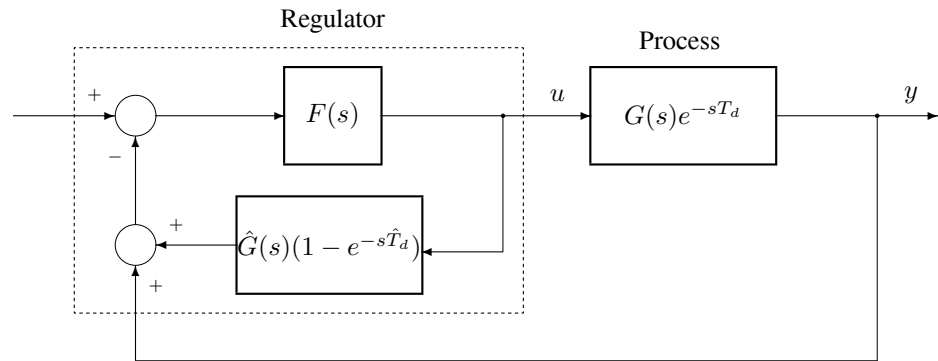


Figuren visar en s k Otto Smith-regulator, avsedd att reglera processer med döttidsdominerad dynamik. Processen antas ha överföringsfunktionen $G(s)e^{-sT_d}$, där $G(s)$ saknar dödtid. Regulatorn $F(s)$ dimensioneras för reglering av processen utan dödtid, dvs med antagandet att $T_d = 0$.

- a) Utgå från blockschemat ovan och beräkna det slutna systemets överföringsfunktion från r till y .
- b) Betrakta specialfallet $G(s) = 1/(s + 1)$. Dödtiden antas vara 1 tidsenhet. Bestäm en Otto Smith-regulator för denna process, så att insvängningstiden (till 5%) för det slutna systemet inte överstiger 2 tidsenheter och så att den statiska förstärkningen från r till y är lika med ett.

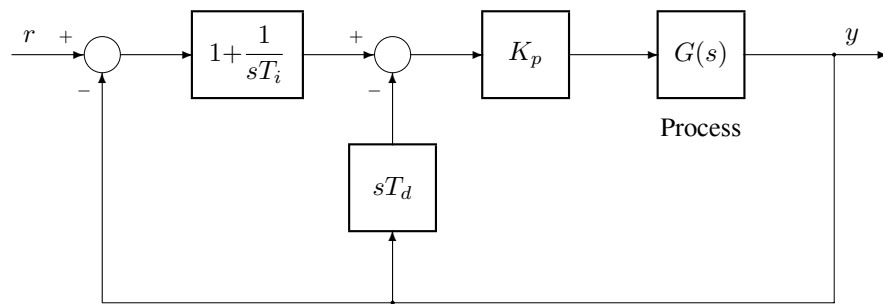
10.13 (R) Figuren visar en Otto Smith-regulator, avsedd att reglera processer med döttidsdominerad dynamik. I regulatorn ingår förutom en kompenseringsslänk $F(s)$ också en överföringsfunktion som beror av $\hat{G}(s)$ och $e^{-s\hat{T}_d}$ som tillsammans representerar en *modell* för processen.

- a) Beräkna överföringsfunktionen G_{ry} från r till y under antagandet att $\hat{T}_d = T_d$.

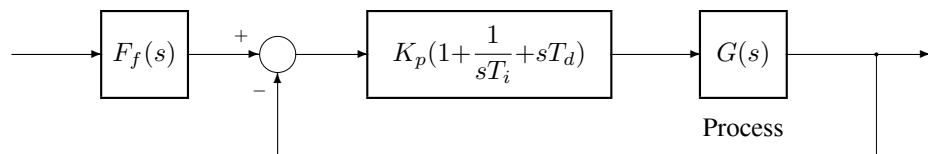


b) Anta förutom att $\hat{T}_d = T_d$ också att $\hat{G}(s) = G(s)$ (dvs att modellen är exakt). Tolka den resulterande överföringsfunktionen i detta fall och förklara fördelen med Otto Smith-regulatorn.

10.14 (R)



a) En variant av PID-reglering visas i figuren ovan. Ställ upp det slutna systemets överföringsfunktion från r till y , $G_{ry}(s)$. Förklara kort fördelen med att arrangera I- och D-verkan på det här sättet.



b) Bestäm filtret $F_f(s)$ så att överföringsfunktionen $G_{ry}(s)$ blir densamma som i uppgift a). Antag specifikt att $T_i = 4T_d$. Vilken skillnad i överföringsfunktionen $G_{ry}(s)$ kan då iakttagas i termer av poler och nollställen jämfört med fallet $F_f(s) = 1$?

c) Bestäm högfrekvensasymptoten för överföringsfunktionen från r till u , $G_{ru}(s)$ för de båda fallen i uppgift b) under antagandet att komplet-

tära känslighetsfunktion $T(j\omega)$ närmar sig kretsöverföringen $L(j\omega)$ för stora värden på ω .

10.15 (R) En PID-regulator kan tecknas på formen

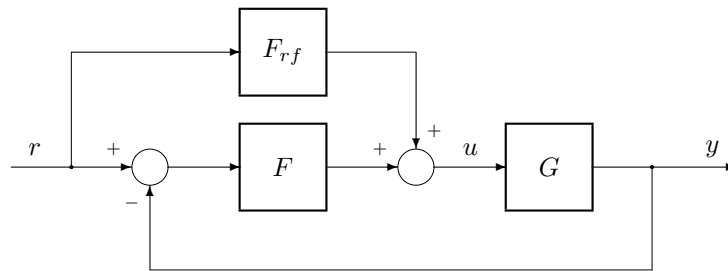
$$F_{PID}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

För att ytterligare dämpa högfrekventa mätstörningar kan det vara lämpligt att ersätta lågpasfiltert av första ordningen med ett andra ordningens lågpasfilter, vilket ger följande PID-regulator

$$F_{PID_f}(s) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + 2\zeta_f s\tau/\beta + (s\tau/\beta)^2)}$$

där indexet f markerar extra lågpasfiltrering. Rita asymptotiska amplituddiagram för dessa båda regulatorer, och bestäm maxvärdet $|F_{PID_f}(j\omega)|$ i det högre frekvensområdet från det exakta amplituddiagrammet. Antag att β är stort så att inte regulatorns nollställe påverkar övergången från asymptotiskt till exakt diagram.

10.16 (R) En framkopplingslänk från referenssignalen direkt till styrsignalen kan ut-



nyttjas för att få bättre referenssignalföljning även vid högre frekvenser ovanför det återkopplade systemets bandbredd.

- Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s) = Y(s)/R(s)$ och välj $F_{rf}(s)$ så att $Y(s) = R(s)$.
- Vilka problem kan uppstå vid realisering av $F_{rf}(s)$?
- En förenklad variant är att välja statisk referenssignalframkoppling. Gör detta för fallet

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^2} \quad G_r(s) = 0.5 \frac{s+1}{s}$$

Vilken förändring av $G_{ry}(s)$ åstadkoms då i termer av poler och nollställen jämfört med fallet utan referenssignalframkoppling.

11 Dimensionering av regulatorer på tillståndsform

11.1 (R) Ett dynamiskt system beskrivs av följande kopplade differentialekvationer

$$\begin{aligned}\dot{x} + x &= u \\ \dot{y} - y + 2x &= u\end{aligned}$$

- Formulera en tillståndsmodell för detta system samt motsvarande överföringsfunktion.
- Studera systemets styr- och observerbarhet, samt kommentera kopplingen till systemets överföringsfunktion.
- Analysera systemets stabilitet med hjälp av dess tillståndsmodell och överföringsfunktion. Förklara skillnaderna i resultaten.
- Kommentera möjligheterna att skatta tillstånden med hjälp av en observatör och att reglera systemet med hjälp av tillståndsåterkoppling.

11.2 (R) En satellits rotation ska styras med hjälp av ett drivande moment u . Momentjämvikt ger differentialekvationen

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = u(t)$$

där J är satellitens tröghetsmoment och ω är satellitens vinkelhastighet som tillsammans med vinkeln θ är tillgängliga för återkoppling. Antag i fortsättningen att $J = 1$.

- Bestäm en tillståndsåterkoppling

$$u = -\ell_\theta \theta - \ell_\omega \omega + K_r \theta_r$$

så att de båda polerna för det återkopplade systemet placeras som en dubbelpol i $s = -\alpha$.

- Bestäm överföringsfunktionen från θ_r till styrsignalen u , och ange speciellt $u(0)$ vid ett börvärdessteg (enhetssteg) som funktion av polplacementen α .
- Bestäm kretsöverföringen $L(s)$ då återkopplingslingan bryts vid styrsignalen u . Ange speciellt kretsöverföringens högfrekvensasymptot som funktion av α , och kommentera känsligheten för icke-modellerade högfrekventa resonanser hos satelliten.
- Tillståndsåterkopplingen kan uppfattas som en PD-regulator med enbart återkoppling från θ , dock utan filtrering av derivataverkan och ingen derivering av referenssignalen, d.v.s.

$$u = K_p(\theta_r - (1 + T_d s)\theta)$$

Då en PD-regulator med filtrering

$$F_{PD}(s) = \frac{K_p(1 + s\tau)}{1 + s\tau/\beta}$$

utnyttjas, förändras kretsöverföringen speciellt i det högfrekventa området. Vilken förändring sker och på vilket sätt påverkar detta systemets robusthet för högfrekventa modellosäkerheter, jämfört med tillståndsåterkopplingen?

- 11.3 (R)** Läsarmen på en hårddisk ska styras med en servomotor. Eftersom motorns tidskonstant är några storleksordningar mindre än läsarmens, antas motormodellen vara en ren förstärkning. Den förenklade servomotormodellen blir då med tidsenheten millisekunder

$$Y(s) = \frac{10}{s(1 + 10s)}U(s)$$

där utsignalen y är den uppmätta vinkeln och styrsignalen u är spänningen till motorn. Antag att även vinkelhastigheten ω är mätbar.

- Dimensionera en tillståndsåterkoppling från y och ω så att det återkopplade systemets poler hamnar i en dubbelpol i $s = -\alpha$.
 - Bestäm kretsöverföringen då återkopplingen bryts upp vid styrsignalen u . Ange kretsöverföringens låg- och högfrekvensförstärkning för de båda polplaceringarna $\alpha = 0.1$ och 0.5 .
 - Diskutera de båda valen av polplacering i relation till robusthet, prestanda och styrsignalaktivitet.
- 11.4 (R)** En flödesprocess beskrivs förenklat av överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Utsignalen mäts med en givare som tyvärr bidrar med signifikanta mätstörningar. Uppgiften är att undersöka hur en tillståndsobservatör hanterar sådana störningar.

- Dimensionera en tillståndsåterkoppling (P-regulator) så att slutna systemets pol hamnar i $s = -1$.
- Formulera en observatör med en godtycklig förstärkning K och inkludera den i ovanstående tillståndsåterkoppling. Bestäm överföringsfunktionen från mätsignalen y till styrsignalen u , d v s regulatorns överföringsfunktion $F(s)$. Antag att börvärdet $r = 0$.
- Studera överföringsfunktionen från mätstörningen till processens utsignal, d v s komplementära känslighetsfunktionen, i ett amplituddiagram. Jämför förstärkningarna $K = 1$ och $K = 10$. På vilket sätt påverkar nivån på denna förstärkning kompenseringen av mätstörningen?

- 11.5 (R)** a) Formulera en tillståndsmodell för följande servomotor

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} = u$$

där θ är vinkeln, $\omega = \dot{\theta}$ är vinkelhastigheten och u är styrsignalen.

- b) Visa att systemet är styrbart från styrsignalen u och observerbart från vinkeln θ , men ej observerbart då endast vinkelhastigheten ω mäts.
- c) Konstruera en observatör med dubbelpol i $s = -\alpha$ då endast signalen θ mäts. Bestäm överföringsfunktionerna från θ till $\hat{\theta}$ och $\hat{\omega}$, samt skissera motsvarande amplituddiagram då $\alpha = 10$ (observatörens dynamik är väsentligt snabbare än systemets tidskonstant, som är lika med ett). Kommentera de erhållna filtrens karakteristika i förhållande till systemdynamiken.

- 11.6 (R)** Överföringsfunktionen för en satellit från momentet u till rotationsvinkeln θ är

$$\Theta(s) = \frac{1}{Js^2}U(s)$$

där J är satellitens tröghetsmoment. Antag i fortsättningen att $J = 1$. Antag också att vinkeln θ mäts med en mätstörning w så att

$$\theta_m(t) = \theta(t) + w(t)$$

- a) Konstruera en tillståndsobservatör med en dubbelpol placerad i $s = -\alpha$ som skattar vinkeln och vinkelhastigheten.
- b) Bestäm överföringsfunktionen från θ_m till vinkeln θ och vinkelhastigheten ω som funktion av α . Ange speciellt låg- och högfrequensasymptoterna. På vilket sätt påverkas dessa asymptoter av α , d.v.s. dubbelpolens placering.
- c) Bestäm överföringsfunktionen från mätbruset w till skattningsfelen $\theta - \hat{\theta}$ och $\omega - \hat{\omega}$ som funktion av α . Ange speciellt motsvarande högfrequensasymptoter, och det sätt på vilket dessa påverkas av dubbelpolens placering.

12 Tidsdiskreta regulatorer

12.1 (R) Nedanstående fysikaliska system är givna med tidskontinuerliga överföringsfunktioner. Antag att systemen samplas och att insignalen är konstant över varje samplingsintervall h . Beräkna motsvarande tidsdiskretiserade överföringsfunktioner. Bestäm även de tidsdiskreta polerna i deluppgift a)-e). Jämför och kommentera!

$$\text{a) } G(s) = \frac{3}{1+s} \quad h = 1 \text{ s}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{3}{1+s} \quad h = 0.5 \text{ s}$$

$$\text{c) } G(s) = \frac{3}{4+2s} \quad h = 2 \text{ s}$$

$$\text{d) } G(s) = \frac{3}{s^2} \quad h = 0.1 \text{ s}$$

$$\text{e) } G(s) = \frac{4}{s^2+9} \quad h = 0.5 \text{ s}$$

$$\text{f) } G(s) = \frac{5}{s(5s+2)} \quad h = 1 \text{ s}$$

$$\text{g) } G(s) = \frac{3s^2+5s+3}{s(s^2+s+1)} \quad h = 1 \text{ s}$$

12.2 (R) Man önskar hålla vattennivån, y , i en tank konstant. Den tidskontinuerliga överföringsfunktionen framgår nedan. Nu vill man reglera systemet med hjälp av en dator. Datorn samplar systemets utsignal (vattenhöjden) med jämna tidsintervall och styrsignalen som ska reglera systemet kan anses vara konstant mellan samplingsstidpunkterna. Beräkna den diskretiserade överföringsfunktionen, dels om samplingsintervallet är 0.1 s och dels om samplingsintervallet är 0.5 s.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{2+10s}$$

12.3 (R) För en första ordningens process med dödtid

$$G(s) = \frac{K e^{-sT_d}}{1+Ts}$$

utnyttjas följande regulator

$$F(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1+sT}{K(1+s\lambda T - e^{-sT_d})}$$

där $e(t)$ är insignalen till regulatorn, dvs. reglerfelet, och $u(t)$ är regulatorns utsignal, dvs. styrsignalen.

a) Visa att det återkopplade systemet från referenssignal till utsignal blir

$$G_{ry}(s) = \frac{e^{-sT_d}}{1 + s\lambda T}$$

b) Skriv regulatoren på tidsform, dvs. ange en differentialekvation som då den Laplacetransformeras ger $F(s)$ ovan.

c) För att implementera regulatoren i en dator behöver vi tidsdiskretisera regulatoren ovan eftersom datorn bara läser av felet $e(t)$ och beräknar styrsignalen $u(t)$ vid diskreta tidpunkter. Vi väljer samplingsintervallet h så att dödtiden T_d är en jämn multipel av h , dvs. $T_d = ch$, där c är ett heltal.

Kalla styrsignalen efter k samplings $u(kh)$, felet $e(kh)$. Kalla på samma sätt styrsignalen efter $k-1$ samplings för $u(kh-h)$ och felet för $e(kh-h)$. Bestäm $u(kh)$ som funktion av reglerfelet $e(kh)$ och tidigare styrsignaler och reglerfel.

Ledning: Ett enkelt sätt att göra en tidsdiskret approximation av en tidsderivata är

$$\dot{f}(t) \approx \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

12.4 (R) Processen

$$G(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

samplas med samplingsintervallet $h = \ln 2$. (Detta val visar sig ge enkla siffror!). Ställ upp en differensekvation som relaterar det tidsdiskreta systemets in- och utsignaler, $u(k)$ och $y(k)$ respektive, till varandra. Beräkna även $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$ och $y(4)$ i det tidsdiskreta systemets stegsvar, där $u(k) = 1$ för $k \geq 0$. Antag att $u(k), y(k) = 0$ för $k < 0$.

12.5 (R) Skissera stegsvaret för processen

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

genom att uppskatta dämpningen ζ och den odämpade resonansen ω_n för motsvarande tidskontinuerliga överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

vars stegsvar är välbekant. Samplingsintervallet $h = 1$.

Eftersom vi inte tagit hänsyn till det samplade nollställets placering fås endast i undantagsfall det exakta stegsvaret med denna metodik. Jämför därför det erhållna resultatet med den exakta lösningen som erhålls genom att iterera den aktuella differensekvationen.

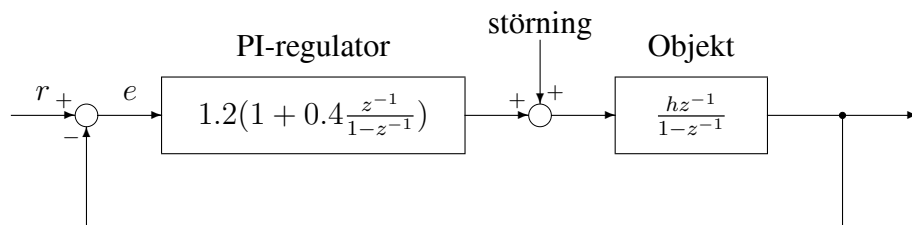
12.6 (R) En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)}$$

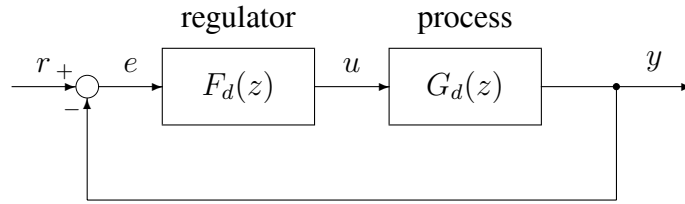
ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

- Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$, och ange speciellt resultatet för samplingsintervallet $h = \ln 2$. Kommentera även de tidsdiskreta polernas placering som funktion av samplingsintervallet h speciellt för korta och långa intervall.
- Bestäm den tidsdiskreta överföringsfunktionens lågfrekvensförstärkning för $\omega = 0$ och motsvarande högfrekvensförstärkning för $\omega = \omega_s/2 = \pi/h$ (Nyquist frekvensen) för ett godtyckligt samplingsintervall h . Jämför med motsvarande låg- respektive högfrekvensförstärkning för den kontinuerliga modellen $G(s)$. Kommentera jämförelsen speciellt för kortare samplingsintervall h .

12.7 (R) Ett objekt kan beskrivas med hjälp av en ren integration. På ingången till detta objekt uppträder långsamt varierande störningar. Ett regelsystem ska konstrueras så att utsignalen påverkas så lite som möjligt av dessa störningar. En PI-regulator kan då vara ett lämpligt val. Då systemet dimensioneras antas att samplingsintervallet $h = 1$. Slutna systemets poler hamnar då i $z \approx 0.4 \pm 0.3j$.



Studera för vilka samplingsintervall h som det återkopplade systemet är stabilt. (Regulatorns parametrar antas vara oberoende av samplingsintervallets längd.)

12.8 (R)

I figuren ovan visas hur en (samplad) instabil kemisk process regleras med en digital PI-regulator, där överföringsfunktionerna

$$G_d(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad F_d(z) = K_p + \frac{K_i}{1 - z^{-1}}$$

- För vilka regulatorparametrar, K_p och K_i , är det slutna systemet stabilt?
- Markera det stabila området i ett K_p - K_i -plan, med angivande av intressanta skärningspunkter, kurvor etc.

12.9 (R) En process som beskrivs av den tidskontinuerliga överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

där

$$G_1(s) = \frac{4}{s + 1} \quad \text{och} \quad G_2(s) = \frac{4}{s + 2}$$

ska regleras med en dator. För att åstadkomma detta diskretiseras denna processmodell. Antag att samplingsintervallet $h = \ln 2$ och att datorn lägger ut en styckvis konstant styrsignal $u(t)$.

- Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion $G_d(z)$. Kommentera även de tidsdiskreta polernas placering som funktion av samplingsintervallet h .
- Bestäm en tidsdiskret P-regulator så att de båda polerna för det tidsdiskreta återkopplade systemet placeras som en dubbelpol.

12.10 (R) En transportprocess modelleras som en ren fördröjning med dödtiden T_d , d.v.s. överföringsfunktionen är $G(s) = e^{-sT_d}$. Denna process regleras med en PI-regulator

$$F(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

En tidsdiskret PI-regulator implementeras med ett samplingsintervall $h = T_d$.

- Bestäm den tidsdiskreta kretsöverföringen $L_d(z) = G_d(z)F_d(z)$.

b) Välj speciellt $T_i = T_d$ och bestäm kretsöverföringen $L_d(z)$ samt överföringsfunktionen $G_{ry}(z) = L_d(z)/(1 + L_d(z))$. Ange speciellt det återkopplade systemets polplacering och skissera motsvarande stegsvar för $K_p = 0.5$ och 1.

c) Rita $L_d(e^{j\omega h})$ i uppgift b) i ett Nyquistdiagram. Visa speciellt att realdelen för $L_d(e^{j\omega h})$ är $-0.5K_p$, och att därmed den maximala känslighetsfunktionen

$$M_S = \max_{\omega} |S_d(e^{j\omega h})| = \max_{\omega} |1/(1 + L_d(e^{j\omega h}))| = 1/(1 - 0.5K_p)$$

d) Ange speciellt M_S för $K_p = 0.5$ och 1 och kommentera kopplingen mellan stabilitetsmarginalen M_S och systemets snabbhet enligt uppgift b).

12.11 (R) En process regleras med en tidsdiskret P-regulator. Ökad tillgång till datorkraft gör att man önskar undersöka effekten av att tredubbla samplingsfrekvensen från $f_s = 100\text{Hz}$ ($h = 1/f_s$) till $f_s = 300\text{Hz}$.

Följande MATLAB-kod simulerar en stegstörning för det nuvarande återkopplade systemet.

```
Nstep=50; % Antalet simuleringssteg
Kp=3; % P-förstärkning
a=0.905; % Processparameter
b=0.190; % -"-
y(0)=0; % Processens begynnelsevärde
v0=3; % Stegstörningens nivå
r0=0; % Referenssignalens nivå
for k=0:Nstep % Simulering
    u(k)=Kp*(r0-y(k)); % Styrlagen
    y(k+1)=a*y(k)+b*(u(k)+v0); % Uppdatering av processen
end
```

a) Bestäm nuvarande processens överföringsfunktion, samt motsvarande tidskontinuerliga överföringsfunktion.

b) Ange de förändringar av koden som behövs för att simulera det återkopplade systemet för det kortare samplingsintervallet (under lika lång tidsperiod som nuvarande system).

c) På vilket sätt förändras amplitudmarginalen då samma P-regulator ($K_p = 3$) utnyttjas för att styra processen med den snabbare samplingsfrekvensen?

12.12 (R) En process regleras med en tidsdiskret P-regulator med en samplingsfrekvens på $f_s = 100$ Hz ($h = 1/f_s$). MATLAB-koden i föregående uppgift simulerar en stegstörning för det återkopplade systemet.

- Bestäm nuvarande processens överföringsfunktion, samt motsvarande tidskontinuerliga överföringsfunktion.
- Ange de förändringar av koden som behövs för att simulera det återkopplade systemet då processen även inbegriper en transportfördröjning på ett samplingsintervall.
- Antag att processen i stället regleras med en tidsdiskret PI-regulator. Den tidskontinuerliga motsvarigheten har överföringsfunktionen

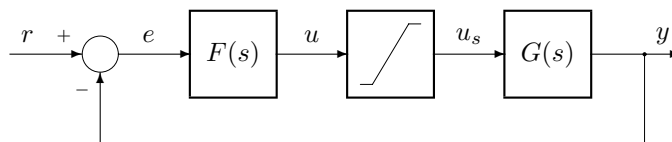
$$F(s) = \frac{5(1 + 0.05s)}{s}$$

Bestäm motsvarande tidsdiskreta överföringsfunktion då det antas att insignalen är styckvis konstant mellan samplingsögonblicken, samt modifiera MATLAB-koden så att P-regulatorn ersätts av denna tidsdiskreta PI-regulator.

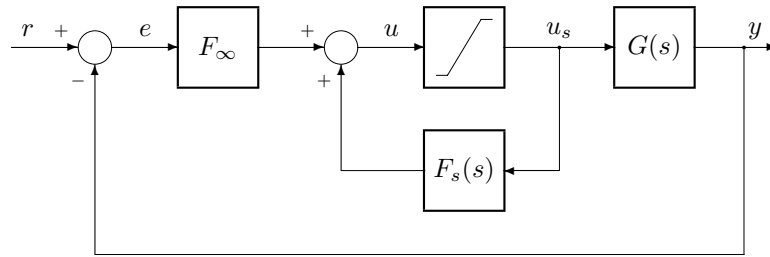
12.13 (R) I praktiska reglersystem begränsas normalt den styrsignal som generas till processen via en begränsningsfunktion. Den begränsade styrsignalen $u_s(t)$ (s =saturation) kan då uttryckas som

$$u_s = \begin{cases} u_{max} & u > u_{max} \\ u & u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ u_{min} & u < u_{min} \end{cases}$$

Begränsningsfunktionen illustreras också i följande blockschema.



Då styrsignalen hamnar i begränsningsläget upphör återkopplingen temporärt att fungera, eftersom styrsignalen till processen $u_s(t)$ då är konstant (lika med u_{min} eller u_{max}). Detta leder till problem då regulatorn i sig är instabil, vilket gäller exempelvis i det vanligt förekommande fallet att regulatorn $F(s)$ är en PI-regulator. Ett sätt att råda bot på detta problem visas i följande blockschema, där den begränsade styrsignalen u_s återkopplas via positiv återkoppling.



Denna realisering ger ett väl fungerande system då överföringsfunktionen $F_s(s)$ är *stabil* och konstanten K_∞ väljs lika med regulatorns högfrekvensförstärkning, d.v.s. $K_\infty = F(\infty)$.

- a) Bestäm $F_s(s)$ då

$$F(s) = 3 \frac{s + 0.5}{s}$$

så att reglersystemen i de båda ovanstående figurerna får samma beteende så länge som styrsignalen u håller sig innanför begränsningarna u_{min} och u_{max} (med andra ord bortse från begränsningsfunktionen).

- b) Antag att $u_{max} = 10$ och att referenssignalen $r(t)$ varieras så att reglerfelet e hamnar på en konstant nivå $e = 5$. Ange för de båda regulatorstrukturerna det asymptotiska beteendet hos signalen $u(t)$ för stora värden på t efter att inledande transienter har klingat av. I det första fallet bortses från eventuella konstanta bidrag hos $u(t)$. Kommentera skillnaden i beteende mellan de båda reglerfunktionerna.