Reglerteknikens grunder

Lösningar till övningstal

Bengt Lennartson

Förord

Detta häfte med lösningar till övningsuppgifterna i läroboken Reglerteknikens grunder får fritt kopieras och distribueras elektroniskt. Sidorna är genererade för att kopieras dubbelsidigt.

Jag vill i sammanhanget tacka de personer som varit med och utarbetat dessa lösningar, bl a (i bokstavsordning) Claes Breitholtz, Bo Egardt, Carl-Magnus Fransson, Hugo Flordal, Jonas Fredriksson, Veronica Olesen, Stefan Pettersson, Marcus Rubensson, Bengt Schmidtbauer, Michael Tittus och Knut Åkesson.

Om du hittar tryckfel i någon lösning är jag tacksam om du skickar ett meddelande och rapporterar detta till epostadressen *bengt.lennartson@chalmers.se*

Göteborg 2006-06-01

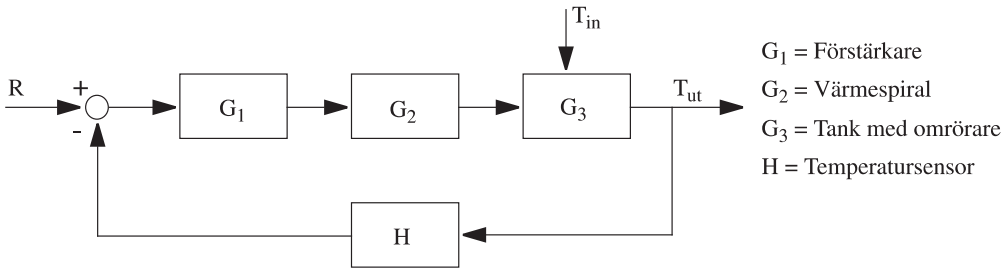
Bengt Lennartson

1

Introduktion

1.1

Störningen är temperaturen på det ingående vattnet T_{in}. Se i övrigt nedanstående blockschema, där vi kan notera att det är G_3 som representerar själva processen som ska regleras. Förstärkaren fungerar både som jämförare och som en P-regulator, där börvärdet ges av spänningen på potentiometern. Värmespiralen är aktuatorn som effektuerar styrsignalen.

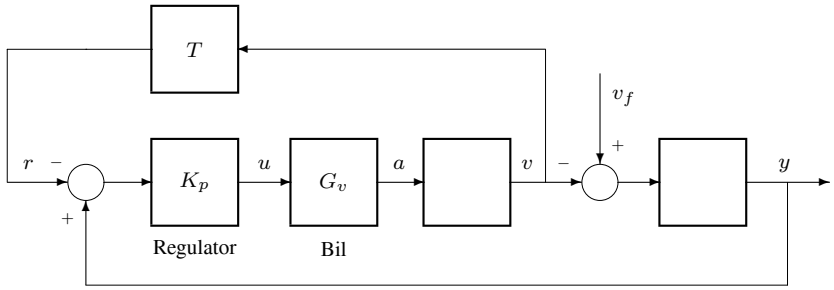


1.2

Nedanstående blockschema ger lösningen, där vi speciellt noterar att börvärdet r, det önskade avståndet, beror av hastigheten v, vilket ger en extra återkoppling. Integrationssymbolen införs för att integrera fram hastigheten v från accelerationen, och avståndet $y = \int (v_f - v)\, dt$.

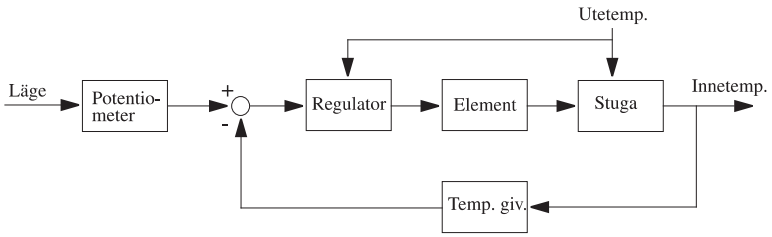
Den framförvarande bilens förändringar i hastighet är störningen som kan innebära avståndsvariationer som regulatorn försöker att kompensera.

Notera också den positiva återkopplingen, d v s ett ökat avstånd kräver en ökad acceleration, men däremot dyker det upp ett minustecken när avståndet y ska tas fram. Ett reglersystem innehåller i allmänhet en multiplikation med -1 någonstans i återkopplingsslingan, oftast i jämföraren mellan börvärde och ärvärde $(r - y)$.



1.3

En lösning ges av nedanstående blockschema där börvärdet genereras via en potentiometer. Notera att systemet innefattar återkoppling från inomhustemperaturen, men även framkoppling från utomhustemperaturen. Den senare temperaturen är processtörningen, som regulatorn m h a framkopplingen kan kompensera för, innan förändringar i utomhustemperaturen slagit igenom på inomhustemperaturen. Återkopplingen behövs dock för att i det långsammare tidsperspektivet hålla temperaturen kring det önskade börvärdet.



1.4

Reglersystemet är av traditionell typ, (se blockschemat i figur 1.12 i läroboken och blockschemat till uppgift 1.1) där vi betraktar kursvinkeln som den signal som ska regleras. Störningen är vindbyarna. Regulatorn antar vi finns i vindsurfarens hjärna, medan kroppen tillsammans med seglet och masten fungerar som styrdon.

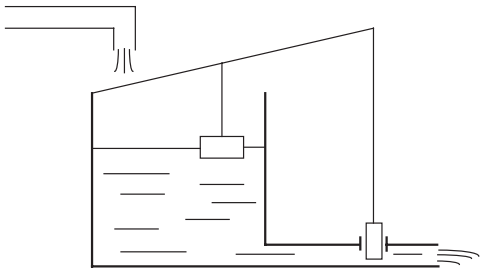
Det annorlunda med detta system ur reglersynpunkt är att regulatorn har flera styrsignaler till sitt förfogande. Både seglets vinkel i förhållande till brädan samt mastens och kroppens vinkel påverkar kursvinkel, men också farten. Slutsatsen är att detta system har flera styrsignaler, men också flera utsignaler i form av prestandaegenskaper. För somliga är exempelvis farten viktigare än kursvinkeln, fast då handlar det snarare om att maximera hastigheten än att hålla en konstant nivå.

Vindsurfarens möjlighet att upptäcka vindförändringar genom att observera krusningar på vattenytan innebär en framkoppling, d v s störningen upptäcks innan den påverkar farten och kursriktningen.

Detta sätt att renodla en trevlig fritidssysselsättning i reglertekniska termer kan naturligtvis diskuteras. Systemlösningen kan tolkas på flera olika sätt. Förhoppningsvis leder dock den här typen av resonemang till nya upptäckter av reglertekniken i vardagen.

1.5

Felet med systemet är att återkopplingen agerar i fel riktning. En ökning av höjden innebär minskat utflöde och därmed ytterligare höjdökning, i någon mening en positiv återkoppling. I nedanstående figur agerar styrningen däremot i kompenserande syfte, d v s en ökning av höjden i tanken innebär ett ökat utflöde och därmed en minskning av höjden (negativ återkoppling).



2

Linjära modeller för dynamiska system

2.1

a)

$$2\dot{y}(t) + 4y(t) = 8u(t)$$

- *Överföringsfunktion:* Laplacetransformation ger

$$\begin{aligned} 2sY(s) + 4Y(s) &= 8U(s) \\ Y(s)(4+2s) &= 8U(s) \end{aligned}$$

  Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{4+2s} = \frac{4}{2+s} = \frac{2}{1+0.5s}$$

- *pol:* $s = -2$; inga nollställen
- *tidskonstant:* $T = 0.5$ sekunder
- *statisk förstärkning:* $K = 2$
- *stegsvar:* Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
  Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{4u_0}{s(s+2)}\right\} \\ &= \tfrac{4u_0}{2}\left(1-e^{-2t}\right) \\ &= 2u_0\left(1-e^{-2t}\right) \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 2u_0 = K\cdot u_0$.

b)

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 3u(t)$$

- *Överföringsfunktion:* Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{0.5}{1 + \frac{5}{6}s + \frac{1}{6}s^2}$$

- *poler:* $s^2 + 5s + 6 = 0$ ger poler $s_1 = -2$ och $s = -3$; inga nollställen
- *tidskonstant:* $T_1 = 0.5, T_2 = \frac{1}{3}$
- *statisk förstärkning:* $K = 0.5$
- *stegsvar:* Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
  Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{3u_0}{s(s+2)} - \tfrac{3u_0}{s(s+3)}\right\} \\ &= 3u_0\left(0.5(1 - e^{-2t}) - \tfrac{1}{3}(1 - e^{-3t})\right) \\ &= u_0\left(0.5 - \tfrac{3}{2}e^{-2t} + e^{-3t}\right) \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.5u_0 = K \cdot u_0$.

c)

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = 2\dot{u}(t) + 3u(t)$$

- *Överföringsfunktion:* Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 6s + 9} = \frac{\frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3}s)}{(1 + \frac{1}{3}s)^2}$$

- *poler:* $(s + 3)^2 = 0$ ger poler $s_{1,2} = -3$;
  nollställen: $2s + 3 = 0$ ger nollställe: $s = -\frac{3}{2}$
- *tidskonstant:* täljare: $T = \frac{2}{3}$; nämnare: $T_{1,2} = \frac{1}{3}$
- *statisk förstärkning:* $K = \frac{1}{3}$
- *stegsvar:* Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
  Stegsvaret blir då

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{2u_0}{s(s+3)} - \tfrac{3u_0}{s(s+3)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{2u_0}{s(s+3)} - \tfrac{u_0}{3s} + \tfrac{u_0}{3}\tfrac{1}{s+3} + u_0\tfrac{1}{(s+3)^2}\right\} \\ &= \tfrac{2u_0}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) - \tfrac{u_0}{3} + \tfrac{1}{3}e^{-3t} + u_0te^{-3t} \\ &= \tfrac{u_0}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) + u_0te^{-3t} \end{aligned}$$

- $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{u_0}{3} = K \cdot u_0$, eftersom e^{-3t} går snabbare mot noll än t går mot oändligheten.

d)

$$2\dot{y}(t) + 4y(t) + 4\dot{u}(t) - 8u(t) = 0$$

- *Överföringsfunktion:* Överföringsfunktionen blir då

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8 - 4s}{2s + 4} = 2\frac{(2 - s)}{(2 + s)} = 2\frac{(1 - 0.5s)}{(1 + 0.5s)}$$

- *pol:* $2 + s = 0$ ger polen $s = -2$;
  nollställe: $2 - s = 0$ ger nollställe: $s = 2$
- *tidskonstant:* nämnare: $T = 0.5$
- *statisk förstärkning:* $K = 2$

- *stegsvar:* Insignalen är $u(t) = u_0\sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{u_0}{s}$.
  Stegsvaret blir då
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot U(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\tfrac{2u_0}{s} + \tfrac{8u_0}{s(s+2)}\right\} \\ &= -2u_0 + 4u_0\left(1 - e^{-2t}\right) \\ &= 2u_0\left(1 - 2e^{-2t}\right) \end{aligned}$$
- $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 2u_0 = K \cdot u_0$.

2.2

a)
$$G(s) = \frac{4}{s(2s+6)}$$

Impulssvar med $U(s) = 1$ blir i detta fall:
$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s+3)}\right\} = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$$

När vi låter $t \to \infty$ så fås:
$$y(\infty) = lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{2}{3}$$

Samma svar fås genom att använda slutvärdessatsen i Laplace:
$$y(\infty) = lim_{s\to 0} sY(s) = lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{4s}{s(2s+6)}|_{s=0} = \frac{2}{3}$$

b)
$$G(s) = \frac{3}{s^2+4}$$

Impulssvar med $U(s) = 1$ blir i detta fall:
$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+4}\right\} = \frac{3}{2}\sin(2t)$$

När vi låter $t \to \infty$ så får vi att $y(\infty) = lim_{t\to\infty} y(t)$ i detta fall inte är definierat eftersom $y(t)$ är en odämpad svängning.

Trots detta ger slutvärdessatsen i Laplace en lösning:
$$y(\infty) = lim_{s\to 0} sY(s) = lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{3s}{s^2+4}|_{s=0} = 0$$

Vi kommer ihåg att slutvärdessatsen i Laplace endast fungerar för signaler $X(s)$ då $sX(s)$ har samtliga poler strikt i VHP.

2.3

Överföringsfunktion $G(s) = \frac{2}{s+5}$ kan vara en modell för en värmeprocess (uppvärmning av tank), farthållare från drivkraft till hastighet, mm.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \Delta y(t) \\ &= G(0)u_0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\Delta U(s)\right\} \\ &= \tfrac{2}{5}10 + \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{2}{s+5}\tfrac{2}{s}\right\} \\ &= 4 + \tfrac{4}{5}\left(1 - e^{-5t}\right)\sigma(t) \\ &= \tfrac{4}{5}\left(21 - e^{-5t}\right)\sigma(t) \end{aligned}$$

Då ändringen i insignalen inträffar vid en godtycklig tidspunkt, $t = \tau$, gäller:
$$y(t) = y_0 + \Delta y(t-\tau) = 4 + \frac{4}{5}\left(1 - e^{-5(t-\tau)}\right)\sigma(t-\tau)$$

2.4

a) Insignal/Utsignalrelationen är given med hjälp av differentialoperatorn p. Detta motsvarar följande överföringsfunktion i Laplace:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Denna överföringsfunktion kan jämföras med den generella modellen för ett andra ordningens system.

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Identifiering av de respektiva variablerna ger:

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\zeta &= \frac{b}{2m\omega_n} = \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{mk}} \\
K &= \frac{\frac{1}{m}}{\omega_n^2} = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Ökning av k leder till snabbare, mindre dämpat system med mindre stationär förstärkning.

Ökning av m leder till långsammare (ω_n) och mindre dämpat system.

Ökning av b leder till ett bättre dämpat system.

b) Enligt formler (2.26) och (2.27) i boken gäller:

$$\begin{aligned}
\omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \\
a &= \omega_n\zeta = \frac{b}{2m}
\end{aligned}$$

Med hjälp av dessa variabler kan överföringsfunktionen $G(s)$ även skrivas som

$$G(s) = \frac{K\left(a^2 + \omega_d^2\right)}{(s+a)^2 + \omega_d^2}$$

Processens poler kan nu beräknas genom att sätta nämnarpolynomet lika med noll.

$$s^2 + 2as + a^2 + \omega_d^2 = 0$$

Då fås polerna till

$$s_{1,2} = -a \pm j\omega_d$$

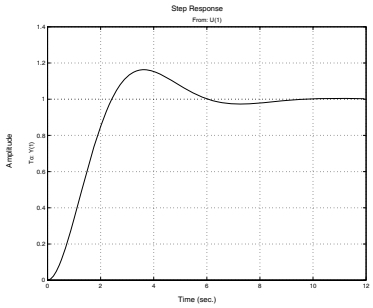
Detta innbär att a och ω_d anger det komplexa polparets real- ($-a$) och imaginärdel ($\pm\omega_d$).

Stegsvaret för systemet då $b = m = k = 1$:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

medför att

$$\begin{aligned}
\omega_n &= 1 \\
\zeta &= \frac{1}{2} \\
K &= 1
\end{aligned}$$



2.5

Pol diagram A: två poler i vänster halvplanet (VHP) innebär monotont ökande stegsvar med bestämt slutvärde, dvs stegsvar C.
Pol diagram B: komplexkonjugerat polpar i VHP innebär stegsvar med avklingande svängningar kring slutvärdet, dvs stegsvar A.
Pol diagram C: en pol i VHP och en i origo innebär stegsvar som asymptotiskt närmar sig kt för något k, dvs stegsvar B.

2.6

Följande system är givet

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_d}}{1+Ts} = \frac{K}{T}\frac{e^{-sT_d}}{s+1/T}$$

Impulssvaret ges av

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{där} \quad U(s) = 1$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{1}{T}(t-T_d)}\theta(t-T_d) \quad \text{där} \quad y_0 = K/T$$

$\theta(t)$ är stegfunktionen. Ytan under impulssvaret är

$$A = \int_0^\infty y(t)dt = \int_{T_d}^\infty y_0 e^{-\frac{1}{T}(t-T_d)}dt = y_0\left[\frac{e^{-\frac{1}{T}(t-T_d)}}{-\frac{1}{T}}\right]_{T_d}^\infty = y_0 T = K$$

Tidskonstanten T kan därför skattas genom $T = A/y_0$, dvs genom att dels mäta ytan A under impulssvaret och dels mäta y_0 vilket är värdet av $y(t)$ vid T_d enligt ovan.

Notera att ytan under impulssvaret är detsamma som gränsvärdet när tiden går mot oändligheten av stegsvaret, eftersom

$$A = \int_0^\infty y(t)dt = \lim_{t\to\infty}\int_0^t y(\tau)d\tau = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{s} = \lim_{s\to 0} sG(s)U(s), \quad \text{där} \quad U(s) = 1/s$$

Den näst sista likheten fås med slutvärdessatsen.

2.7

I denna uppgift ska en andra ordningens process med två reella poler (tidskonstanter) approximeras av en första ordningens process. Detta är möjligt då de två tidskonstanterna är av olika storleksordning.

$$G_2(s) = \frac{2}{(1+s)(1+\tau s)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{1+\tau s}$$

Partialbråksuppdelning resulterar i

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{\frac{2}{1-\tau}}{1+s} - \frac{\frac{2\tau}{1-\tau}}{1+\tau s} \\ &= \frac{\frac{2}{1-\tau}}{1+s} - \frac{\frac{2}{1-\tau}}{s+\frac{1}{\tau}} \\ &= \frac{2}{1-\tau}\left(\frac{1}{1+s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right) \end{aligned}$$

Impuls- och stegsvar:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{G_2(s)\right\} = g_2(t) \\ &= \frac{2}{1-\tau}\left(e^{-t} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ y_s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_2(s)}{s}\right\} \\ &= \frac{2}{1-\tau}\left[\left(1-e^{-t}\right) - \tau\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] \\ &= \frac{2}{1-\tau}\left[1-\tau-e^{-t}+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \end{aligned}$$

Med $\tau = 0.01$ får vi

$$\begin{aligned} y_{i,0.01}(t) &= \frac{2}{1-0.01}\left[e^{-t} - e^{-100t}\right] \approx 2\left(e^{-t}\right) \\ y_{s,0.01}(t) &= \frac{2}{1-0.01}\left[1-0.01-e^{-t}+0.01e^{-100t}\right] \approx 2\left(1-e^{-t}\right) \end{aligned}$$

och med $\tau = 100$

$$\begin{aligned} y_{i,100}(t) &= \frac{2}{1-100}\left[e^{-t} - e^{-0.01t}\right] \approx \frac{2}{100}\left(e^{-0.01t}\right) \\ y_{s,100}(t) &= \frac{2}{1-100}\left[1-100-e^{-t}+100e^{-0.01t}\right] \approx 2\left(1-e^{-0.01t}\right) \end{aligned}$$

En generell första ordningens process har följande impuls- och stegsvar:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}} \\ y_s &= K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) \end{aligned}$$

Den andra ordningens process kan därmed approximeras av följande första ordningens processer:

$$\begin{aligned} \tau = 0.01 &: \; G_1(s) = \frac{2}{1+s} \\ \tau = 100 &: \; G_1(s) = \frac{2}{1+\tau s} = \frac{2}{1+100s} \end{aligned}$$

Den långsammare tidskonstanten är alltså alltid dominerande och den snabbare tidskonstanten kan försummas om skillnaden mellan de två tidskonstanterna är tillräkligt stor.

2.8

Låt $G(s)$ vara Laplacetransformen av viktfunktionen $g(t)$. Impulssvaret då ett extra nollställe i $s = -b$ inkluderas blir

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s+b)G(s)\} = g'(t) + bg(t).$$

Stegsvaret blir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+b)}{s}G(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(1+\frac{b}{s}\right)G(s)\right\} = g(t) + b\int_0^t g(\tau)d\tau$$

Speciellt då $g(t) = te^{-t}$ fås

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{(s+b)G(s)\} &= -te^{-t} + e^{-t} + bte^{-t} = \{(b-1)t+1\}e^{-t} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+b)}{s}G(s)\right\} &= te^{-t} + b\int_0^t \tau e^{-\tau}d\tau = \{\text{partiell integration}\} \\
&= te^{-t} + b\left(\left[\frac{\tau e^{-\tau}}{-1}\right]_0^t + \int_0^t e^{-\tau}d\tau\right) \\
&= te^{-t} - bte^{-t} - be^{-t} + b \\
&= b - \{(b-1)t+b\}e^{-t}
\end{aligned}$$

Notera att impulssvaret är derivatan av stegsvaret.

2.9

a) Sökt $G(s) = \dfrac{V(s)}{U(s)}$.

Newtons lag ger ($ma = \Sigma F$)

$$\begin{aligned}
m\dot{v}(t) &= u(t) - F_v(t) \\
m\dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) \\
\dot{v}(t) + \frac{b}{m}v(t) &= \frac{1}{m}u(t)
\end{aligned}$$

Laplacetransformering ger

$$sV(s) + \frac{b}{m}V(s) = \frac{1}{m}U(s)$$

vilket innebär att sökt överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1/m}{s+b/m} = \frac{1}{s+0.25}$$

b) Beräkna $v(t)$ för $u(t) = \begin{cases} 0\,, & t<0 \\ t\,, & 0 \le t \le 1 \\ 1\,, & t>1 \end{cases}$

Skriv $u(t)$ med hjälp av stegfunktioner

$$u(t) = t(\theta(t) - \theta(t-1)) + 1\theta(t-1) = t\theta(t) - (t-1)\theta(t-1)$$

Laplacetransformering av $u(t)$ ger

$$U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{(1-e^{-s})}{s^2}$$

$V(s)$ fås som produkten av $G(s)$ och $U(s)$ enligt

$$V(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s+0.25)}\frac{(1-e^{-s})}{s^2}$$

Genom att partialbråksuppdela $V(s)$ kan dess inverstransform enkelt fås ur tabell. Därför ansätts

$$V(s) = \frac{(1-e^{-s})}{s^2(s+0.25)} = (1-e^{-s})\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+0.25}\right)$$

Koefficienterna identifieras genom att göra liknämnigt och sätta likhet mellan vänster och höger led. Då fås (C kan bestämmas med handpåläggning)

$$As(s+0.25)+B(s+0.25)+Cs^2 \equiv 1$$

Sålunda måste följande vara uppfyllt

$$\begin{cases} s^2 : A+C=0 \\ s^1 : 0.25A+B=0 \\ s^0 : 0.25B=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=-16 \\ B=4 \\ C=16 \end{cases}$$

$V(s)$ kan därför skrivas som

$$\begin{aligned} V(s) &= (1-e^{-s})\left(-\tfrac{16}{s}+\tfrac{4}{s^2}+\tfrac{16}{s+0.25}\right) = \\ &= 4\left\{\left(\tfrac{1}{s^2}-4\left(\tfrac{1}{s}-\tfrac{1}{s+0.25}\right)\right)-e^{-s}\left(\tfrac{1}{s^2}-4\left(\tfrac{1}{s}-\tfrac{4}{s+0.25}\right)\right)\right\} \end{aligned}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$v(t)=4\{(t-4(1-e^{-0.25t}))\theta(t)-(t-1-4(1-e^{-0.25(t-1)}))\theta(t-1)\}$$

c) Beräkna $v(t)$ för $u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1/h & 0\le t\le h \\ 0 & t>h \end{cases}$

Skriv $u(t)$ med hjälp av stegfunktioner

$$u(t)=\frac{1}{h}(\theta(t)-\theta(t-h))$$

Laplacetransformering av $u(t)$ ger

$$U(s)=\frac{1}{h}\frac{1-e^{-hs}}{s}$$

och $V(s)$ fås som

$$\begin{aligned} V(s) &= G(s)U(s)=\frac{1}{s+0.25}\cdot\frac{1}{h}\frac{1-e^{-hs}}{s}=\frac{1}{h}(1-e^{-hs})\left(\frac{4}{s}-\frac{4}{s+0.25}\right) \\ &= \frac{4}{h}\left\{\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+0.25}\right)-\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+0.25}\right)e^{-hs}\right\} \end{aligned}$$

där näst sista likheten är en partialbråksuppdelning av $V(s)$ på samma sätt som ovan. Båda koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering av $V(s)$ ger

$$v(t)=\frac{4}{h}\{(1-e^{-0.25t})\theta(t)-(1-e^{-0.25(t-h)})\theta(t-h)\}$$

För att studera vad som händer då $h\to 0$ definieras $f(t)=4(1-e^{-0.25t})\theta(t)$. $v(t)$ kan då skrivas som

$$v(t)=\frac{f(t)-f(t-h)}{h}$$

Gränsvärdet då $h\to 0$ (från höger) är detsamma som definitionen av derivata, dvs

$$\lim_{h\to 0^+} v(t)=\frac{d}{dt}f(t)$$

Därför kan gränsvärdet beräknas genom att derivera $f(t)$. Då fås

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} v(t) &= \frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}\{4(1-e^{-0.25t})\theta(t)\} \\
&= e^{-0.25t}\theta(t) + 4(1-e^{-0.25t})\delta(t)\} \\
&= e^{-0.25t}\theta(t) + 4\underbrace{(1-e^{0})}_{0}\delta(t) \\
&= e^{-0.25t}\theta(t)
\end{aligned}$$

Om $u(t)$ i stället är en impuls $u(t) = \delta(t)$ fås

$$V(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+0.25}$$

vars inverslaplacetransform är

$$v(t) = e^{-0.25t}\theta(t)$$

Gränsvärdet då $h \to 0$ för insignalen ovan och impulsfunktionssvaret ger med andra ord samma resultat.

d) Linjära system innebär att signaler kan superponeras (adderas). Detta innebär att utseendemässigt ser alla signaler lika ut men värdena skiljer sig åt med en konstant faktor. I fallet då man utgår från hastigheten $v(t) = 20\ m/s$ och styrsignalen förändras lika mycket som innan, innebär detta att alla utsignaler är samma förutom att $20\ m/s$ måste adderas till signalen $v(t)$.

2.10

För ett fjäder-massa system är den hastighetsproportionella dämpningen inte alltför stor (beroende på friktion, luftmotstånd, mm). b är i alla fall större än eller lika med noll. Är systemet friktionsfritt så är $b = 0$.

a) Vi låter

$$u(t) = \sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Differentialekvationen Laplacetransformeras och vi får

$$sV(s) + bV(s) + \frac{1}{s}V(s) = U(s)$$

$$s^2V(s) + bsV(s) + V(s) = sU(s)$$

Överföringsfunktionen blir således

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2+bs+1}$$

och stegsvaret fås med hjälp av formelsamlingen som

$$\begin{aligned}
v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+bs+1}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+\frac{b}{2}\right)^2+1-\frac{b^2}{4}}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}}e^{-\frac{b}{2}t}\sin\sqrt{1-\frac{b^2}{4}}t
\end{aligned}$$

b)

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{s}{s^2 + bs + 1}$$

Systemets poler ges av nämnarpolynomen

$$s^2 + bs + 1 = 0$$

och blir således

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}$$

Systemet är alltså stabilt för alla $b > 0$.

Processen har ett nollställe i origo. Detta kan tolkas som att stegsvaret av $G(s)$ är derivatan av stegsvaret av systemet

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + bs + 1}$$

c)

$$\begin{aligned} y(\infty) &= \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}V(s) \\ &= \lim_{s\to 0} G(s)\cdot U(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+bs+1}\frac{1}{s} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jämförelse med resultatet i uppgift a) visar att detta stämmer enbart då $b > 0$, dvs. då svängningens amplitud avtar ($e^{-\frac{b}{2}t}$). I så fall går hastigheten mot noll och därmed positionen mot ett ändligt värde.

2.11

Laplacetransformering av

$$\ddot{y} - y(t) = u(t) - b\dot{u}(t)$$

resulterar i

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - Y(s) = U(s) - b\{sU(s) - u(0)\}$$

Stegsvaret studeras allmänt i fallet då $u(0) = 0$ och $\dot{y}(0) = 0$. Då fås

$$(s^2 - 1)Y(s) = sy(0) + \frac{1}{s} - b = \frac{s^2y(0) - bs + 1}{s}$$

och följaktligen

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2y(0) - bs + 1}{s(s^2-1)} = \frac{s^2y(0) - (bs-1)}{s(s+1)(s-1)} \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{y(0)+b+1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{y(0)-b+1}{2}\frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Den sista likheten är en partialbråksuppdelning av $Y(s)$. Koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \big(-1 + \frac{y(0)+b+1}{2}e^{-t} + \frac{y(0)-b+1}{2}e^{t}\big)\theta(t)$$

vilket resulterar i

a) $y(0) = 0, b = 1 \Rightarrow y(t) = (-1 + e^{-t})\theta(t)$

b) $y(0) = 1, b = 1 \Rightarrow y(t) = (-1 + 1.5e^{-t} + 0.5e^{t})\theta(t)$

c) $y(0) = 0, b \neq 1 \Rightarrow y(t) = (-1 + \frac{b+1}{2}e^{-t} + \frac{-b+1}{2}e^{t})\theta(t)$

Den instabila polen kancelleras bort i fallet när $y(0) - b + 1 = 0$.

2.12

Systemet är $G(s) = \dfrac{Ke^{-sT_d}}{1+Ts}$ och insignalen ett steg $U(s) = 1/s$. Stigtiden är oberoende av dödtiden, dvs samma resultat fås i fallet $T_d = 0$. Utsignalen är då

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{1+Ts}\frac{1}{s} = K\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}\right)$$

Den sista likheten är en partialbråksuppdelning av $Y(s)$. Koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})\theta(t)$$

För att beräkna stigtiden behövs slutvärdet. $\lim_{t\to\infty} y(t) = K$. Låt $t_{10\%}$ och $t_{90\%}$ beteckna tiderna när slutvärdet uppnått 10% respektive 90% av sitt slutvärde. Följande ekvationer fås

$$\begin{aligned} y(t_{10\%}) = 0.1K = K(1 - e^{-t_{10\%}/T}) &\Rightarrow t_{10\%} = -T\ln 0.9 = T\ln 1/0.9 \\ y(t_{90\%}) = 0.9K = K(1 - e^{-t_{90\%}/T}) &\Rightarrow t_{90\%} = -T\ln 0.1 = T\ln 1/0.1 \end{aligned}$$

Sålunda kan stigtiden t_s beräknas enligt

$$t_s = t_{90\%} - t_{10\%} = T\ln 10 - T\ln 1/0.9 = T\ln 9 = 2T\ln 3$$

2.13

Laplacetransformering av

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -2y + x + u \end{aligned}$$

resulterar i

$$\begin{aligned} &sX(s) = -X(s) + U(s) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}U(s) \\ &sY(x) = -2Y(s) + X(s) + U(s) \end{aligned}$$

Insättes första uttrycket i andra fås

$$(s+2)Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) + U(s) = \frac{s+2}{s+1}U(s)$$

dvs

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Systemet är stabilt ty pol i vänstra halvplanet.
Rampsvaret blir

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s) \quad \text{där} \quad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

vilket, efter partialbråksuppdelning, resulterar i

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = (t - 1 + e^{-t})\theta(t)$$

2.14

A-3: Initialt ger steget upphov till hopp i A
B-1: Filtrerad signal A
C-2: Fitrerad signal B
D-4: Integrerad signal C med slutvärde 1 som steget

2.15

Insignal till termometern är $u(t) = kt$, där $k = 0.1$. Laplacetransformering ger $U(s) = 0.1/s^2$. Termometern har tidskonstant T=20 sekunder, vilket motsvarar en överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{1+20s}$$

Felvisningen $\Delta T(t)$ är skillnaden mellan verklig och mätt temperatur, vilket innebär

$$\begin{aligned}
\Delta T(s) &= U(s) - G(s)U(s) = (1 - G(s))U(s) \\
&= \big(1 - \frac{1}{1+20s}\big)\frac{0.1}{s^2} = \frac{1+20s-1}{1+20s}\frac{0.1}{s^2} = \frac{0.1 \cdot 20s}{s^2(1+20s)} = \frac{2}{s(1+20s)} \\
&= \frac{2}{s} - \frac{40}{1+20s}
\end{aligned}$$

Den sista likheten fås genom partialbråksuppdelning. Koefficienterna kan bestämmas med handpåläggning. Inverslaplacetransformering ger

$$\Delta T(t) = 2(1 - e^{-t/20})\theta(t)$$

och den stationära felvisningen blir

$$\lim_{t\to\infty} \Delta T(t) = 2$$

Detta resultat kan alternativt erhållas också genom att tillämpa slutvärdessatsen på $\Delta T(s)$.

2.16

Ur figurerna fås

a) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2$, reella poler, inga nollställen i högra halvplanet.

b) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1.5$, reella poler, minst ett nollställe i högra halvplanet.

c) $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$, komplexkonjugerat polpar och gradtal i nämnare som är större än 2.

Slutvärdessatsen ger $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} Y(s)$

Överföringsfunktion	$\lim_{s\to 0} Y(s)$	Poler	Nollställe
(1)	2	$-0.5, -3$	2
(2)	2	$-0.5, -2/3$	–
(3)	1	$-0.4\pm, \sqrt{0.84}$	–
(4)	1.5	$-2/3, -0.5$	–
(5)	1.5	$-2, -3$	2
(6)	1	$-1/3, -0.05\pm, \sqrt{0.9975}$	–

Uteslutningsmetoden ger

a) och (2)
b) och (5)
c) och (6)

2.17

a) Stegsvaret utan återkoppling innebär att vi endast betraktar integralprocessen som har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s}$$

$$u(t) = \sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

Lägg märke till att $v(t)$ antas vara noll så vi endast är intresserade i sambandet mellan $u(t)$ och $y(t)$.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{K}{s}\frac{1}{s} = \frac{K}{s^2}$$

Inverslaplacetransformation ger

$$y(t) = Kt\sigma(t)$$

b) För att beräkna G_{ry} sätter vi igen $v(t) = 0$.

$$G_{ry} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_pK}{K_pK + s}$$

Det återkopplade systemets pol är

$$s = -K_pK$$

Polen flyttas längre åt vänster i s-planet då K_p ökar. Detta medför att systemet blir snabbare (första ordningens system).

c) Stegsvaret för det återkopplade system:

$$r(t) = \sigma(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G_{ry}(s) \cdot R(s) = \frac{K_pK}{K_pK + s}\frac{1}{s} = \frac{K_pK}{s(K_pK + s)}$$

Inverslaplacetransformation med hjälp av formelsamlingen ger

$$y(t) = \left(1 - e^{-K_pKt}\right)\sigma(t)$$

Om polen flyttas längre åt vänster i VHP ökar systemets snabbhet (snabbare tidskonstant för detta första ordningens system).

$$G_{ry} = \frac{K_pK}{K_pK + s} = \frac{1}{1 + \frac{s}{K_pK}} = \frac{K}{1 + Ts}$$

2.18

a)

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{1 + L(s)} = \frac{K_ps}{s + K_pK}$$

Polen för det återkopplade system ligger som i uppgift 2.17 i $s = -K_pK$.

b) Med insignalen

$$r(t) = \sigma(t) \longrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$$

blir styrsignalen

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G_{ru}(s) \cdot R(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_p}{s + K_pK}\right\} = K_pe^{-K_pKt}$$

Lägg märke till att styrsignalen är störst vid $t = 0$.

c) Vi beräknar $u(0)$ till följd av ett referenssteg med hjälp av begynnelsevärdessatsen i Laplace

$$\begin{aligned} u(0) &= \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty} sG_{ru}R(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} G_{ru} = K_p \end{aligned}$$

Detta stämmer överens med resultatet i del b)

$$u(0) = \lim_{t\to 0} u(t) = K_p$$

Hög regulatorförstärkning gör alltså att polen vandrar åt vänster i VHP, systemet blir snabbare (tidskonstanten blir snabbare) men styrsignalen blir större (aggressivare styrning). Priset för ett snabbt återkopplat system är höga styrsignaler.

2.19

a)

$$G_{re}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{s}{s+K_pK}$$

b) Låt

$$r(t) = \sigma(t) \longrightarrow R(s) = \frac{1}{s}$$

Då får vi

$$E(s) = G_{re}(s) \cdot R(s) = \frac{1}{s+K_pK}$$

vilket efter inverslaplacetransformation ger

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+K_pK}\right\} = e^{-K_pK}$$

c) Kriteriet kan översättas till Laplace

$$J_r = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(\tau)d\tau = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}E(s) = E(0) = \frac{1}{K_pK}$$

Ju högre K_p ju bättre följs referenssignalen.

2.20

a) För att beräkna störöverföringsfunktionen G_{vy} sätter vi $r(t) = 0$.

$$G_{vy}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{-K}{s+K_pK}$$

b) Det kvarstående värdet på utsignalen $y(t)$ efter en stegstörning, dvs.

$$v(t) = \sigma(t) = \longrightarrow V(s) = \frac{1}{s}$$

blir med hjälp av slutvärdessatsen i Laplace:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= lim_{s\to 0}Y(s) \\ &= lim_{s\to 0}sG_{vy}\cdot V(s) \\ &= lim_{s\to 0}s\frac{-K}{s+K_pK}\frac{1}{s} \\ &= lim_{s\to 0}\frac{-K}{s+K_pK} \\ &= -\frac{1}{K_p} \end{aligned}$$

Ju högre förstärkning ju mindre kvarstående fel. Lägg märke till att vi får ett kvarstående fel efter stegstörning trots att det finns en integration i processen. Det krävs en integration i regulatorn för att få bort kvarstående fel efter stegstörningar.

c) Den nya regulatorn beskrivs av

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Överföringsfunktionen G_{vy} blir i detta fall

$$G_{vy}(s) = \frac{-Ks}{s^2+K_pKs+K_iK}$$

Detta kan jämföras med den generella överföringsfunktionen för andra ordningens system:

$$G_{vy}(s) = \frac{K_1\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

Identifierar man variablerna så får man:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{K_i K} \\ \zeta &= \frac{K_p K}{2\omega_n} = 0.5K_p\sqrt{\frac{K}{K_i}} \end{aligned}$$

Speciellt noterar vi att $\zeta = 0.5$ då

$$\frac{\sqrt{K_i}}{K_p} = \sqrt{K}$$

d) Det kvarstående värdet på utsignalen $y(t)$ efter en stegstörning, dvs.

$$v(t) = \sigma(t) \longrightarrow V(s) = \frac{1}{s}$$

blir med hjälp av slutvärdessatsen i Laplace:

$$\begin{aligned} y(\infty) &= lim_{s\to 0}Y(s) \\ &= lim_{s\to 0}sG_{vy}\cdot V(s) \\ &= lim_{s\to 0}s\frac{-Ks}{s^2 + K_pKs + K_iK}\frac{1}{s} \\ &= lim_{s\to 0}\frac{-Ks}{s^2 + K_pKs + K_iK} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eftersom vi utgick ifrån att $r(t) = 0$ så blir slutvärdet noll.

2.21

a) Återkoppling ger

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_p\frac{\frac{K}{1+sT}}{1+K_d\frac{K}{1+sT}}\frac{1}{s}}{1+K_p\frac{\frac{K}{1+sT}}{1+K_d\frac{K}{1+sT}}\frac{1}{s}} = \frac{K_pK/T}{s^2 + \frac{1+K_dK}{T}s + \frac{K_pK}{T}}$$

Identifiering av nämnaren med en dubbelpol i $s = -\alpha$ ger

$$s^2 + \frac{1+K_dK}{T}s + \frac{K_pK}{T} \equiv (s+\alpha)^2 \quad \text{där} \quad K = 3,\ T = 0.5$$

vilket innebär att

$$\begin{cases} \dfrac{1+K_dK}{T} = 2\alpha & \Rightarrow\ K_d = \dfrac{2\alpha T - 1}{K} = \dfrac{\alpha - 1}{3} \\ \dfrac{K_pK}{T} = \alpha^2 & \Rightarrow\ K_p = \dfrac{\alpha^2 T}{K} = \dfrac{\alpha^2}{6} \end{cases}$$

Sålunda fås

$$\frac{\theta(s)}{\theta_r(s)} = \frac{\frac{\alpha^2}{6}\cdot\frac{3}{0.5}}{(s+\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}$$

b) Stegsvaret är

$$\theta(s) = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+\alpha)} - \frac{\alpha}{(s+\alpha)^2}$$

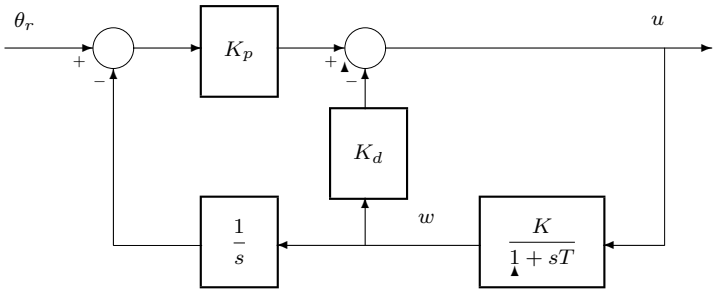
Den sista likheten är en partialbråksuppdelning av $Y(s)$. Inverslaplacetransformering ger

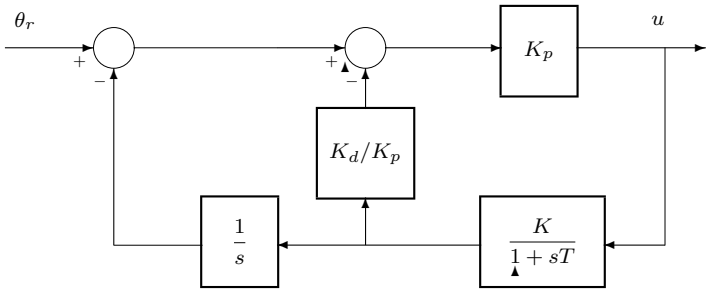
$$\theta(t) = 1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} \quad t \geq 0$$

vilket innebär att

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1 & \Rightarrow & \theta(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \quad , t \geq 0 \\ \alpha = 5 & \Rightarrow & \theta(t) = 1 - e^{-5t} - 5te^{-5t} \quad , t \geq 0 \end{array}$$

Överföringsfunktionen mellan referenssignalen $\theta_r(s)$ och styrsignalen $U(s)$ kan fås genom blochschematransformationer enligt





vilket resulterar i

$$\frac{U(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_p}{1 + K_p\left(\frac{K_d}{K_p} + \frac{1}{s}\right)\frac{K}{1+sT}} = \frac{sK_p(s+1/T)}{(s+\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{6}\frac{s(s+2)}{(s+\alpha)^2}$$

Stegsvaret är

$$U(s) = \frac{\alpha^2}{6}\frac{s(s+2)}{(s+\alpha)^2}\frac{1}{s} = \frac{\alpha^2}{6}\frac{s+\alpha-\alpha+2}{(s+\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{6}\frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha^2}{6}\frac{2-\alpha}{(s+\alpha)^2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$u(t) = \frac{\alpha^2}{6}e^{-\alpha t} + \frac{\alpha^2}{6}(2-\alpha)te^{-\alpha t} \quad , t \geq 0$$

vilket innebär att

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1 & \Rightarrow & u(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}te^{-t} \quad , t \geq 0 \\ \alpha = 5 & \Rightarrow & u(t) = \frac{25}{6}e^{-5t} - \frac{25}{2}te^{-5t} \quad , t \geq 0 \end{array}$$

Speciellt är initialvärdet

$$u(0) = \frac{\alpha^2}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1, & u(0) = 1/6 \\ \alpha = 5, & u(0) = 25/6 \end{cases}$$

Motsättningen som råder är att ju snabbare system (α större) desto högre styrsignalsaktivitet.

2.22

a) Låt $L(s) = F(s)G(s)$ beteckna kretsöverföringsfunktionen. Då fås följande överföringsfunktioner med hjälp av återkoppling

$$\begin{aligned}
G_{ry}(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{4}{1+4s}\frac{K_p s+K_i}{s}}{1+\frac{4}{1+4s}\frac{K_p s+K_i}{s}} = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i} \\
G_{ru}(s) &= \frac{F(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{K_p s+K_i}{s}}{1+\frac{4}{1+4s}\frac{K_p s+K_i}{s}} = \frac{K_p s^2 + \frac{4K_i+K_p}{4}s + \frac{K_i}{4}}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i} \\
G_{vy}(s) &= -\frac{G(s)}{1+L(s)} = -\frac{\frac{4}{1+4s}}{1+\frac{4}{1+4s}\frac{K_p s+K_i}{s}} = \frac{-s}{s^2 + \frac{1+4K_p}{4}s + K_i}
\end{aligned}$$

b) Felet $E(s) = R(s) - Y(s)$ beror på $R(s)$ och $V(s)$ enligt

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{1}{1+L(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1+L(s)}V(s) = \frac{1}{1+\frac{4}{1+4s}\left(\frac{K_p s+K_i}{s}\right)}R(s) + \frac{\frac{4}{1+4s}}{1+\frac{4}{1+4s}\left(\frac{K_p s+K_i}{s}\right)}V(s) \\
&= \frac{1}{4}\frac{s(1+4s)}{\left(s^2+\frac{1+4K_p}{4}s+K_i\right)}R(s) + \frac{s}{s^2+\frac{1+4K_p}{4}s+K_i}V(s)
\end{aligned}$$

vilket fås genom återkoppling. Kvarstående felet är

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

där sista likheten enbart gäller för stabila system. I fallen börvärdesändringar och laststörningar fås följande.

I) Börvärdesändringar, $v(t)$ sätts lika med 0.

$$R(s) = 1/s \;\Rightarrow\; e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s} = 0 \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s = \frac{1}{1+4K_p})$$

$$R(s) = 1/s^2 \;\Rightarrow\; e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+L(s)}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{4K_i} \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s \to \infty)$$

II) Laststörningar, $r(t)$ sätts lika med 0.

$$V(s) = 1/s \;\Rightarrow\; e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{1+L(s)}\frac{1}{s} = 0 \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s = \frac{4}{1+4K_p})$$

$$V(s) = 1/s^2 \Rightarrow\; e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{1+L(s)}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{K_i} \quad (\text{Om } K_i = 0 \text{ så } e_s \to \infty)$$

c) Styrsignalens startvärde ges av begynnelsevärdessatsen

$$u(0) = \lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty} sG_{ru}(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} G_{ru}(s) = K_p$$

Följande slutsatser kan dras

- Ju större K_p desto högre styrsignalsaktivitet ($u(0)$) för både P och PI-reg.
- I fallet P-reg, ju större K_p desto mindre kvarstående fel vid steg i r eller v. Dock går felet mot oändligheten vid rampformade börvärden och laststörningar.
- I fallet PI-reg, integralverkan innebär 0 i kvarstående fel vid steg i r eller v, och ett konstant värde för ramp. Det konstanta värdet är mindre ju högre K_i är.

2.23

a) Öppna systemet

Överföringsfunktionen från $R(s)$ till $Y(s)$ är

$$G_{ry}(s) = K_r \frac{K}{(1+s)^m}$$

Stationärvärdet y_s för konstant börvärde fås med slutvärdessatsen enligt

$$y_s = \lim_{s \to 0} sG_{ry}\frac{r}{s} = rG_{ry}(0)$$

vilket skall vara ekvivalent lika med r enligt uppgift. Detta innebär att $G_{ry}(0) = 1$, dvs lågfrekvensförstärkningen måste vara 1. Eftersom $G_{ry}(0) = K_r K$ innebär detta att $K_r = 1/K = 0.5$.

b) Öppna systemet

Slutvärdessatsen ger att

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sG_{ry}(s)\frac{1}{s} = G_{ry}(0) = 0.5K$$

Slutna systemet

För det slutna systemet blir överföringsfunktionen

$$G_{ry}(s) = \frac{K_p \dfrac{K}{(1+s)^m}}{1 + K_p \dfrac{K}{(1+s)^m}} = \frac{K_p K}{(1+s)^m + K_p K}$$

Slutvärdessatsen ger

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sG_{ry}(s)\frac{1}{s} = G_{ry}(0) = \frac{K_p K}{1 + K_p K}$$

Följande skillnader mellan öppna och slutna systemet fås

- Öppna systemets slutvärde ökar med ökande K,
- Slutna systemet slutvärde går mot 1 när $K_p K$ är stort, dvs genom att ha hög förstärkning K_p i regulatorn så är slutna systemets slutvärde nära 1.

c) Felet är definierat enligt

$$E(s) = R(s) - Y(s) = -Y(s)$$

där sista likheten följer eftersom inverkan av laststörningar skall studeras vilket innebär att $R(s) = 0$.

Öppna systemet

$Y(s)$ beror av $V(s)$ enligt

$$Y(s) = -G_{vy}(s)V(s) \quad \text{där} \quad G_{vy} = \frac{K}{(1+s)^m}$$

och följaktligen fås

$$E(s) = G_{vy}(s)V(s)$$

Det kvarstående felet blir

$$e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{(1+s)^m}\frac{1}{s} = K$$

Slutna systemet

För det slutna systemet beror $Y(s)$ av $V(s)$ enligt

$$Y(s) = -G_{vy}(s)V(s), \quad \text{där} \quad G_{vy}(s) = \frac{\dfrac{K}{(1+s)^m}}{1+K_p\dfrac{K}{(1+s)^m}} = \frac{K}{(1+s)^m + K_pK}$$

och följaktligen fås

$$E(s) = G_{vy}(s)V(s)$$

Det kvarstående felet blir

$$e_s = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{(1+s)^m + K_pK}\frac{1}{s} = \frac{K}{1+K_pK}$$

under förutsättning att systemet är stabilt. Systemet är stabilt om $K_pK + 1 > 0$ för både $m = 1, 2$ (dvs $K_p > 0, K > 0$ tillräckligt för stabilitet).

d) återkopplade system med $m = 2$; $K_p = 99$ och $K = 1$

Nämnarpolynomen för det återkopplade systemet ges av

$$99 + 1 + 2s + s^2 = s^2 + 2s + 100$$

Detta kan jämföras med en generell 2:a grads polpolynom

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Identifiering av koefficienterna ger

$$\omega_n = 10$$
$$\zeta = \frac{2}{2\omega_n} = 0.1$$

återkopplade system med $m = 1$, resten som ovan

Nämnarpolynomen för det slutna system ges i detta fall av

$$99 + s + 1 = s + 100$$

Systemet har alltså en reell pol i $s = -100$, dvs. systemet svänger inte och har en fasmarginal av minst 90 grader.

öppna systemet

Oberoende hur vi väljer m så kommer det öppna systemet i vårt fall alltid ha reella poler och därmed en dämpning $\zeta \geq 1$. Systemet kommer alltså aldrig att svänga.

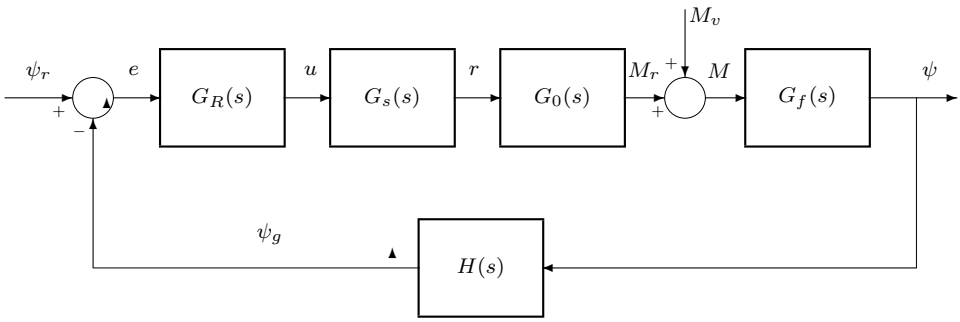
e) Följande slutsatser kan dras

- Fördelar öppen styrning: Inga stabilitetsproblem om processen stabil
- Nackdelar öppen styrning: Känslig för parametervariationer och störningar
- Fördelar återkoppling: Okänslig för parametervariationer vid hög kretsförstärkning (K_pK); och störningar för hög regulatorförstärkning (K_p).
- Nackdelar återkoppling: För hög kretsförstärkning (K_pK) minskar stabilitetsmarginalerna och kan leda till instabilitet.

En första ordningens process som styrs av en ren P-regulator kan aldrig få en dämpning som är mindre än 1. Fasmarginalen kommer alltid att vara minst 90 grader.

Däremot kan en första ordningens system snabbas upp med hjälp av P-reglering jämfört med öppen styrning.

2.24



Regulator:	$u = 0.5e$	$\Rightarrow$	$G_R(s) = 0.5$
Roderservo:	$5\dot{r} + r = 0.1u$	$\Rightarrow$	$G_s(s) = \dfrac{0.1}{5s+1} = \dfrac{0.02}{s+0.2}$
Fartyget:	$100\ddot{\psi} + \dot{\psi} = 0.1M$	$\Rightarrow$	$G_f(s) = \dfrac{0.1}{100s^2+s} = \dfrac{1\cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}$
Givare:	$\psi_g = 0.1\psi$	$\Rightarrow$	$H(s) = 0.1$
Omv. faktor:	$M_r = 1\cdot 10^3 r$	$\Rightarrow$	$G_0(s) = 1\cdot 10^3$

- Kretsöverföringen $L(s)$ är

$$L(s) = G_R(s)G_S(s)G_0(s)G_f(s)H(s) = 0.5\frac{0.02}{s+0.2}1\cdot 10^3\frac{1\cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}0.1$$

dvs alla överföringsfunktioner i återkopplingen

Utsignalen $\psi(s)$ beror av $\psi_r(s)$ och $M_v(s)$ enligt

$$\psi(s) = G_1(s)\psi_r(s) + G_2(s)M_v(s)$$

där $G_1(s)$ och $G_2(s)$ sökes.

- $G_1(s) = \dfrac{\psi(s)}{\psi_r(s)}$; $\quad M_v = 0$, $\quad$ Genom återkoppling fås

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{G_R G_s G_0 G_f}{1 + G_R G_s G_0 G_R H} = \frac{0.5\frac{0.02}{s+0.2}1\cdot 10^3\frac{1\cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}}{1 + 0.5\frac{0.02}{s+0.2}1\cdot 10^3\frac{1\cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}0.1} \\ &= \frac{0.01}{s(s+0.2)(s+0.01)+0.001} = \frac{0.01}{s^3+0.21s^2+0.002s+0.001} \\ &= \frac{5}{500s^3+105s^2+s+0.5} \end{aligned}$$

Sambandet mellan ψ och ψ_r kan även beskrivas med en differentialekvation

$$500\dddot{\psi} + 105\ddot{\psi} + \dot{\psi} + 0.5\psi = 5\psi_r$$

- $G_2(s) = \dfrac{\psi(s)}{M_v(s)}; \quad \psi_r = 0,$ Genom återkoppling fås

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{G_f}{1 + G_R G_s G_0 G_R H} = \frac{\dfrac{1 \cdot 10^{-3}}{s(s+0.01)}}{1 + 0.5\dfrac{0.02}{s+1.2} 1 \cdot 10^3 \dfrac{1 \cdot 10^3}{s(s+0.01)0.1}} \\ &= \frac{1 \cdot 10^{-3}(s+0.2)}{s(s+0.2)(s+0.09) + 0.0001} = \frac{0.5(s+0.2)}{500s^3 + 105s^2 + s + 0.5} \end{aligned}$$

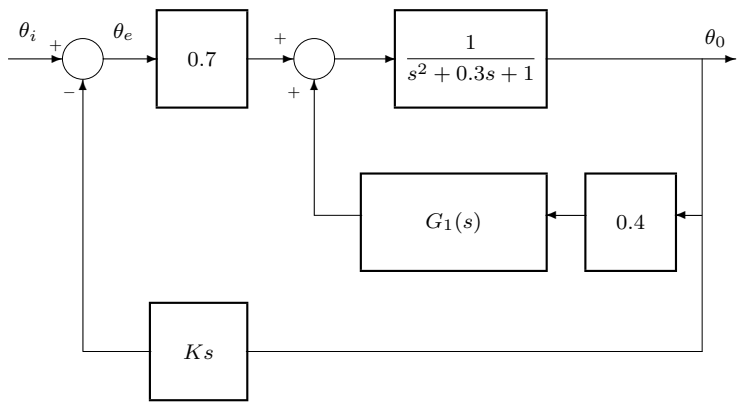
Motsvarande differentialekvation

$$500\dddot{\psi} + 105\ddot{\psi} + \dot{\psi} + 0.5\psi = 0.5\dot{M}_v + 0.1M_v$$

2.25

Bestäm överföringsfunktionen $\dfrac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}$ genom blockschematransformationer.

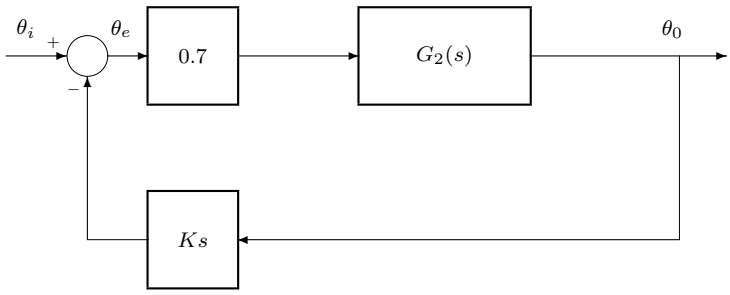
Återkoppling ger att $G_1(s)$ enligt figur blir



$$G_1(s) = \frac{\dfrac{-1}{1+2s}}{1 + 0.5\dfrac{1}{1+2s}} = \frac{-1}{1+2s+0.5} = \frac{-1}{2s+1.5} = \frac{-0.5}{s+0.75}$$

På samma sätt fås $G_2(s)$ enligt figur som

$$G_2(s) = \frac{\dfrac{1}{s^2+0.3s+1}}{1 + \dfrac{1}{s^2+0.3s+1} 0.4 \dfrac{0.5}{s+0.75}} = \frac{s+0.75}{(s^2+0.3s+1)(s+0.75)+0.2} = \frac{s+0.75}{s^3+1.05s^2+1.225s+0.95}$$



Slutligen fås $\dfrac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}$ genom ytterligare återkoppling

$$\begin{aligned}\frac{\theta_i(s)}{\theta_0(s)} &= \frac{0.7G_2(s)}{1+0.7G_2(s)Ks} = \frac{0.7\dfrac{(s+0.75)}{s^3+1.05s^2+1.225s+0.95}}{1+0.7\dfrac{(s+0.75)}{s^3+1.05s^2+1.225s+0.95}Ks} \\ &= \frac{0.7(s+0.75)}{s^3+(1.05+0.7K)s^2+(1.225+0.525K)s+0.95}\end{aligned}$$

Kretsförstärkningen är

$$L(s) = 0.7G_2(s)Ks = 0.7\frac{(s+0.75)}{s^3+1.05s^2+1.225s+0.95}Ks$$

2.26

a) Återkoppling ger att z beror av r och v enligt

$$z = F_r\frac{F_uG_uG_z}{1+F_uG_uG_zF_z}r + F_{fr}\frac{G_uG_z}{1+F_uG_uG_zF_z}r + F_{fv}\frac{G_uG_z}{1+F_uG_uG_zF_z}v + G_v\frac{G_z}{1+F_uG_uG_zF_z}v$$

Överföringsfunktionen från r till z blir, genom att sätta $v=0$

$$G_{rz} = (F_rF_u + F_{fr})\frac{G_uG_z}{1+F_uG_uG_zF_z}$$

och överföringsfunktionen från v till z blir, genom att sätta $r=0$

$$G_{vz} = (F_{fv}G_u + G_v)\frac{G_z}{1+F_uG_uG_zF_z}$$

Kretsförstärkningen $L(s)$ blir

$$L(s) = F_uG_uG_zF_z$$

b) Om $F_{fv}G_u + G_v \equiv 0$ så beror ej z av v, dvs låt

$$F_{fv} = -G_v/G_u$$

Om $(F_rF_u + F_{fr})\dfrac{G_uG_z}{1+F_uG_uG_zF_z} \equiv 1$ så är $z=r$, dvs låt

$$F_{fr} = \frac{1+F_uG_uG_zF_z}{G_uG_z} - F_rF_u = \frac{1+(F_z-F_r)F_uG_uG_z}{G_uG_z}$$

Komplikationer i sammanhanget:

- Såväl F_{fv} och F_{fr} blir instabila om G_u har minst ett nollställe i högra halvplanet. F_{fr} blir instabil också om G_z har minst ett nollställe i högra halvplanet.
- Såväl F_{fv} och F_{fr} kan blir icke-propra (dvs gradtalet i täljaren större än gradtalet i nämnaren).

Exempelvis om $G_u = -\dfrac{(s-1)}{s^2},\ G_v = 1,\ G_z = \dfrac{s-2}{(s+1)(s+2)}$ och $F_z = F_r$ så är

$$F_{fv} = \frac{s^2}{s-1}, \quad F_{fr} = -\frac{s^2}{(s-1)}\frac{(s+1)(s+2)}{(s-2)}$$

vilka båda är instabila och icke-propra.

2.27

$$z = \frac{F_{uz}\dfrac{F_{ux}G_uG_x}{1+F_{ux}G_uG_x}G_z}{1+F_{uz}\dfrac{F_{ux}G_uG_x}{1+F_{ux}G_uG_x}G_zF_z}r + G_v\frac{G_xG_z}{1+G_xG_z(F_{uz}F_z+\dfrac{1}{G_z})F_{ux}G_u}v$$

Den andra överföringsfunktionen fås genom att flytta knutpunkten vid x till z och kompensera med $1/G_z$. Återkoppling, som för den första överföringsfunktionen, ger ovan resultat.

Förenkling ger

$$z = \underbrace{\frac{F_{uz}F_{ux}G_uG_xG_z}{1+F_{ux}G_uG_x+F_{uz}F_{ux}F_zG_uG_xG_z}}_{G_{rz}}r + \underbrace{\frac{G_vG_xG_z}{1+F_{ux}G_uG_x+F_{uz}F_{ux}F_zG_uG_xG_z}}_{G_{vz}}v$$

Kretsöverföringen är

$$L(s) = F_{ux}G_uG_x + F_{uz}F_{ux}F_zG_uG_xG_z$$

2.28

Låt $P(s) = A(s)C(s) + B(s)D(s)$. Återkoppling ger att

$$\begin{aligned}
G_{ry}(s) &= K_r\frac{\dfrac{D(s)}{C(s)}\dfrac{B(s)}{A(s)}}{1+\dfrac{D(s)}{C(s)}\dfrac{B(s)}{A(s)}} = K_r\frac{B(s)D(s)}{P(s)} \\
G_{vy}(s) &= \frac{\dfrac{B(s)}{A(s)}}{1+\dfrac{D(s)}{C(s)}\dfrac{B(s)}{A(s)}} = \frac{B(s)C(s)}{P(s)} \\
G_{ru}(s) &= K_r\frac{\dfrac{D(s)}{C(s)}}{1+\dfrac{D(s)}{C(s)}\cdot\dfrac{B(s)}{A(s)}} = K_r\frac{A(s)D(s)}{P(s)} \\
G_{vu}(s) &= \frac{-\dfrac{B(s)}{A(s)}\cdot\dfrac{D(s)}{C(s)}}{1+\dfrac{D(s)}{C(s)}\cdot\dfrac{B(s)}{A(s)}} = -\frac{B(s)D(s)}{P(s)}
\end{aligned}$$

<u>Förstärkning K_r</u>

Lågfrekvensförstärkning 1 från r till y innebär att

$$\lim_{s\to 0} G_{ry}(s) = G_{ry}(0) = K_r \frac{B(0)D(0)}{P(0)} = 1$$

vilket medför att

$$K_r = \frac{P(0)}{B(0)D(0)}$$

<u>Egenskaper $C(s)$</u>
Kvarstående fel efter stegstörningar skall undvikas. Detta medför att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG_{vy}(s)\frac{1}{s} = 0$$

vilket innebär att

$$G_{vy}(0) = \frac{B(0)C(0)}{P(0)} = 0$$

dvs $C(0) = 0$ (integralverkan i regulatorn). Slutvärdessatsen ovan gäller under förutsättning att systemet är stabilt, dvs $P(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet.

Då

$$\frac{D(s)}{C(s)} = \frac{2(s+1)}{s}, \quad \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

blir

$$P(s) = (s+1)^2 s + 1 \cdot 2(s+1) = (s+1)(s^2+s+2) = (s+1)\Big(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}\Big)\Big(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2}\Big)$$

dvs poler i -1 och $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

3

Tillståndsmodeller

Notera att valet av tillstånd i en tillståndsrepresentation inte är unika; flera lösningar är möjliga.

3.1

a)

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\dot{y}(t) + u(t) = -x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

b)

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) - 5u(t) = 0$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = \tfrac{1}{2}\left(-2y(t) - 3\dot{y}(t) + 5u(t)\right) = -x_1(t) - \tfrac{3}{2}x_2(t) + \tfrac{5}{2}u(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 4\dot{v}(t) + 5v(t) &= 2u(t) \\ \dot{y}(t) + 2y(t) &= 5v(t) \end{aligned}$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{v}(t) = \tfrac{1}{4}\left(-5v(t) + 2u(t)\right) = -\tfrac{5}{4}x_1(t) + \tfrac{1}{2}u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = 5v(t) - 2y(t) = 5x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -5/4 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) + 2v(t) &= 3u(t) \\ \ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 4y(t) &= 5v(t) \end{aligned}$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t) \\ x_2(t) &= y(t) \\ x_3(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{v}(t) = -2v(t) + 3u(t) = -2x_1(t) + 3u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 5v(t) - 4y(t) - 7\dot{y}(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t) - 7x_3(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -7 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

e)

$$y^3(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2u(t)$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= y^3(t) = -4y(t) - 3\dot{y}(t) - \ddot{y}(t) + 2u(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

f)

$$\dot{y}(t) + 3y(t) = 2\dot{u}(t) + 10u(t)$$

Låt exempelvis

$$x_1(t) \;=\; y(t) - 2u(t)$$

Derivering ger

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) - 2\dot{u}(t) = -3y(t) + 10u(t) = -3(y(t) - 2u(t)) + 4u(t) = -3x_1(t) + 4u(t)$$

vilket är samma som

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3x(t) + 4u(t) \\ y(t) &= x(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

3.2

a)

$$G(s) = \frac{4s+8}{2s^2+6s+4} = \frac{2s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} + \frac{0}{s+2}$$

Tillståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Notera att det sker en pol/nolställeskancellation för $s = -2$. Tillståndsformen kan därför reduceras med bibehållet in/ut-signal samband.

b)

$$G(s) = \frac{3}{(s+2)(s+4)} = \frac{3/2}{s+2} - \frac{3/2}{s+4}$$

Tillståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

c)

$$G(s) = \frac{s+1}{s+3} + \frac{2}{s+4} = \frac{s+3}{s+3} - \frac{2}{s+3} + \frac{2}{s+4} = 1 - \frac{2}{s+3} + \frac{2}{s+4}$$

Tillståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \end{aligned}$$

d)

$$G(s) = \frac{2s^2+10s+4}{s^2+3s+1} = \frac{2(s^2+3s+1)}{s^2+3s+1} + \frac{4s+2}{s^2+3s+1} = 2 + \frac{4s+2}{s^2+3s+1}$$

Tillståndsmodell på styrbar kanonisk form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} x(t) + 2u(t) \end{aligned}$$

e)

$$y^3(t) + \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 4y(t) = 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Laplacetransformering ger (det är möjligt att direkt välja tillstånd som i uppgift 3.1. Vi väljer dock här att Laplacetransformera först):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + 3s + 4}$$

Tillståndsmodell på styrbar kanonisk form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

3.3

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tfrac{4}{1+2s} X(s) \\ X(s) &= \tfrac{1.5}{1+0.5s} U(s) \end{aligned}$$

a) Motsvarande differentialekvationer är:

$$\begin{aligned} 2\dot{y}(t) + y(t) &= 4x(t) \\ 0.5\dot{x}(t) + x(t) &= 1.5u(t) \end{aligned}$$

Låt tillstånden vara

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) &= \tfrac{1}{2}\left(-y(t) + 4x(t)\right) &= -\tfrac{1}{2}x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{x}(t) &= \tfrac{1}{0.5}\left(-x(t) + 1.5u(t)\right) &= -2x_2(t) + 3u(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1/2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

b)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)}\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{4}{1+2s}\frac{1.5}{1+0.5s} = \frac{6}{(s+0.5)(s+2)} = \frac{6}{s^2 + 2.5s + 1}$$

Tilståndsmodell på observerbar kanonisk form:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

c)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{(s+0.5)(s+2)} = \frac{4}{s+0.5} - \frac{4}{s+2}$$

Tilståndsmodell på diagonalform:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

3.4

Överföringsfunktionen ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, vilket med givna A, B, C och D matriser ger:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\
&= \tfrac{1}{(s-2)(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 0 \\ -3 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\
&= \tfrac{1}{(s-2)(s-4)} \begin{bmatrix} 2(s-4)+3 & -(s-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 = \\
&= \frac{2s-5-2s+4}{(s-2)(s-4)} + 1 = -\frac{1}{(s-2)(s-4)} + 1 = \frac{s^2-8s+7}{(s-2)(s-4)}
\end{aligned}$$

3.5

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}(t) + \sigma_1\dot{\theta}(t) + \alpha_1\dot{x}(t) &= n\delta(t) \\
\ddot{x}(t) + \sigma_2\dot{\theta}(t) + \alpha_2\dot{x}(t) - g\theta(t) &= g\delta(t)
\end{aligned}$$

a) Välj exempelvis tillstånden:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \theta(t) \\
x_2(t) &= \dot{\theta}(t) \\
x_3(t) &= x(t) \\
x_4(t) &= \dot{x}(t)
\end{aligned}$$

och låt $u(t) = \delta(t)$ och $y(t) = \theta(t)$. Derivering ger

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = -\sigma_1\dot{\theta}(t) - \alpha_1\dot{x}(t) + n\delta(t) &&= -\sigma_1 x_2(t) - \alpha_1 x_4(t) + nu(t) \\
\\
\dot{x}_3(t) &= \dot{x}(t) = x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= \ddot{x}(t) = -\sigma_2\dot{\theta}(t) - \alpha_2\dot{x}(t) + g\theta(t) + g\delta(t) &&= gx_1(t) - \sigma_2 x_2(t) - \alpha_2 x_4(t) + gu(t)
\end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g & -\sigma_2 & 0 & -\alpha_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ g \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned}$$

b) Överföringsfunktionen kan beräknas med $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. När dimensionen är större eller lika med tre blir det dock ganska mödosamt att invertera matrisen $(sI - A)$ för hand . Vi löser därför detta tal genom att Laplacetransformera båda differentialekvationerna och sedan eliminera $X(s)$.

$$\begin{aligned}
s^2\theta(s) + \sigma_1 s\theta(s) + \alpha_1 sx(s) = n\delta(s) &\quad\Rightarrow\quad sx(s) = \tfrac{1}{\alpha_1}\left(-s^2\theta(s) - \sigma_1 s\theta(s) + n\delta(s)\right) \\
s^2x(s) + \sigma_2 s\theta(s) + \alpha_2 sx(s) - g\theta(s) = g\delta(s) &\quad\Rightarrow\quad sx(s)(s+\alpha_2) = -\sigma_2 s\theta(s) + g\theta(s) + g\delta(s)
\end{aligned}$$

Stoppa in den första ekvationen i den andra ger:

$$\frac{1}{\alpha_1}\left(-s^2\theta(s) - \sigma_1 s\theta(s) + n\delta(s)\right)(s+\alpha_2) = -\sigma_2 s\theta(s) + g\theta(s) + g\delta(s)$$

vilket är ekvivalent med

$$-s^3\theta(s) - (\sigma_1+\alpha_2)s^2\theta(s) - \sigma_1\alpha_2 s\theta(s) + ns\delta(s) + n\alpha_2\delta(s) = -\alpha_1\sigma_2 s\theta(s) + g\alpha_1\theta(s) + g\alpha_1\delta(s)$$

eller

$$\left(s^3 + (\sigma_1 + \alpha_2)s^2 + (\alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2)s + g\alpha_1\right)\theta(s) = (ns + n\alpha_2 - g\alpha_1)\,\delta(s)$$

Överföringsfunktionen blir:

$$\frac{\theta(s)}{\delta(s)} = \frac{ns + n\alpha_2 - g\alpha_1}{s^3 + (\sigma_1 + \alpha_2)s^2 + (\alpha_2\sigma_1 - \alpha_1\sigma_2)s + g\alpha_1}$$

3.6

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + x(t) &= u(t) \\ \dot{y}(t) - y(t) + 2x(t) &= u(t) \end{aligned}$$

a) Låt tillstånden vara

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) &= -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) &= -2x(t) + y(t) + u(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Överföringsfunktionen ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, vilket med givna A, B, C och D matriser ger:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{(s+1)(s-1)} \begin{bmatrix} -2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \tfrac{-2+s+1}{(s+1)(s-1)} = \tfrac{s-1}{(s+1)(s-1)} = \tfrac{1}{s+1} \end{aligned}$$

b) Stabiliteten hos tillståndsmodellen bestäms av polerna som ges av $\det(sI - A) = 0$, vilket i detta fall blir $s = -1$ och $s = 1$, vilket implicerar att systemet är instabilt ty en pol i högra halvplanet.

Stabiliteten hos överföringsfunktionen ges av polerna, vilket i ovanstående fall med kancellerad pol i högra halvplanet innebär ett stabilt system ty den återstående polen ligger i vänstra halvplanet.

Skillnaden är att tillståndsmodellen är en intern representation av systemet där samtliga poler ingår. Överföringsfunktioner beskriver enbart relationen mellan insignal till utsignal och därmed inte alltid systemets fullständiga dynamiska beteende, som illustrerats i detta exempel genom kancellationen av den instabila polen.

3.7

Ur figuren fås:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \tfrac{1}{1+5s} X_2(s) \\ X_2(s) &= \tfrac{1}{1+2s}(10U(s) - 0.6X_1(s)) \\ Y(s) &= X_1(s) \end{aligned}$$

Motsvarande differentialekvationer är:

$$\begin{aligned} x_1(t) + 5\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ x_2(t) + 2\dot{x}_2(t) &= 10u(t) - 0.6x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.2x_1(t) + 0.2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -0.3x_1(t) - 0.5x_2(t) + 5u(t) \end{aligned}$$

som på matrisform blir

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 \\ -0.3 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Egenvärdena ges av $\det(\lambda I - A) = 0$, vilket ger:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix} = 0$$

eller

$$(\lambda + 0.2)(\lambda + 0.5) + 0.06 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 0.7\lambda + 0.16 = 0$$

som har lösningen

$$\lambda = -0.35 \pm j\sqrt{0.0375}$$

Systemet är stabilt ty båda egenvärdena (polerna) ligger i vänstra halvplanet.

3.8

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) + \tfrac{k}{r^2(t)} - r(t)\omega^2(t) &= u_1(t) \\ \tfrac{1}{r(t)}\tfrac{d}{dt}(r^2(t)\omega(t)) &= u_2(t) \end{aligned}$$

a) Genom att utföra deriveringen i den andra ekvationen fås:

$$\frac{1}{r(t)}(2r(t)\dot{r}(t)\omega(t) + r^2(t)\dot{\omega}(t)) = u_2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\omega(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t)$$

Välj exempelvis tillstånden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r(t) \\ x_2(t) &= \dot{r}(t) \\ x_3(t) &= \omega(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{r}(t) &&= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{r}(t) &&= -\tfrac{k}{r^2(t)} + r(t)\omega^2(t) + u_1(t) &&= -\tfrac{k}{x_1^2(t)} + x_1(t)x_3^2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{\omega}(t) &&= -\tfrac{2x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \tfrac{1}{x_1(t)}u_2(t) \end{aligned}$$

eller på (olinjär) matrisform (ingen utsignal angiven)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{k}{x_1^2(t)} + x_1(t)x_3^2(t) + u_1(t) \\ -\frac{2x_2(t)x_3(t)}{x_1(t)} + \frac{1}{x_1(t)}u_2(t) \end{bmatrix}$$

b) Linjärisering ger (Taylorutveckling)

$$\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

där $\Delta x(t) = x(t) - x_0$, $\Delta u(t) = u(t) - u_0$ och

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}$$

x_0 och u_0 är arbetspunkten, vilket i detta exempel är en jämviktspunkt vilket innebär att $f(x_0, u_0) = 0$. Den sistnämnda relationen ger:

$$\begin{array}{l} x_{20} = 0 \\ -\frac{k}{x_{10}^2} + x_{10}x_{30}^2 + u_{10} = 0 \\ -\frac{2x_{20}x_{30}}{x_{10}} + \frac{1}{x_{10}}u_{20} \end{array}$$

vilket med $u_{10} = u_{20} = 0$ ger följande värden på x_{10} och x_{20}:

$$\begin{array}{ll} x_{20} = 0 & \\ -\frac{k}{x_{10}^2} + x_{10}x_{30}^2 + u_{10} = 0 & \Rightarrow \quad x_{10} = \left(k/x_{30}^2\right)^{1/3} \\ -\frac{2x_{20}x_{30}}{x_{10}} + \frac{1}{x_{10}}u_{20} = 0 & \end{array}$$

Beräkning av A och B ger (där $x_{30} = \omega_0$):

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2k/x_1^3 + x_3^2 & 0 & 2x_1x_3 \\ 2x_2x_3/x_1^2 - u_2/x_1^2 & -2x_3/x_1 & -2x_2/x_1 \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3x_{30}^2 & 0 & 2x_{10}x_{30} \\ 0 & -2x_{30}/x_{10} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 2(k\omega_0)^{1/3} \\ 0 & -2k^{-1/3}\omega_0^{5/3} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/x_1 \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & (k/\omega_0^2)^{-1/3} \end{bmatrix}$$

Egenvärdena ges av $\det(\lambda I - A) = 0$ vilket ger

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3\omega_0^2 & \lambda & -2(k\omega_0)^{1/3} \\ 0 & 2k^{-1/3}\omega_0^{5/3} & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

vilket är ekvivalent med

$$\lambda(\lambda^2 + 4\omega_0^2) - 3\omega_0^2\lambda = \lambda^3 + \omega_0^2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0$$

dvs egenvärderna är $\lambda = 0$, $\lambda = \pm j\omega_0$. Insättning av $\omega_0 = \frac{2\pi}{24\times 3600}$ i ovanstående ger lösningen.

3.9

a) Ur figur fås bakre hjulens hastighet $v_b(t) = v\cos u(t)$. Definitionerna på sinus och cosinus ger:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_b(t)\sin\varphi(t) &&= v\cos\varphi(t)\sin\varphi(t) \\ \dot{x}_2 &= v\sin(u(t) + \varphi(t)) \\ \dot{x}_3 &= v\cos(u(t) + \varphi(t)) \end{aligned}$$

där

$$\sin\varphi(t) = \frac{x_2(t) - x_1(t)}{\ell}$$

b) Linjärisering för små vinklar $u(t)$ och $\varphi(t)$ innebär att $\cos u(t) \approx 1$ och $\sin(u(t)+\varphi(t)) \approx u(t) + \varphi(t)$, vilket ger:

$$\begin{array}{rcccl} \dot{x}_1 & = & v\frac{x_2(t)-x_1(t)}{\ell} & = & -\frac{v}{\ell}x_1(t) + \frac{v}{\ell}x_2(t) \\ \dot{x}_2 & = & vu(t) + v\varphi(t) & = & -\frac{v}{\ell}x_1(t) + \frac{v}{\ell}x_2(t) + vu(t) \\ \dot{x}_3 & = & v & & \end{array}$$

Vid beräkning av överföringsfunktionerna noteras att tredje ekvationen enbart beror av den konstanta hastigheten v medans den första och andra ekvationen inte beror av $x_3(t)$. Om vi därför väljer

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \\ -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$$

vilket är matrisformen när sista tillståndet negligeras, så kan överföringsfunktionerna beräknas med $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, där $G_{ux_1}(s)$ fås med $y(t) = x_1(t) = C_1x(t) = [1\ 0]x(t)$ och $G_{ux_2}(s)$ fås med $y(t) = x_2(t) = C_2x(t) = [0\ 1]x(t)$, vilket blir

$$\begin{array}{rcl} G_{ux_1}(s) & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \\ -\frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \\ & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{v}{\ell} & -\frac{v}{\ell} \\ \frac{v}{\ell} & s - \frac{v}{\ell} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} = \\ & = & \frac{1}{(s-\frac{v}{\ell})(s+\frac{v}{\ell})+\frac{v^2}{\ell^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \frac{v}{\ell} & \frac{v}{\ell} \\ -\frac{v}{\ell} & s + \frac{v}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \\ & = & \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v^2}{\ell} \\ vs + \frac{v^2}{\ell} \end{bmatrix} = \frac{v^2/\ell}{s^2} \\ G_{ux_2}(s) & = & \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{v^2}{\ell} \\ vs + \frac{v^2}{\ell} \end{bmatrix} = \frac{vs+v^2/\ell}{s^2} \end{array}$$

Insatt med siffrorna $\ell = 5$ och $v = 8$ blir

$$\begin{array}{rcl} G_{ux_1}(s) & = & \frac{12.8}{s^2} \\ G_{ux_2}(s) & = & \frac{8(s+1.6)}{s^2} \end{array}$$

Båda polernas placering i origo innebär att systemet är en dubbelintegrator, vilket är rimligt ty ändring i styrvinkel ger upphov till en acceleration av trucken. Förklaringen till nollstället $s = -v/\ell$ i den senare överföringsfunktionen kommer sig av att framhjulen är styrbara, vilket ger ett extra bidrag pga hjulens vridning.

3.10

$$\begin{array}{rcl} \dot{p}(t) + p(t) & = & q^3(t)u(t) \\ \varepsilon\dot{q}(t) + q(t) & = & e^{q(t)}u^2(t) \\ y(t) & = & p(t)q(t) \end{array}$$

a) Låt exempelvis

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & p(t) \\ x_2(t) & = & q(t) \end{array}$$

Derivering ger

$$\begin{array}{rclclcl} \dot{x}_1(t) & = & \dot{p}(t) & = & -p(t) + q^3(t)u(t) & = & -x_1(t) + x_2^3(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & \dot{q}(t) & = & -\frac{1}{\varepsilon}q(t) + \frac{1}{\varepsilon}e^{q(t)}u^2(t) & = & -\frac{1}{\varepsilon}x_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}e^{x_2(t)}u^2(t) \end{array}$$

eller på (olinjär) matrisform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + x_2^3(t)u(t) \\ -\frac{1}{\varepsilon}x_2(t) + \frac{1}{\varepsilon}e^{x_2(t)}u^2(t) \end{bmatrix} = f(x, u)$$

Utsignalen blir $y(t) = p(t)q(t) = x_1(t)x_2(t) = g(x_1, x_2)$.

Då $\varepsilon = 0$ ändras dynamiken så snabbt hos $x_2(t) = q(t)$ att ändringen kan antas inträffa ögonblickligen. Detta får till följd att vi kan betrakta relationen $q(t) = e^{q(t)}u^2(t)$ eller $x_2(t) = e^{x_2(t)}u^2(t)$ som statisk och antalet tillståndsvariabler reduceras till enbart en som ges av ekvationen

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t)u(t)$$

där $x_2(t) = e^{x_2(t)}u^2(t)$.

b) Arbetspunkten (p_0, q_0, u_0) där $p_0 = x_{10} = 0.5$ är ett stationärtillstånd fås genom att sätta alla derivator till noll i tillståndsformen. Detta resulterar i

$$\begin{aligned} -x_{10} + x_{20}^3 u_0 &= 0 \\ -x_{20} + e^{x_{20}} u_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} u_0 &= \tfrac{x_{10}}{x_{20}^3} \\ e^{x_{20}} &= \tfrac{x_{20}}{u_0^2} = \tfrac{x_{20}^7}{x_{10}^2} \end{aligned}$$

eller insatt med värden $e^{x_{20}} = 4x_{20}^7$, som enligt uppgift har lösningen $x_{20} = 0.9380$. Detta resulterar i $u_0 = \frac{x_{10}}{x_{20}^3} = 0.6058$.

c) Linjärisering ger (Taylorutveckling)

$$\Delta\dot{x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

där $\Delta x(t) = x(t) - x_0$, $\Delta u(t) = u(t) - u_0$ och

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)}, \quad C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)}$$

Beräkning av A, B och C ger

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} -1 & 3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}(1 - e^{x_{20}}u_0^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon}e^{x_{20}}u_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} = \begin{bmatrix} x_{20} & x_{10} \end{bmatrix}$$

Egenvärdena ges av $\det(\lambda I - A) = 0$, vilket blir

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & \lambda + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) \end{bmatrix} = 0$$

dvs $\lambda = 1$ och $\lambda = -\frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) = -\frac{0.0620}{\varepsilon}$. Då $\varepsilon \to 0$ går $\lambda \to -\infty$.

d) Överföringsfunktionen ges av $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, vilket med givna A, B, C och D matriser resulterar i

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} x_{20} & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon}e^{x_{20}}u_0 \end{bmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} \begin{bmatrix} x_{20} & x_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20}) & 3x_{20}^2 u_0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon}e^{x_{20}}u_0 \end{bmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} \begin{bmatrix} x_{20}(s + \frac{1}{\varepsilon}(1 - x_{20})) & 3x_{20}^3 u_0 + x_{10}(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20}^3 \\ \frac{2}{\varepsilon}e^{x_{20}}u_0 \end{bmatrix} = \\ &= \tfrac{x_{20}^4(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))+\frac{6}{\varepsilon}x_{20}^3 e^{x_{20}}u_0^2+\frac{2}{\varepsilon}x_{10}(s+1)e^{x_{20}}u_0}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} = \tfrac{x_{20}^4(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))+\frac{6}{\varepsilon}x_{20}^4+\frac{2}{\varepsilon}(s+1)x_{20}^4}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} \\ &= x_{20}^4 \tfrac{((1+\frac{2}{\varepsilon})s+\frac{1}{\varepsilon}(9-x_{20}))}{(s+1)(s+\frac{1}{\varepsilon}(1-x_{20}))} = x_{20}^4 \tfrac{((2+\varepsilon)s+(9-x_{20}))}{(s+1)(\varepsilon s+(1-x_{20})} \end{aligned}$$

Tidskonstanterna blir 1, $\frac{\varepsilon}{1-x_{20}}$ och $\frac{2+\varepsilon}{9-x_{20}}$. Då $\varepsilon \to 0$ reduceras alltså systemets dimension med 1, motsvarande egenvärde går mot ∞ och tidskonstanten mot 0 vilket innebär ett statiskt samband.

Notera att $G(s)$ har ett nollställe i $s = -\frac{9-x_{20}}{2+\varepsilon}$ som blir $s = -\frac{9-x_{20}}{2}$ då $\varepsilon \to 0$. Anledningen till att detta nollställe är kvar då $\varepsilon \to 0$ är att $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ där $x_2(t)$ är en statisk funktion av $u(t)$. Denna direkterm i utsignalen $y(t)$ visar sig med ett nollställe i överföringsfunktionen $G(s)$.

3.11

Lösningen till en modell på tillståndsform är

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(sI - A)^{-1}BU(s)\}$$

Då $u(t)$ är en impuls, dvs $U(s) = 1$, och $y(t) = \sin t$ blir resultatet

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(C(sI - A)^{-1}B) = \sin t$$

eller vid Laplacetransformering

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Vidare gäller att systemet är av andra ordningen samt att $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ enligt uppgift. Vi kan därför ansätta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Vi får därmed att

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{s^2+1} &= C(sI - A)^{-1}B = [c_1\ c_2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ -a_1 & s - a_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{s(s-a_2)-a_1}[c_1\ c_2] \begin{bmatrix} s - a_2 & 1 \\ a_1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{s^2-a_2s-a_1}[c_1(s - a_2) + c_2a_1\ c_1 + c_2s] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \tfrac{b_1c_1(s-a_2)+a_1b_1c_2+b_2c_1+b_2c_2s}{s^2-a_2s-a_1}
\end{aligned}$$

Följande relationer måste därför vara uppfyllda

$$\begin{cases}
b_1c_1 + b_2c_2 &= 0 \\
-a_2b_1c_1 + a_1b_1c_2 + b_2c_1 &= 1 \\
-a_2 &= 0 \\
-a_1 &= 1
\end{cases}$$

Detta ger lösningarna $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ samt

$$\begin{cases}
b_1c_1 + b_2c_2 &= 0 \\
-b_1c_2 + b_2c_1 &= 1
\end{cases}$$

Detta är ett ekvationssytem med 4 obekanta och 2 ekvationer, vilket leder till en mängd olika lösningar. Exempelvis kan C väljas till $C = [1\ 0]$, vilket resulterar i $B = [0\ 1]^T$.

3.12

Dynamiken hos massan fås genom att utnyttja sig av rörelsemomentbalansen som säger att

$$\begin{bmatrix} \text{Ändring av} \\ \text{rörelsemängdsmoment} \\ \text{per tidsenhet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Drivande} \\ \text{krafter} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{Belastande} \\ \text{krafter} \end{bmatrix}$$

Då underlaget är friktionsfritt finns inga belastande krafter. Om $y(t)$ anger massans position från väggen fås följande dynamik ($y(t)$ och $F(t)$ är riktade bort från väggen):

$$m\ddot{y}(t) = F(t)$$

Väljer vi exempelvis tillstånden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

ger derivering att

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) &= F(t)/m \end{aligned}$$

Om $u(t) = F(t)$ blir detta på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Kroppen befinner sig vid tidpunkten $t = 0$ på ett avstånd $y(t) = x_1(t) = 1$ meter från väggen med hastigheten $\dot{y}(t) = x_2(t) = 1$ meter per sekund, dvs initialtillstånden är

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kroppen skall styras in mot väggen så att den efter $t_f = 10$ sekunder befinner sig exakt vid väggen, $x_1(t_f) = 0$, med noll i hastighet, $x_2(t_f) = 0$, dvs

$$x(t_f) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen till tillståndsekvationerna är

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)\, d\tau$$

där

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \tfrac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Styrsignalen är enligt figur

$$u(t) = -1\,\{\sigma(t) - \sigma(t - t_1)\} + \{\sigma(t - t_2) - \sigma(t - t_f)\}$$

Denna styrsignal insatt i lösningen ovan där $t = t_f$ ger på matrisform

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} (-1) d\tau + \int_{t_1}^{t_f} \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} 1 d\tau$$

där integralen har delats upp i de två delarna där styrsignalen är -1 respektive 1. Matrismultiplicering samt lösning av integralen elementvis ger

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + t_f x_2(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \frac{1}{m} \begin{bmatrix} t_f\tau - \tau^2/2 \\ \tau \end{bmatrix}_0^{t_1} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} t_f\tau - \tau^2/2 \\ \tau \end{bmatrix}_{t_2}^{t_f}$$

vilket är ekvivalent med

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) + t_f x_2(0) - \frac{1}{m}(t_f t_1 - t_1^2/2) + \frac{1}{m}(t_f^2 - t_f^2/2 - t_f t_2 + t_2^2/2) \\ x_2(0) - \frac{1}{m} t_1 + \frac{1}{m}(t_f - t_2) \end{bmatrix}$$

Insatt med värdet $t_f = 10$ fås ekvationerna

$$\begin{cases} 11 - 10t_1 + t_1^2/2 + 50 - 10t_2 + t_2^2/2 &= 0 \\ 11 - t_1 - t_2 &= 0 \end{cases}$$

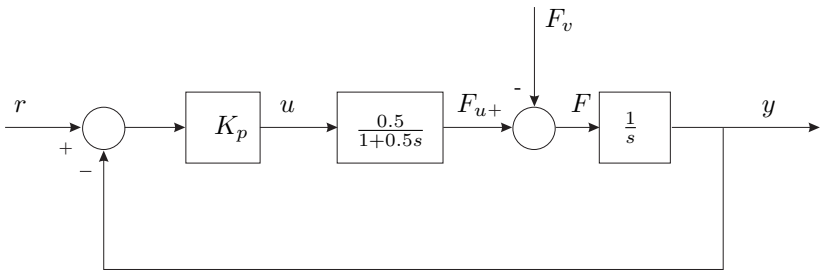
Ur andra ekvationen fås $t_1 = 11 - t_2$, vilket insatt i första ekvationen efter förenkling ger

$$t_2^2 - 11t_2 + 11.5 = 0$$

med lösning $t_2 = 5.5 + \sqrt{18.75} = 9.83$ sekunder. t_1 blir då $t_1 = 11 - 5.5.\sqrt{18.75} = 1.17$ sekunder.

3.13

a) Följande blockschema ger lösningen.



Tillståndsmodell för den öppna icke-reglerade processen och styrdon

Processen är given av

$$\dot{y}(t) = F(t) = F_u(t) - F_v(t)$$

där $F_u(t)$ är utsignal från styrdonet med överföringsfunktion

$$G_u(s) = \frac{F_u(s)}{U(s)} = \frac{0.5}{1 + 0.5s}$$

Motsvarande differentialekvationer är

$$\begin{aligned} 0.5\dot{F}_u(t) + F_u(t) &= 0.5u(t) \\ \dot{y}(t) &= F_u(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

Låt exempelvis

$$\begin{aligned} x_1(t) &= F_u(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{F}_u(t) &&= -2F_u(t) + u(t) &&= -2x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) &&= F_u(t) - F_v(t) &&= x_1(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Tillståndsmodell för det återkopplade systemet

I detta fall tilkommer $u(t) = r(t) - y(t)$, vilket resulterar i

$$\begin{aligned} 0.5\dot{F}_u(t) + F_u(t) &= 0.5(r(t) - y(t)) \\ \dot{y}(t) &= F_u(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} 0.5\dot{F}_u(t) + F_u(t) &= 0.5(r(t) - y(t)) \\ \dot{y}(t) &= F_u(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

Låt som ovan tillstånden vara

$$\begin{aligned} x_1(t) &= F_u(t) \\ x_2(t) &= y(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{F}_u(t) &&= -2F_u(t) + r(t) - y(t) &&= -2x_1(t) - x_2(t) + r(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{y}(t) &&= F_u(t) - F_v(t) &&= x_1(t) - F_v(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} F_v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

b) **Öppna icke-reglerade processen**

Polerna ges av $\det(sI - A) = 0$, vilket blir

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s+2) = 0$$

dvs polerna ligger i $s = 0$ och $s = -2$.

Övergångsmatrisen ges av

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0.5(1-e^{-2t}) & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Initialtillstånden $y(0) = x_2(0) = 1$ och $\dot{y}(0) = F(0) = F_u(0) - F_v(0) = x_1(0) - 0 = 1$ tillsammans med alla insignaler som är noll ger en lösning till tillståndsekvationen

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0.5(1-e^{-2t}) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ 0.5(3-e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

Återkopplade processen

Polerna ges av $\det(SI - A) = 0$, vilket blir

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s(s+2) + 1 = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$$

dvs dubbelpol i $s = -1$.

Övergångsmatrisen ges av

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tfrac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\right\} = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{s+1-1}{(s+1)^2} & -\frac{1}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s+1+1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Lösning till tillståndsekvationen blir i detta fall (samma initialtillstånd som tidigare)

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-t} \\ (1+2t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

3.14

Insignalen $u(t)$ kan betraktas som om den vore genererad som utsignalen från en modell $G_u(s)$ som drivs av en impulssignal $\delta(t)$. Om $G_u(s)$ beskrivs av en tillståndsrepresentation A_u, B_u, C_u, och A, B C och D är den ursprungliga tillståndsrepresentationen, erhålls följande utökade tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BC_u \\ 0 & A_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix}\delta(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C \\ DC_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Tidssvaret kan därefter som vanligt beräknas med (initialtillstånden antas vara noll)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x_u(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} x(0) \\ x_u(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \Phi(t-\tau) \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix} \delta(\tau)\, d\tau = \Phi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix}$$

där

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left((sI - \begin{bmatrix} A & BC_u \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\}$$

Då $u(t) = t\sigma(t)$ blir $U(s) = \frac{1}{s^2}$, dvs $G_u(s) = \frac{U(s)}{\delta(s)} = \frac{1}{s^2}$ vilket blir $s^2 U(s) = \delta(s)$ eller i tidsplanet $\ddot{u}(t) = \delta(t)$. Välj exempelvis

$$\begin{aligned} x_{u1}(t) &= u(t) \\ x_{u2}(t) &= \dot{u}(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u1}(t) &= \dot{u}(t) &= x_{u2}(t) \\ \dot{x}_{u2}(t) &= \ddot{u}(t) &= \delta(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\dot{x}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t)$$

Då $u(t) = \cos(\omega t)\sigma(t)$ blir $U(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, dvs $G_u(s) = \frac{U(s)}{\delta(s)} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ vilket blir $s^2 U(s) + \omega^2 U(s) = s\delta(s)$ eller i tidsplanet $\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \dot{\delta}(t)$. Välj exempelvis

$$\begin{aligned} x_{u1}(t) &= u(t) \\ x_{u2}(t) &= \dot{u}(t) - \delta(t) \end{aligned}$$

Derivering ger

$$\begin{aligned} \dot{x}_{u1}(t) &= \dot{u}(t) &= x_{u2}(t) + \delta(t) \\ \dot{x}_{u2}(t) &= \ddot{u}(t) - \dot{\delta}(t) &= -\omega^2 u(t) = \omega^2 x_{u1}(t) \end{aligned}$$

eller på matrisform

$$\dot{x}_u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} x_u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

3.15

Systemet

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

regleras med en PI-regulator

$$U(s) = \frac{K_i + K_p s}{s} (R(s) - Y(s))$$

som i tidsplanet blir

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

Om vi inför ett tillstånd

$$x_e(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

fås

$$\dot{x}_e(t) = r(t) - y(t)$$

och vi kan skriva

$$u(t) = K_p(r(t) - y(t)) + K_i x_e(t) = K_p(r(t) - Cx(t)) + K_i x_e(t)$$

Vi får därför

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) &&= Ax(t) + B(K_p(r(t) - Cx(t)) + K_i x_e(t)) = (A - BK_pC)x(t) + K_i x_e(t) + BK_p r(t) \\
\dot{x}_e(t) &= r(t) - y(t) &&= r(t) - Cx(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned}$$

vilket kan skrivas på tillståndsform som

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK_pC & K_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_p \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4

Dynamiska modeller för tekniska system

4.1

a) Vid jämvikt gäller

$$k(y_0 - \ell_0) = mg + u_0$$

dvs

$$y_0 = \frac{mg + k\ell_0 + u_0}{k}$$

b) Avvikelser från jämviktspunkten påverkar massan ($\Delta u = u - u_0,\ \Delta y = y - y_0$)

$$m\ddot{y} = \Delta u - k\Delta y - b\dot{y}$$

Utnyttja att $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}$ och $\Delta\dot{y} = \dot{y}$. Laplacetransformering ger

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Relativ dämpning $\zeta = \dfrac{b}{2\sqrt{mk}}$ och odämpad egenvinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

4.2

Newtons lag ($ma = \Sigma F$) ger

$$m\ddot{y} = b(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y)$$

Notera att vid jämvikt, $y = 0$, är fjädern uttänjd med längden $y_0 = -mg/k$ pga tyngdkraften mg

Laplacetransformering ger

$$ms^2Y(s) = b(sX(s) - sY(s)) + k(X(s) - Y(s))$$

dvs

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)X(s).$$

Den sökta överföringsfunktion blir

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

4.3

a) Motorn och lasten kan slås ihop eftersom de är stelt förbundna med varandra. Totala tröghetsmomentet är då $J_m + J_\ell$ och totala dämpfaktorn blir $B_m + B_\ell$. Newtons lag ($J\ddot{\theta} = \Sigma$ Moment) ger

$$(J_m + J_\ell)\ddot{\theta}_\ell = T_d - (B_m + B_\ell)\dot{\theta}_\ell.$$

Laplacetransformering ger

$$(J_m + J_\ell)s^2\theta_\ell(s) = T_d(s) - (B_m + B_\ell)s\theta_\ell(s)$$

dvs

$$s\big((J_m + J_\ell)s + (B_m + B_\ell)\big)\theta_\ell(s) = T_d(s)$$

Den sökta överföringsfunktion blir

$$\frac{\theta_\ell(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{s\big((J_m + J_\ell)s + B_m + B_\ell\big)}$$

b) Newtons lag ($J\ddot{\theta} = \Sigma$ Moment) ger

$$\begin{aligned} J_m\ddot{\theta}_m &= T_d - B_m\dot{\theta}_m - T_m \\ J_\ell\ddot{\theta}_\ell &= T_\ell - B_\ell\dot{\theta}_\ell \end{aligned}$$

Ideal växel utan energiförluster, dvs

$$\frac{\theta_m}{\theta_\ell} = N, \quad \frac{T_m}{T_\ell} = \frac{1}{N}$$

eller

$$\theta_m = N\theta_\ell, \quad T_m = T_\ell/N$$

Sätts in i ekvationerna ovan, där den andra ekvationen multiplicerats med $1/N$

$$\begin{aligned} J_m N\ddot{\theta}_\ell &= T_d - B_m N\dot{\theta}_\ell - T_\ell/N \\ J_\ell\ddot{\theta}_\ell/N &= T_\ell/N - B_\ell\dot{\theta}_\ell/N \end{aligned}$$

Summering medför att

$$(J_m N + J_\ell/N)\ddot{\theta}_\ell = T_d - (B_m N + B_\ell/N)\dot{\theta}_\ell$$

Multiplicering med $1/N$ och Laplacetransformering ger

$$(J_m + J_\ell/N^2)s^2\theta_\ell(s) = T_d(s)/N - (B_m + B_\ell/N^2)s\theta_\ell(s)$$

dvs

$$s\big((J_m + J_\ell/N^2)s + B_m + B_\ell/N^2\big)\theta_\ell(s) = T_d(s)/N.$$

Sökt överföringsfunktion blir då

$$\frac{\theta_\ell(s)}{T_d(s)} = \frac{1/N}{s\big((J_m + J_\ell/N^2)s + B_m + B_\ell/N^2\big)}$$

c) Newtons lag ($J\ddot{\theta} = \Sigma$ Moment) ger

$$\begin{aligned} J_m\ddot{\theta}_m &= T_d - B_m\dot{\theta}_m - K(\theta_m - \theta_\ell) \\ J_\ell\ddot{\theta}_\ell &= K(\theta_m - \theta_\ell) - B_\ell\dot{\theta}_\ell \end{aligned}$$

Laplacetransformering

$$\begin{aligned} J_m s^2\theta_m(s) &= T_d(s) - B_m s\theta_m(s) - K(\theta_m(s) - \theta_\ell(s)) \\ J_\ell s^2\theta_\ell(s) &= K(\theta_m(s) - \theta_\ell(s)) - B_\ell s\theta_\ell(s) \end{aligned}$$

dvs

$$\begin{aligned} (J_m s^2 + B_m s + K)\theta_m(s) &= T_d(s) + K\theta_\ell(s) \\ (J_\ell s^2 + B_\ell s + K)\theta_\ell(s) &= K\theta_m(s) \end{aligned}$$

Multiplikation ger

$$(J_m s^2 + B_m s + K)(J_\ell s^2 + B_\ell s + K)\theta_m(s)\theta_\ell(s) = (T_d(s) + K\theta_\ell(s))K\theta_m(s)$$

dvs

$$\frac{\theta_\ell(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{\dfrac{(J_m s^2 + B_m s + K)(J_\ell s^2 + B_\ell s + K)}{K} - K}$$

Med $J_m = 0$ och $B_\ell = 0$ fås

$$\frac{\theta_\ell(s)}{T_d(s)} = \frac{1}{s\big(\dfrac{J_\ell B_m}{K}s^2 + J_\ell s + B_m\big)}$$

4.4

Låt y vara sträckan bilen rört sig. Massan m flyttar sig sträckan x relativt y, dvs $x + y$ med absolut referenspunkt enligt figur

a) Newtons lag ($ma = \Sigma F$) ger

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) = b(\dot{y} - (\dot{x} + \dot{y})) + k(y - (x + y))$$

dvs med $a = \ddot{y}$

$$m(\ddot{x} + a) = -b\dot{x} - kx$$

Laplacetransformering

$$m(s^2X(s) + A(s)) = -bsX(s) - kX(s)$$

dvs

$$\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)X(s) = -A(s).$$

Sökt överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = -\frac{1}{s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{k}{m}}$$

b) Identifiering $s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{k}{m} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ ger att $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ och $2\zeta\omega_0 = b/m$, dvs $b = 2\zeta\omega_0 \cdot m = 2\zeta\sqrt{k/m} \cdot m = 2\zeta\sqrt{km}$. Med numeriska värden fås $b = 2\sqrt{10 \cdot 0,1} = 2$

$$G(s) = -\frac{1}{s^2 + 20s + 100} = -\frac{1}{(s+10)^2}$$

Stegsvaret ges av

$$Y(s) = -\frac{1}{(s+10)^2}\,\frac{1}{s} = -\frac{1/100}{s} + \frac{1/100}{s+10} + \frac{1/10}{(s+10)^2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = -\frac{1}{100}(1 - e^{-10t} - 10te^{-10t})\theta(t)$$

4.5

Newtons lag för de båda delsystemen ger

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= b(\dot{y}_1 - \dot{y}) + k(y_1 - y) \\ m_1\ddot{y}_1 &= -b(\dot{y}_1 - \dot{y}) - k(y_1 - y) + k_1(u - y_1) \end{aligned}$$

Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned} A(s)Y(s) &= B(s)Y_1(s) \\ A_1(s)Y_1(s) &= B(s)Y(s) + k_1U(s) \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} A(s) &= ms^2 + bs + k \\ A_1(s) &= m_1s^2 + bs + k + k_1 \\ B(s) &= bs + k \end{aligned}$$

Genom att multiplicera första ekvationen med $A_1(s)$ och den andra med $B(s)$ erhålls

$$A(s)A_1(s)Y(s) = B(s)A_1(s)Y_1(s) = B^2(s)Y(s) + k_1B(s)U(s)$$

vilket slutligen ger överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1B(s)}{A(s)A_1(s) - B^2(s)}$$

4.6

Newtons lag för roterande system kan skrivas som

$$\frac{d}{dt}\big(\textit{rörelsemängdsmoment / tidsenhet}\,\big) = \sum \textit{yttre moment}$$

Rörelsemängdsmomentet H för systemet är givet, $H = J\omega + J_0\dot{\phi}$. Det yttre momentet bestäms av tyngdpunktens obalansvinkel ϕ , $T_d = mgh\sin\phi$, dvs tyngdkraftens momentgivande komponent. Balansekvationen för små vinklar blir då

$$\frac{dH}{dt} = J\dot{\omega} + J_0\ddot{\phi} = mgh\sin\phi \approx mgh\phi$$

Svänghjulets moment är styrsignal

$$u = J\dot{\omega}$$

Vi får ekvationen

$$u + J_0\ddot{\phi} = mgh\phi$$

Välj tillståndsvariabler $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$ Det ger tillståndsmodellen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J_0}(mghx_1 - u) = 1 \cdot (5 \cdot 10 \cdot 0.5\, x_1 - u) \\ &= 25x_1 - u \end{aligned}$$

I matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= Cx = [\,1 \quad 0\,]x \end{aligned}$$

Ta fram överföringsfunktion genom Laplacetransform av $u + J_0\ddot{\phi} = mgh\phi$

$$(s^2 - 25)\Phi(s) = -U(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{-1}{(s+5)(s-5)}$$

vilket visar att systemet har en instabil pol i $s = 5$.
$G(s)$ kan också fås genom tillståndsmodellen, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

4.7

Krafter som verkar på masssan

$$\begin{array}{ll} F_1 = mg & \\ F_2 = 2\cdot 10^3 y + 10^6 y^3 & \text{(fjäder)} \\ F_3 = b\cdot \dot{y} & \text{(dämpning)} \\ F_4 = u & \text{(extern kraft)} \end{array}$$

a) Kraftjämvikt

$$m\ddot{y} = mg - (2\cdot 10^3 y + 10^6 y^3) - b\dot{y} + u$$

Jämviktsläge då $u(t) = 0$, sätt $\ddot{y} = \dot{y} = 0$

$$0 = mg - 2\cdot 10^3 y_0 - 10^6 y_0^3 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 0.0323$$

b) Linjärisera $f(y) = 2\cdot 10^3 y + 10^6 y^3$ runt arbetspunkten y_0

$$\begin{aligned} f(y) &\approx f(y_0) + \left.\frac{df}{dy}\right|_{y_0}(y - y_0) = f(y_0) + \Delta f \\ \Delta f &= \big(2\cdot 10^3 + 10^6\cdot 3y_0^2\big)\Delta y = 5.13\cdot 10^3 \Delta y \end{aligned}$$

För små variationer runt arbetspunkten

$$\begin{aligned} & m\Delta\ddot{y} = -\big(2\cdot 10^3 + 10^6\cdot 3y_0^2\big)\Delta y - b\Delta\dot{y} + \Delta u \\ & \Delta\ddot{y} + \frac{b}{m}\Delta\dot{y} + \frac{5.13\cdot 10^3}{m}\Delta y = \frac{\Delta u}{m} \\ & \Delta\ddot{y} + 10\Delta\dot{y} + 513\Delta y = 0.1\Delta u \end{aligned}$$

Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{0.1}{(s^2 + 10s + 513)}$$

Resonansfrekvens $\omega_n = \sqrt{513} = 22.6$ rad/s och relativ dämpning $\zeta = 0.22$

4.8

För att markera att positioner och hastigheter är avvikelser från arbetspunkten ($y_{10} = 0, y_{20} = 0$ etc.) ersätts y_1 och y_2 med $\Delta y_1 = y_1 - y_{10}$ och $\Delta y_2 = y_2 - y_{20}$ etc. Notera att loket kör med konstant hastighet vilket innebär att lokets avvikelser från arbetspunkten är noll ($\Delta y_{Lok} = y_{Lok} - y_{Lok0} = 0$).

$$\Delta\dot{y}_1 = \Delta v_1, \quad \Delta\dot{y}_2 = \Delta v_2$$

$$\begin{aligned} m\Delta\dot{v}_1 &= -k\Delta y_1 - b\Delta v_1 + k(\Delta y_2 - \Delta y_1) + b(\Delta v_2 - \Delta v_1) \\ m\Delta\dot{v}_2 &= -k(\Delta y_2 - \Delta y_1) - b(\Delta v_2 - \Delta v_1) + F \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{y}_1 \\ \Delta\dot{v}_1 \\ \Delta\dot{y}_2 \\ \Delta\dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & -\frac{2b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{b}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} = \Delta y_1 - \Delta y_2$$

4.9

a)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ m\ell^2\dot{\omega} &= mg\ell\sin\theta - m\ell\cos\theta u \end{aligned}$$

Tillståndsmodell:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{u}{\ell}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Linjärisera kring (θ_0, u_0)

Arbetspunkt:

$$\dot{\theta}_0 = \omega_0 = 0 \qquad \dot{\omega}_0 = g\sin\theta_0 - u_0\cos\theta_0 = 0$$

vilket ger

$$u_0 = g\tan\theta_0$$

Den linjära modellen blir

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta} \\ \Delta\dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell}\cos\theta_0 + \frac{u_0}{\ell}\sin\theta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\ell}\cos\theta_0 \end{bmatrix} \Delta u$$

b)

$\theta_0 = 0$ och $\theta_0 = \pi$ motsvarar $u_0 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ \mp\frac{g}{\ell} & s \end{bmatrix} = s^2 \mp \frac{g}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}, & \theta_0 = 0 \\ \pm j\sqrt{\frac{g}{\ell}}, & \theta_0 = \pi \end{cases}$$

4.10

a) Spänningsdelning ger att

$$Y(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}}} \cdot U(s)$$

dvs sökt överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R_1 \frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}}} = \frac{\left(s + \dfrac{1}{R_1 C}\right)}{\left(s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}\right)}$$

<u>Nollstället</u> ges av

$$s = -\frac{1}{R_1 C}$$

<u>Polen</u> ges av

$$s = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = -\frac{1}{R_1 C}\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

Om $R_1 \neq 0$ ligger polen till vänster om nollstället i det komplexa talplanet.

<u>Stegsvaret</u> ges av (använd PBU)

$$Y(s) = \frac{s + \dfrac{1}{R_1 C}}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} \frac{1}{s} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)\frac{1}{s} + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\frac{1}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right)\theta(t)$$

<u>Impulssvaret</u> ges av

$$Y(s) = \frac{s + \dfrac{1}{R_1 C}}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} = \frac{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} + \frac{\dfrac{1}{R_1 C} - \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}} = 1 - \frac{\dfrac{1}{R_2 C}}{s + \dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \delta(t) - \left(\frac{1}{R_2 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}\right)\theta(t)$$

(Fås alternativt genom att derivera stegsvaret)

C beter sig som ledare initialt, vilket innebär att en impuls i u implicerar en impuls i y.

b) Kirchoff ger

$$\begin{aligned} -U + RI + \frac{1}{sC} I &= 0 \\ -U + RI + Y + RI &= 0 \end{aligned}$$

I kan exempelvis lösas ut ur första ekvationen och sättas in i den andra, så fås

$$Y = U - 2RI = U - 2R\frac{U}{R + \dfrac{1}{sC}} = \left(1 - \frac{2s}{s + \dfrac{1}{RC}}\right)U = -\frac{\left(s - \dfrac{1}{RC}\right)}{\left(s + \dfrac{1}{RC}\right)}U$$

Sökt överföringsfunktion är, med $RC = 2$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{(s - 0.5)}{(s + 0.5)}$$

Nollstället ges av

$$s = 0.5$$

Polen

$$s = -0.5$$

Stegsvaret ges av

$$Y(s) = -\frac{(s-0.5)}{(s+0.5)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+0.5}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = (1 - 2e^{-0.5t})\theta(t)$$

Impulssvaret ges av

$$Y(s) = -\frac{(s-0.5)}{s+0.5} = -\frac{(s+0.5)}{s+0.5} + \frac{1}{s+0.5}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = -\delta(t) + e^{-0.5t}\theta(t).$$

(Fås alternativt genom att derivera stegsvaret)

4.11

Kirchoff's 2:a lag ger

$$\begin{aligned} U &= RI + E \\ U &= RI + \alpha RI + Y \\ Y &= -A(s)E \end{aligned}$$

Löses E ut ur första ekvationen och I ur den andra fås

$$Y(s) = -A(s)\big(U(s) - RI(s)\big) = -A(s)\left(U(s) - R\,\frac{U(s) - Y(s)}{R(\alpha+1)}\right)$$

dvs

$$\left(1 + \frac{A(s)}{\alpha+1}\right)Y(s) = -A(s)\left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)U(s)$$

Sökt överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{\frac{\alpha}{\alpha+1}A(s)}{1 + \frac{A(s)}{\alpha+1}}$$

Med $A(s) = \dfrac{K}{1+Ts}$ fås

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{\frac{\alpha}{\alpha+1}\big(\frac{K}{1+Ts}\big)}{1 + \frac{1}{\alpha+1}\big(\frac{K}{1+Ts}\big)} = -\frac{\alpha K}{(\alpha+1)(1+Ts) + K} = -\frac{\frac{\alpha K}{1+\alpha+K}}{1 + \frac{(\alpha+1)T}{1+\alpha+K}s}$$

Då $K \to \infty$ fås överföringsfunktionen $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = -\alpha$, dvs $Y(t) = -\alpha U(t)$. Tidskonstanten τ är

$$\tau = \frac{(\alpha+1)T}{1+\alpha+K}$$

För stora värden på K kan τ approximeras med

$$\tau \approx \frac{(\alpha+1)T}{K}$$

Speciellt för $\alpha = 0$ fås $\tau = T/K$, och då $\alpha = 1$ fås $\tau \approx 2T/K$ vilket med insatta värden ger $\tau \approx 2 \cdot 0.01/10^5 = 2 \cdot 10^{-7}$.

4.12

Med införandet av beteckningen x för utgångsspänningen från den första operationsförstärkaren gäller att

$$X(s) = -\frac{Z_2}{Z_1}U(s)$$

där Z_1 (impedansen i framkopplingen) och Z_2 (impedansen i återkopplingen) för den första operationsförstärkaren bestäms av sambandena

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_1} &= \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3 + R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R_3(R_1 + \frac{1}{C_1 s})} \\
\frac{1}{Z_2} &= \frac{1}{R_2 + \frac{1}{C_2 s}} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_4 + R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_4(R_2 + \frac{1}{C_2 s})}
\end{aligned}$$

För den andra operationsförstärkaren erhålls på samma sätt direkt

$$Y(s) = -\frac{R_6}{R_5}X(s)$$

Eliminering av X ger följande resultat för hela kretsen

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{-R_6}{R_5} \cdot \frac{-Z_2}{Z_1} = \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_4(R_2 + \frac{1}{C_2 s})}{R_4 + R_2 + \frac{1}{C_2 s}} \cdot \frac{R_3 + R_1 + \frac{1}{C_1 s}}{R_3(R_1 + \frac{1}{C_1 s})} \\
&= \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{R_2 R_4 \big(1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}\big)}{(R_2 + R_4)\big(1 + \frac{1}{(R_2+R_4)C_2 s}\big)} \cdot \frac{(R_1 + R_3)\big(1 + \frac{1}{(R_1+R_3)C_1 s}\big)}{R_1 R_3 \big(1 + \frac{1}{R_1 C_1 s}\big)} \\
&= \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \cdot \frac{R_6}{R_5} \cdot \frac{\big(s + \frac{1}{R_2 C_2}\big)\big(s + \frac{1}{(R_1+R_3)C_1}\big)}{\big(s + \frac{1}{(R_2+R_4)C_2}\big) \cdot \big(s + \frac{1}{R_1 C_1}\big)}
\end{aligned}$$

Parametrarna $K, \alpha_1, \ldots, \alpha_4$ ges av detta uttryck.

4.13

$$-u + R_1 i_L + L\frac{di_L}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L + \frac{1}{L}u$$

$$-u + R_2\left(\frac{1}{R_3}e_c + C\frac{de_c}{dt}\right) + e_c = 0$$

$$\Rightarrow \frac{de_C}{dt} = -\left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{R_3 C}\right)e_C + \frac{1}{R_2 C}u$$

$$\begin{bmatrix} \frac{de_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3 C} & 0 \\ 0 & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

4.14

Enligt uppgift är

$$\begin{aligned}
q &= k_1 u - k_2 \Delta p \\
F &= A\Delta p
\end{aligned}$$

Newtons lag ($ma = \Sigma F$) ger dessutom att

$$m\ddot{y} = F$$

där friktionen försummats enligt uppgift.

Flödesjämvikt för oljan medför att

$$q = A\dot{y}$$

Laplacetransformering ger

$$Q(s) = k_1 U(s) - k_2 \Delta P(s) \tag{1}$$
$$F(s) = A\Delta P(s) \tag{2}$$
$$ms^2 Y(s) = F(s) \tag{3}$$
$$Q(s) = AsY(s) \tag{4}$$

Ekvation (2) och (3) innebär att

$$\Delta P(s) = \frac{m}{A} s^2 Y(s)$$

Sättes detta och ekvation (4) in i (1) fås

$$AsY(s) = k_1 U(s) - k_2 \frac{m}{A} s^2 Y(s)$$

dvs

$$s\left(A + k_2 \frac{m}{A} s\right) Y(s) = k_1 U(s)$$

Sökt överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s\big(A + k_2 \frac{m}{A} s\big)} = \frac{k_1/A}{s\big(1 + k_2 \frac{m}{A^2} s\big)}$$

4.15

a) Materialbalans ger att

$$\textit{upplagrad molmängd} \;=\; \textit{molflöde in} \;-\; \textit{molflöde ut}$$

dvs

$$\dot{n} = \dot{n}_1 - \dot{n}_2 \tag{1}$$

Allmänna gaslagen gäller i tanken

$$pV = nR\theta \quad \text{eller} \quad n = \frac{pV}{R\theta}$$

där θ är konstant (isotermiska förhållanden) och V är konstant.

Derivering medför att

$$\dot{n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{pV}{R\theta}\right) = \frac{V}{R\theta}\dot{p}$$

Tillsammans med ekvation (1) och

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= k_1\sqrt{p_1 - p} \\ \dot{n}_2 &= k_2 u^2 \sqrt{p - p_2} \end{aligned}$$

fås

$$\dot{p} = f(p, u) = \frac{R\theta}{V}\left(k_1\sqrt{p_1 - p} - k_2 u^2 \sqrt{p - p_2}\right)$$

b) Stationärvärden ges av $f(p_0, u_0) = 0$, dvs

$$k_1\sqrt{p_{10} - p_0} - k_2 u_0^2 \sqrt{p_0 - p_{20}} = 0$$

vilket medför att

$$u_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}\frac{\sqrt{p_{10} - p_0}}{\sqrt{p_0 - p_{20}}}}$$

c) Linjärisering innebär att

$$\dot{p} = f(p,u) \approx f(p_0,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p_0,u_0}(p-p_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p_0,u_0}(u-u_0)$$

Låt $a = -\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p_0,u_0}$ och $b = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p_0,u_0}$, $\Delta p = p - p_0$, $\Delta u = u - u_0$

Eftersom $\Delta\dot{p} = \dot{p}$ fås

$$\Delta\dot{p} = -a\Delta p + b\Delta u$$

Laplacetransformering ger att

$$s\Delta P(s) = -a\Delta P(s) + b\Delta U(s)$$

dvs

$$(s+a)\Delta P(s) = b\Delta U(s)$$

eller

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s+a}$$

a och b blir

$$\begin{aligned} a &= -\left.\frac{\partial f}{\partial p}\right|_{p_0.u_0} = -\frac{1}{2}\frac{R\theta}{V}\left(-k_1\frac{1}{\sqrt{p_{10}-p_0}} - k_2u_0^2\frac{1}{\sqrt{p_0-p_{20}}}\right) \\ b &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{p_0,u_0} = -2\frac{R\theta}{V}k_2u_0\sqrt{p_0-p_{20}} \end{aligned}$$

Sökt överföringsfunktion med värden är därför

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-2\frac{R\theta}{V}k_2u_0\sqrt{p_0-p_{20}}}{s+\frac{1}{2}\frac{R\theta}{V}\left(k_1\frac{1}{\sqrt{p_{10}-p_0}} + k_2u_0^2\frac{1}{\sqrt{p_0-p_{20}}}\right)}$$

vilket med u_0 ovan ger

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-2\frac{R\theta}{V}\sqrt{k_1k_2\sqrt{p_{10}-p_0}\sqrt{p_0-p_{20}}}}{s+\frac{1}{2}\frac{R\theta}{V}\frac{k_1}{\sqrt{p_{10}-p_0}}\left(1+\frac{(p_{10}-p_0)}{(p_0-p_{20})}\right)}$$

4.16

Allmänna gaslagen

$$pV = nR\theta$$

R = gaskonstant, n = antal mol , nR är konstant för en given gasmängd.

Låt $\begin{cases} \Delta p &= p - p_0 \\ \Delta\theta &= \theta - \theta_0 \\ \Delta V &= V - V_0 \end{cases}$ vara avvikelser från önskad arbetspunkt, $p_0 = nR\frac{\theta_0}{V_0}$

Serieutveckla, dvs linjärisera uttrycket för trycket

$$p \approx p_0 + \left.\frac{\partial p}{\partial\theta}\right|_{\theta_0,V_0}\underbrace{(\theta-\theta_0)}_{\Delta\theta} + \left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{\theta_0,V_0}\underbrace{(V-V_0)}_{\Delta V}$$

För gascylindern gäller att $\frac{\partial p}{\partial\theta} = nR\,\frac{1}{V}$ samt $\frac{\partial p}{\partial V} = nR\theta(\frac{-1}{V^2})$, dvs

$$\Delta p = \frac{nR}{V_0}\Delta\theta - \frac{nR\theta_0}{V_0^2}\Delta V$$

4.17

Energibalans innebär att

$$\textit{upplagrad energi / tidsenhet} \;=\; \textit{effekt in} \;-\; \textit{effekt ut}$$

dvs

$$\frac{d}{dt}(C \cdot \theta_i) = P - P_{ut}$$

Eftersom C är konstant och $P_{ut} = k(\theta_i - \theta_u)$ fås

$$C\frac{d\theta_i}{dt} = P - k(\theta_i - \theta_u)$$

Laplacetransformering ger

$$Cs\Theta_i(s) = P(s) - k\big(\Theta_i(s) - \Theta_u(s)\big)$$

dvs

$$(Cs + k)\Theta_i(s) = P(s) + k\Theta_u(s)$$

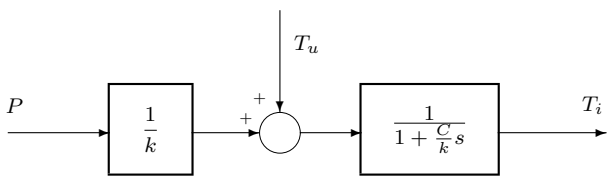
eller

$$\Theta_i(s) = \frac{1}{1 + \frac{C}{k}s}\Theta_u(s) + \frac{1/k}{1 + \frac{C}{k}s}P(s)$$

De sökta överföringsfunktionerna är därför

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{\Theta_i(s)}{\Theta_u(s)} = \frac{1}{1 + \dfrac{C}{k}s} \\ G_2(s) &= \frac{\Theta_i(s)}{P(s)} = \frac{1/k}{1 + \dfrac{C}{k}s} \end{aligned}$$

Blockschema för ugnen ser ut som



vilket enklast inses genom att skriva $\Theta_i(s)$ som

$$\Theta_i(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{C}{k}s}\left(\Theta_u(s) + \frac{1}{k}P(s)\right)$$

4.18

För den tunna plåten gäller

$$\textit{engergiinnehåll} \;/\; \mathrm{m}^2 = \rho c d\theta_1\,, \quad [\gamma/\mathrm{m}^2]$$

Ändringen i energin fås genom Bolzmanns lag

$$\rho c d\frac{d\theta_1}{dt} = \sigma(\theta_0^4 - \theta_1^4)$$

Linjärisera kring arbetspunkten θ (ugn och plåt samma temperatur)

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1 &= \theta_1 - \theta \\ \Delta\theta_0 &= \theta_0 - \theta \end{aligned}$$

$$\rho c d \frac{\Delta\theta_1}{dt} = \sigma 4\theta^3(\Delta\theta_0 - \Delta\theta_1)$$

Laplacetransformering

$$\frac{\Delta\Theta_1(s)}{\Delta\Theta_0(s)} = \frac{1}{1+\tau s} \quad \text{där} \quad \tau = \frac{\rho c d}{4\sigma\theta^3}$$

Då arbetstemperaturen θ ökar blir systemet snabbare

4.19

$$\begin{aligned}
E &= \text{Energiinnehåll} \quad [\partial] \\
V &= \text{Volym} \quad [\mathrm{m}^3] \\
q &= \text{Flöde} \quad [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}] \\
\theta &= \text{Temperatur} \quad [\mathrm{K}] \\
\rho &= \text{Densitet} \quad [\mathrm{kg}/\mathrm{m}^2] \\
c_p &= \text{Värmekapacitivitet} \quad 4.18\ [\mathrm{kJ}/\mathrm{kgK}]
\end{aligned}$$

Ändring i upplagrad energi beror på volym och temperaturändring i tanken

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\big(V\rho c_p\theta_2\big) = \frac{dV}{dt}\rho c_p\theta_2 + V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt} = \big(q_1 - q_2\big)\rho c_p\theta_2 + V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt}$$

Ändringen kan även formuleras som skillnaden mellan tillförd och bortförd effekt

$$\frac{dE}{dt} = q_1\rho c_p\theta_1 - q_2\rho c_p\theta_2 + P$$

Kombineras uttrycken fås ett uttryck för systemdynamiken

$$\begin{cases} V\rho c_p\dfrac{d\theta_2}{dt} = -\big(q_1 - q_2\big)\rho c_p\theta_2 + \big(q_1\theta_1 - q_2\theta_2\big)\rho c_p + P \\ \dfrac{dV}{dt} = q_1 - q_2 \end{cases}$$

Dynamiken förenklas genom antagandet $q_1 = q_2 = q$, dvs V konstant

$$V\rho c_p\frac{d\theta_2}{dt} = q\rho c_p(\theta_1 - \theta_2) + P$$

a) Val av stationärpunkt ($\dot{\theta}_2 = 0$), $\theta_{10} = 20°\mathrm{C}$, $\theta_{20} = 40°\mathrm{C}$, dvs

$$P_0 + q\rho c_p(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_0 \ = \ 0.01 \cdot 10^3 \cdot 4.18 \cdot 10^3 \cdot 20 \ = \ 8.4 \cdot 10^5\ [\mathrm{W}]$$

b) Laplacetransformera

$$V\rho c_p\, s\Delta\Theta_2(s) = q\rho c_p\,\left(\Delta\Theta_1(s) - \Delta\Theta_2(s)\right) + \Delta P(s)$$

där $\Delta P(s) = k(\Delta\Theta_0(s) - \Delta\Theta_2(s))$
efter omflyttning

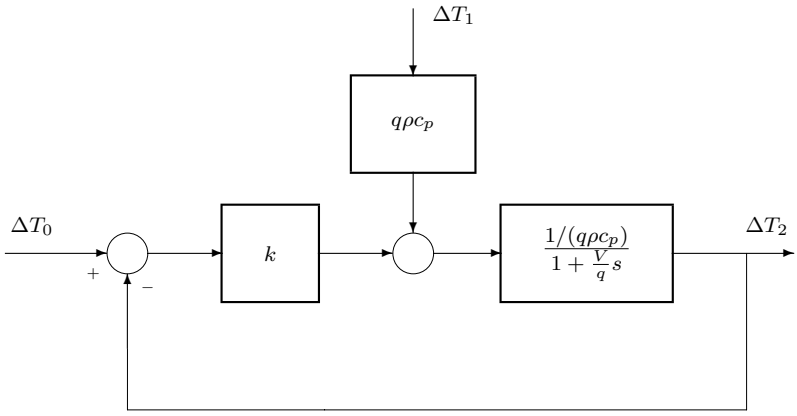
$$\Delta\Theta_2(s) = \frac{1}{q\rho c_p + (V\rho c_p)s}\big(q\rho c_p\Delta\Theta_1(s) + k(\Delta\Theta_0(s) - \Delta\Theta_2(s))\big)$$

Se blockschema på nästa sida.

c) Givaren beskrivs med överföringsfunktionen $H(s) = \dfrac{1}{1+2s}$
Jämför med tidskonstanten i tanken

$$T_{\mathrm{tank}} = \frac{V}{q} = 100\ [\mathrm{sek}]$$

Temperaturgivarens dynamik är snabb i jämförelse med tankens dynamik, $T_{\mathrm{tank}} \gg 2$. Givarens dynamik kan därför approximeras med en konstant.



4.20

Vi vill studera det termiska energiflödet per areaenhet genom väggen. Energiflödet mellan omgivningen och ytskiktet ges av värmeövergångstalet α medan flödet mellan angränsande skikt bestäms av materialets värmekonduktivitet λ.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Ändring}\\ \text{av energi}\\ \text{per areaenhet}\\ \text{per tidsenhet}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Effekt}\\ \text{per areaenhet}\\ \text{in}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c}\text{Effekt}\\ \text{per areaenhet}\\ \text{ut}\end{array}\right\}$$

För det första skiktet av väggen fås då

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\{c\rho d x_1\}}_{\text{Ändring av energi}} = \underbrace{\alpha u + \frac{\lambda}{d}x_2}_{\text{Effekt in}} - \underbrace{\alpha x_1 - \frac{\lambda}{d}x_1}_{\text{Effekt ut}} = \alpha(u_1 - x_1) + \frac{\lambda}{d}(x_2 - x_1)$$

Enligt uppgift är c, ρ konstanta och vi får

$$\dot{x}_1 = (-\frac{\alpha}{c\rho d} - \frac{\lambda}{c\rho d^2})x_1 + \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_2 + \frac{\alpha}{c\rho d}u$$

På liknande sätt fås för resten av väggen

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_1 - \frac{2\lambda}{c\rho d^2}x_2 + \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_3\\ \dot{x}_3 &= \frac{\lambda}{c\rho d^2}x_2 + (-\frac{\alpha}{c\rho d} - \frac{\lambda}{c\rho d^2})x_3\\ y &= \alpha x_3\end{aligned}$$

Formulera på tillståndsform

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{c\rho d}\begin{bmatrix} -\alpha - \frac{\lambda}{d} & \frac{\lambda}{d} & 0\\ \frac{\lambda}{d} & -\frac{2\lambda}{d} & \frac{\lambda}{d}\\ 0 & \frac{\lambda}{d} & -\alpha - \frac{\lambda}{d}\end{bmatrix} x + \frac{\alpha}{c\rho d}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} u\\ y &= \begin{bmatrix}0 & 0 & \alpha\end{bmatrix} x\end{aligned}$$

Insättning av numeriska värden ger

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -2.1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2.1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{1500}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} x
\end{aligned}$$

4.21

De krafter som verkar på flottören är

$$\begin{array}{lll}
\uparrow & F_1 = A\,(u-y)\rho g & \text{(lyftkraft, undanträngd vattenmängd)} \\
\downarrow & F_2 = Ah(\rho/2)g & (Ah\rho/2 = \text{flottörans tyngd}) \\
\uparrow & F_3 = c\,(\dot{u}-\dot{y}) & \text{(dämpning)}
\end{array}$$

a) Kraftjämvikt

$$m\ddot{y} = F_1 - F_2 + F_3$$
$$Ah\frac{\rho}{2}\ddot{y} = A(u-y)\rho g - Ah\frac{\rho}{2}g + c\,(\dot{u}-\dot{y})$$

b) Antag att systemet är i vila, dvs $\ddot{y} = \dot{y} = \dot{u} = 0$
Jämviktsnivåerna ges av

$$\begin{aligned}
&A(u_0 - y_0)\rho g - Ah\frac{\rho}{2}g = 0 \\
\Rightarrow \quad &u_0 - y_0 = h/2
\end{aligned}$$

c) Små förändringar kring jämviktsläget $y = y_0 + \Delta y\,,\ u = u_0 + \Delta u$
Eftersom $\ddot{y} = \Delta\ddot{y}\,,\ \dot{y} = \Delta\dot{u}$ och $\dot{u} = \Delta\dot{u}$ fås

$$Ah\frac{\rho}{2}\Delta\ddot{y} = A(\Delta u - \Delta y)\rho g + c\,(\Delta\dot{u} - \Delta\dot{y}) + \left[A(u_0 - y_0)\rho g - Ah\frac{\rho}{2}g\right]$$

Valet att ligga runt jämviktsläget gör att sista parentesen blir noll, dvs man behöver inte ta hänsyn till u_0, y_0, bara avvikelserna $\Delta u, \Delta y$.

$$\frac{Ah\rho}{2}\Delta\ddot{y} + c\Delta\dot{y} + A\rho g\Delta y = c\Delta\dot{u} + A\rho g\Delta u$$

Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{(cs + A\rho g)}{(\frac{Ah\rho}{2}s^2 + cs + A\rho g)} = \frac{1 + \frac{c}{A\rho g}s}{1 + \frac{c}{A\rho g}s + \frac{h}{2g}s^2}$$

4.22

a) Flödesbalans innebär att

$$\textit{upplagrad volym / tidsenhet} = \textit{flöde in} - \textit{flöde ut}$$

dvs

$$\frac{d}{dt}(V) = u - w$$

Eftersom

$$V = Ah$$

där A är konstant och $w = av$, där $v = \sqrt{2gh}$ enligt Bernoulli, fås

$$A\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}$$

eller

$$\dot{h} = \frac{1}{A}(u - a\sqrt{2gh}) = f(h, u)$$

vilket med insatta värden ger

$$\dot{h} = \frac{1}{0.5}(u - 2 \cdot 10^{-4}\sqrt{2 \cdot 10 \cdot h}) = 2u - 1.789 \cdot 10^{-3}\sqrt{h}$$

b) Linjärisering innebär att

$$\dot{h} = f(h, u) \approx f(h_0, u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h_0,u_0}(h - h_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{h_0,u_0}(u - u_0)$$

där $f(h_0, u_0) = 0$ är arbetspunkten. Låt

$$a = -\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h_0,u_0},\ b = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{h_0,u_0},\ \Delta h = h - h_0,\ \Delta u = u - u_0$$

Eftersom $\dot{h} = \Delta\dot{h}$ fås

$$\Delta\dot{h} = -a\Delta h + b\Delta u$$

eller

$$(s + a)\Delta H(s) = b\Delta U(s)$$

vilket medför att överföringsfunktionen blir

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b}{s + a}$$

a och b blir

$$\begin{aligned} a &= -\left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_{h_0,u_0} = \frac{a}{A}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2gh_0}}2g = \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt{h_0}} \\ b &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{h_0,u_0} = \frac{1}{A} \end{aligned}$$

dvs sökt överföringsfunktion är

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1/A}{s + \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt{h_0}}}$$

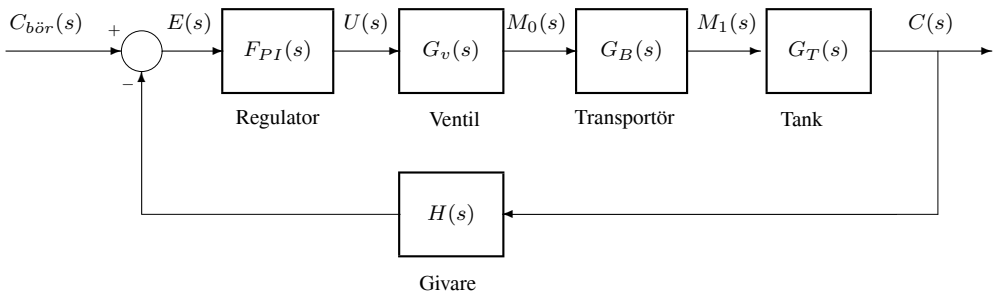
I fallet $h_0 = 0.4$ fås

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2}{s + \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.5}\sqrt{\frac{10}{2}}\frac{1}{\sqrt{0.4}}} = \frac{2}{s + 1,41 \cdot 10^{-3}}$$

och för $h_0 = 0.8$ fås

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2}{s + \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0.5}\sqrt{\frac{10}{2}}\frac{1}{\sqrt{0.8}}} = \frac{2}{s + 1 \cdot 10^{-3}}$$

Tidskonstanten $T = \dfrac{1}{\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_0}}} = \dfrac{A}{a}\sqrt{\dfrac{2}{g}}\sqrt{h_0}$



4.23

Blockschema över systemet ser ut som

beteckningar

$C_{bör}(s)$ är börvärdeskoncentrationen

$C(s)$ är koncentrationen i blandningstanken och även i utflödet eftersom ideal omrörning antas.

$E(s)$ är skillnaden mellan $C_{bör}(s)$ och mätt koncentration. Givaren antas ideal (utan dynamik), dvs $H(s) = 1$, vilket innebär att $E(s) = C_{bör}(s) - C(s)$.

$U(s)$ är styrsignalen från regulatorn till ventilen. Det antas att $U(s)$ är samma som $M_0(s)$, dvs $G_v(s) = 1$. Eventuell förstärkning kan "lyftas" in i regulatorn.

$M_0(s)$ Pulvrets massflöde ut från ventilen.

$M_1(s)$ Pulvrets massflöde ner i tanken

Överföringsfunktioner enligt nedan:

Regulatorn given enligt upgift.

$$F_{PI}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i}\right)$$

Bandtransportören fördröjd 2 minuter innebär att

$$m_1(t) = m_0(t-2)$$

Laplacetransformering ger

$$M_1(s) = M_0(s)e^{-2s}$$

Materialbalans i tanken innebär att

$$\textit{upplagrad massa / tidsenhet} \;=\; \textit{massflöde in} \;-\; \textit{massflöde ut}$$

dvs

$$\frac{d}{dt}(VC) = m_1 - qC$$

eller

$$V\frac{dC}{dt} = m_1 - qC$$

eftersom V är konstant. Laplacetransformering ger

$$VsC(s) = M_1(s) - qC(s)$$

eller

$$(Vs + q)C(s) = M_1(s)$$

dvs

$$G_T(s) = \frac{C(s)}{M_1(s)} = \frac{1}{q + Vs} = \frac{1/q}{1 + (V/q)s}$$

vilket med värden ger

$$G_T(s) = \frac{10}{1 + 5s}$$

5

Analys och specifikation i tids- och frekvensplanet

5.1

De tre fallen kan sammanfattas i

$$G(s) = \frac{as+2}{(s+1)(s+2)} \quad a = 0, 4, -2$$

Stegsvaret ges av

$$Y(s) = \frac{as+2}{(s+1)(s+2)}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{a-2}{s+1} + \frac{1-a}{s+2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = \big(1 + (a-2)e^{-t} + (1-a)e^{-2t}\big)\theta(t)$$

Impulssvaret ges av

$$Y(s) = \frac{as+2}{(s+1)(s+2)} = -\frac{(a-2)}{s+1} - \frac{2(1-a)}{s+2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = (-(a-2)e^{-t} - 2(1-a)e^{-2t})\theta(t)$$

Notera att impulssvaret är derivatan av stegsvaret.

Då nollställena ligger nära imaginäraxeln jämfört med polerna gäller att nollställen i vänstra halvplanet ger en extra översväng medan nollstället i högra halvplanet ger en undersväng.

5.2

Antag enligt uppgiften ett första ordningens system, som allmänt har formen

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_d}}{1+Ts}$$

Med de standardmässiga in- och utsignalbeteckningarna $u(t)$ och $y(t)$ blir stegsvaret då insignalen ändras från nivån u_0 till u_1 vid tidpunkten noll (visa själv)

$$y(t) = y_0 + K\big(1 - e^{-(t-T_d)/T}\big)\sigma(t - T_d)(u_1 - u_0)$$

där y_0 är den konstanta nivån som insignalen u_0 orsakar.

En uppritning av stegsvaret givet data i uppgiften, se heldragen linje i fig. 5.1, visar att starten är lite mjuk och försiktig, vilket beror på att dynamiken i realiteten är av högre ordning (ytterligare tidskonstanter), jmf fig. 5.5 och fig. 5.7 i läroboken. Ett approximativt sätt att fånga upp denna dynamik är att modellera den med en transportfördröjning motsvarande den tid det tar för stegsvaret att nå upp till 10% av dess slutvärde. Om vi utgår från att utsignalen förändras från 50 till 80, motsvarar 10%-nivån $50 + 0.1 \cdot 30 = 53$, vilket inträffar efter drygt 3 minuter. Vi väljer därför transportfördröjningen $T_d = 3$.

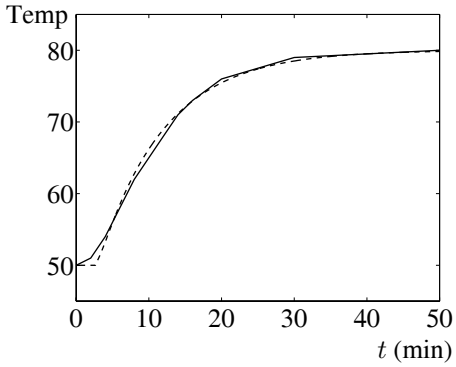
Tidskonstanten T läses av vid 63% av slutnivån, d v s vid nivån $50+0.63\cdot 30 \approx 69$. Denna nivå inträffar efter drygt 12 minuter. Avdrag av transportfördröjningen ger då $T = 12 - T_d = 9$ minuter.

Slutligen bestäms den statiska förstärkningen K genom kvoten mellan skillnaden i sluttemperatur och initialtemperatur och skillnaden i slutvärdet av styrsignalen och initialvärdet, dvs

$$K = \frac{80 - 50}{4} = \frac{30}{4} = 7.5 \quad [^\circ\mathrm{C/mA}]$$

Överföringfunktionen blir med dessa värden

$$G(s) = \frac{7.5e^{-3s}}{1 + 9s}$$



Figur 5.1 Verkligt stegsvar (heldragen linje) och modellens stegsvar (streckad linje).

5.3

Överföringsfunktionen

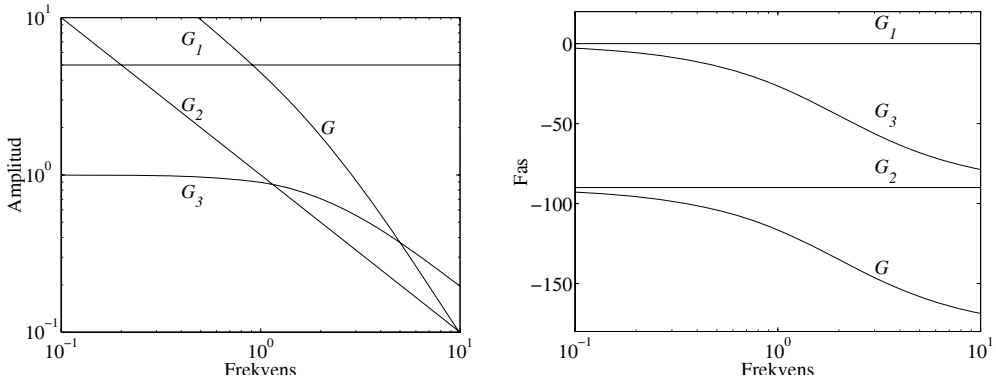
$$G(s) = \frac{5}{s(1 + s/2)}$$

kan delas upp i

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s) \text{ där } G_1(s) = 5, G_2(s) = \frac{1}{s} \text{ och } G_3(s) = \frac{1}{1 + s/2}$$

I de tre fallen gäller att

$G_1(s)$	Lågfrekvensasymptot 5	$\underline{/G_1(j\omega)} = 0$
$G_2(s)$	Lågfrekvensasymptot 1/s. Punkt på asymptotkurvan $\left\lvert\frac{1}{\omega}\right\rvert_{\omega=1} = 1$	$\underline{/G_2(j\omega)} = -90^\circ$
$G_3(s)$	Lågfrekvensasymptot 1. Brytfrekvens $\omega = 2$, ner, enkel. Korrigera	$\underline{/G_3(j\omega)} = -\arctan(\omega/2)$



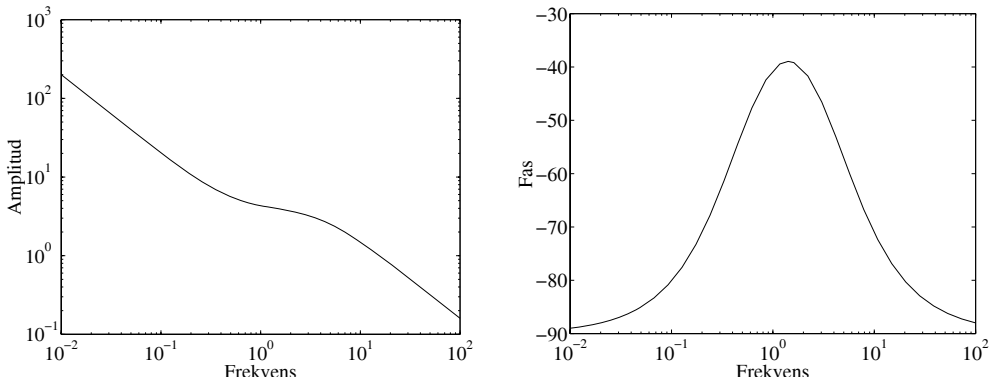
5.4

a)

$$G(s) = \frac{2(1 + s/0.5)}{s(1 + s/4)}$$

- Lågfrekvensasymptot $2/s$. Punkt på asymptotkurvan $|2/\omega|_{\omega=2} = 1$
- Brytfrekvenser

  $\omega_1 = 0.5$ upp, enkel
  $\omega_2 = 4$ ner, enkel
- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Faktorn $(1+s/0.5)$ korrigeras med $+3$ dB vid $\omega = 0.5$ och $+1$ dB vid $\omega = 0.25$ och 1. Faktorn $(1 + s/4)$ korrigeras med -3 dB vid $\omega = 4$ och -1 dB vid $\omega = 2$ och 8.
- $\underline{/G(j\omega)} = -90^\circ + \arctan(\omega/0.5) - \arctan(\omega/4)$



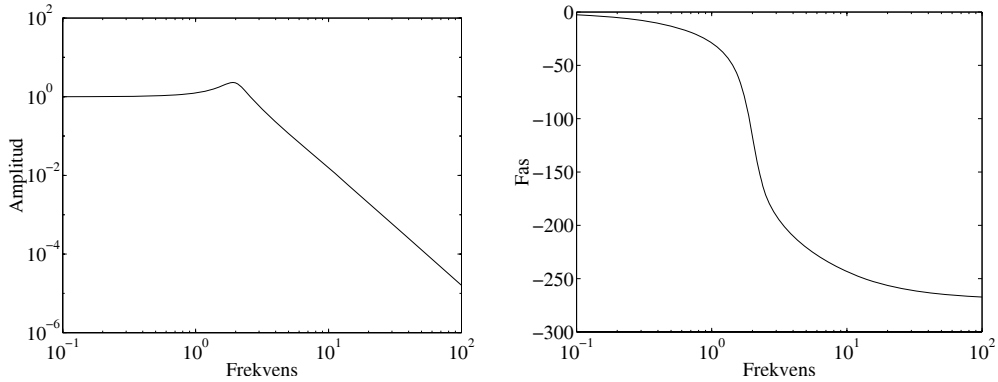
b)

$$G(s) = \frac{16}{(s+4)(s^2+0.8s+4)} = \frac{1}{\big(1+0.2s+(s/2)^2\big)(1+s/4)}$$

- Lågfrekvensasymptot 1
- Brytfrekvenser

  $\omega_1 = 2$ ner, dubbel
  $\omega_2 = 4$ ner, enkel
- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Andragradsuttrycket korrigeras med hjälp av fig. 5.15 i läroboken för kurvan $\zeta = 0.2$, vilket ger korrigeringen $+2.2$ dB vid halva brytfrekvensen $\omega = 1$, $+8$ dB vid brytfrekvensen $\omega = 2$ och $+2.2$ dB vid dubbla brytfrekvensen $\omega = 4$ (asymptoten har här sjunkit med $-2 \cdot 6$ dB).

  Förstagradsuttrycket korrigeras med -3 dB vid $\omega = 4$ och -1 dB vid $\omega = 2$ och 8. Korrigeringarna adderas för brytpunkter "nära" varandra, i detta fallet för $\omega = 2$ och 4.
- $\underline{/G(j\omega)} = -\arctan\big(\frac{0.2\omega}{1-(0.5\omega)^2}\big) - \arctan(\omega/4) \quad (-180^\circ$ för $\omega > \omega_1)$.

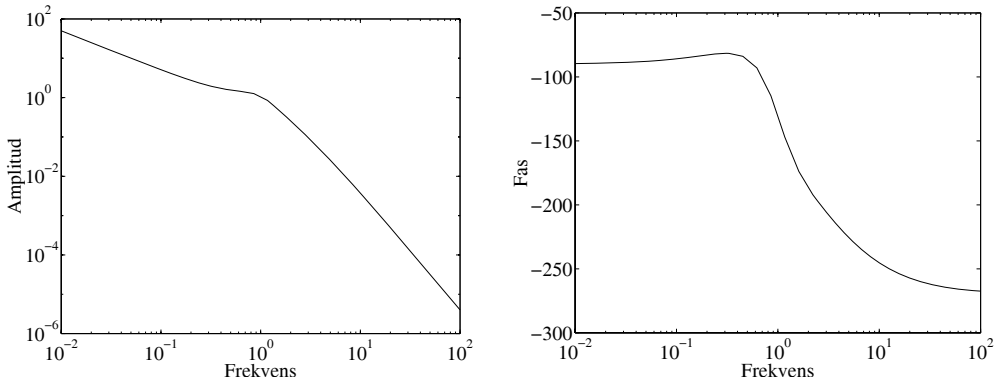


c)

$$G(s) = \frac{4(s+0.5)}{s(s+4)(s^2+s+1)} = \frac{0.5(1+s/0.5)}{s(1+s/4)(1+s+s^2)}$$

- Lågfrekvensasymptot $0.5/s$. Punkt på asymptotkurvan $\left|\frac{0.5}{\omega}\right|_{\omega=0.5} = 1$
- Brytfrekvenser

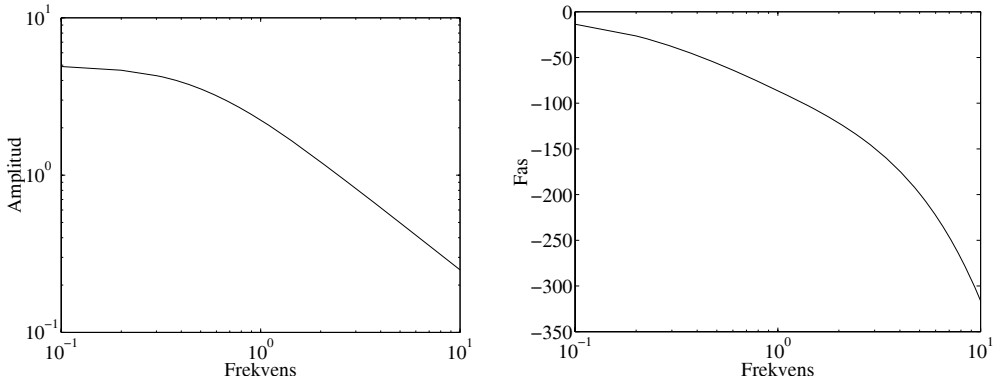
  $\omega_1 = 0.5$ upp, enkel
  $\omega_2 = 1$ ner, dubbel
  $\omega_3 = 4$ ner, enkel
- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Andragradsuttrycket korrigeras med hjälp av fig. 5.15 i läroboken för kurvan $\zeta = 0.5$, vilket ger $+1$ dB vid halva brytfrekvensen $\omega = 0.5$, 0 dB vid brytfrekvensen $\omega = 1$ och $+1$ dB vid dubbla brytfrekvensen $\omega = 2$ (asymptoten har här sjunkit med $-2 \cdot 6$ dB). Förstagradsuttrycket $(1 + s/0.5)$ korrigeras med $+3$ dB vid $\omega = 0.5$ och $+1$ dB vid $\omega = 0.25$ och 1. Förstagradsuttrycket $(1 + s/4)$ korrigeras med -3 dB vid $\omega = 4$ och -1 dB vid $\omega = 2$ och 8. Korrigeringarna adderas för brytpunkter "nära" varandra, i detta fallet för $\omega = 0.5$, 1 och 2.
- $\underline{/G(j\omega)} = \arctan(\omega/0.5) - 90^\circ - \arctan(\omega/4) - \arctan\big(\frac{\omega}{1-\omega^2}\big) \quad (-180^\circ$ för $\omega > \omega_2)$



d)

$$G(s) = \frac{2.5e^{-0.4s}}{s+0.5} = \frac{5e^{-0.4s}}{1+s/0.5}$$

- Lågfrekvensasymptot 5
- Brytfrekvenser $\omega_1 = 0.5$ ner, enkel
- Korrigera amplitudkurvan med -3 dB vid $\omega = 0.5$ och -1 dB vid $\omega = 0.25$ och 1.
- $\underline{/G(j\omega)} = -\arctan(\omega/0.5) - 0.4\omega\frac{180}{\pi}$

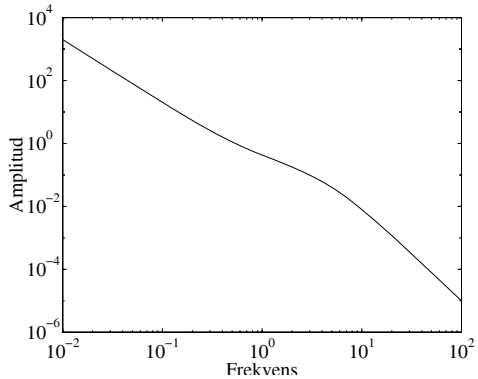


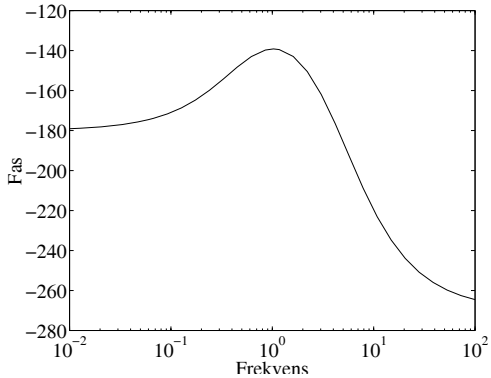
e)

$$G(s) = \frac{10(s+0.5)}{s^2(s+5)^2} = \frac{0.2(1+s/0.5)}{s^2(1+s/5)^2}$$

- Lågfrekvensasymptot $0.2/s^2$. Punkt på asymptotkurvan $|\frac{0.2}{\omega^2}|_{\omega=\sqrt{0.2}} = 1$.
- Brytfrekvenser

  $\omega_1 = 0.5$ upp, enkel
  $\omega_2 = 5$ ner, dubbel
- Korrigera till "korrekta" amplitudkurvan. Faktorn $(1+s/0.5)$ korrigeras med $+3$ dB vid $\omega = 0.5$ och $+1$ dB vid $\omega = 0.25$ och 1. Faktorn $(1+s/5)$ korrigeras med -6 dB vid $\omega = 5$ och -2 dB vid $\omega = 2.5$ och 10.
- $\underline{/G(j\omega)} = \arctan(\omega/0.5) - 2\cdot 90^\circ - 2\arctan(\omega/5)$





5.5

Om

$$G(s) = \frac{1}{(1+0.5s)^2}$$

matas med insignalen $u(t) = 3\sin(2t) - e^{-t}\cos(0.5t)$ blir utsignalen

$$y(t) = 3|G(j2)|\sin(2t + \underline{/G(j2)})$$

där

$$|G(j2)| = \frac{1}{(1+(0.5\cdot 2)^2)} = 0.5$$

och

$$\underline{/G(j2)} = -2\arctan 0.5\cdot 2 = -\pi/2$$

dvs $y(t)$ blir

$$y(t) = 1.5\sin(2t - \pi/2)$$

Notera att $e^{-t}\cos(0.5t)$ inte ger upphov till något värde i stationärtillståndet eftersom denna del går mot noll då t går mot oändligheten.

5.6

- Lågfrekvensasymptoten är $1/s^2$ enligt bodediagrammet.
- Brytfrekvenserna är

ω_1	$=$	0.5	upp,	dubbel
ω_2	$=$	2	ner,	enkel
ω_3	$=$	5	ner,	enkel

  Eftersom systemet är stabilt, utan dödtid och icke-minfas nollställen blir överföringsfunktionen således

$$G(s) = \frac{1}{s^2}\frac{(1+2\zeta(s/0.5)+(s/0.5)^2)}{(1+s/2)(1+s/5)}$$

5.7

Med pol-nollställesdiagram enligt figur blir överföringsfunktionen

$$G(s) = K\frac{(s+1)(s+5)}{s(s+3)} = \frac{K(1+1/s)(1+5/s)}{(1+3/s)}$$

där K bestäms genom informationen att högfrekvensasymptoten är 0.5, vilket innebär att

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = K \equiv 0.5$$

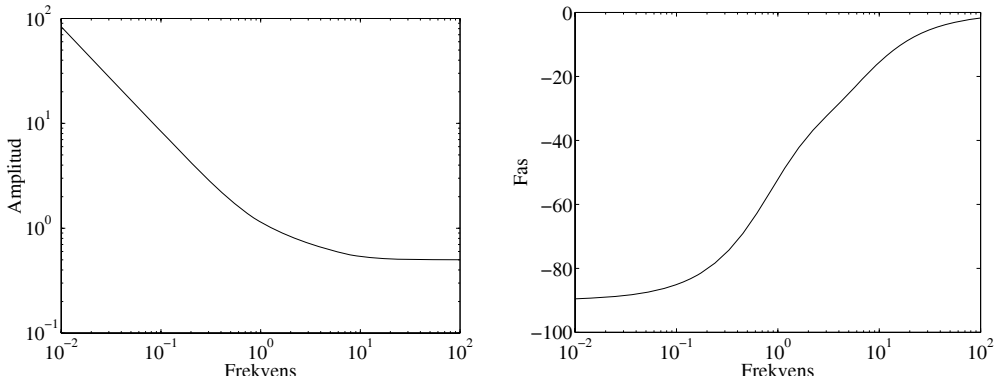
dvs $K = 0.5$. Överföringsfunktionen är alltså

$$G(s) = \frac{0.5(s+1)(s+5)}{s(s+3)} = \frac{2.5/3}{s}\frac{(1+s)(1+s/5)}{(1+s/3)}$$

Bodediagram

- Lågfrekvensasymptot $\dfrac{2.5/3}{s}$. Punkt på asymptotkurvan $|\frac{2.5/3}{\omega}|_{\omega=2.5/3} = 1$
- Brytfrekvenser

  $\omega_1 = 1$ upp, enkel
  $\omega_2 = 3$ ner, enkel
  $\omega_2 = 5$ upp, enkel
- Korrigera
- $\underline{/G(j\omega)} = \arctan(\omega) + \arctan(\omega/5) - 90^\circ - \arctan(\omega/3)$



5.8

I överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{1+s}$$

är dödtiden $T_d = 1/3$. Faktorn $e^{-T_d s}$ approximeras med en Padé-approximation

$$e^{-T_d s} \approx \frac{1 - sT_d/2}{1 + sT_d/2} = \frac{1 - s/6}{1 + s/6}$$

Med denna approximation fås

$$\hat{G}(s) = \frac{1 - s/6}{(1+s)(1+s/6)}$$

<u>Bode</u>

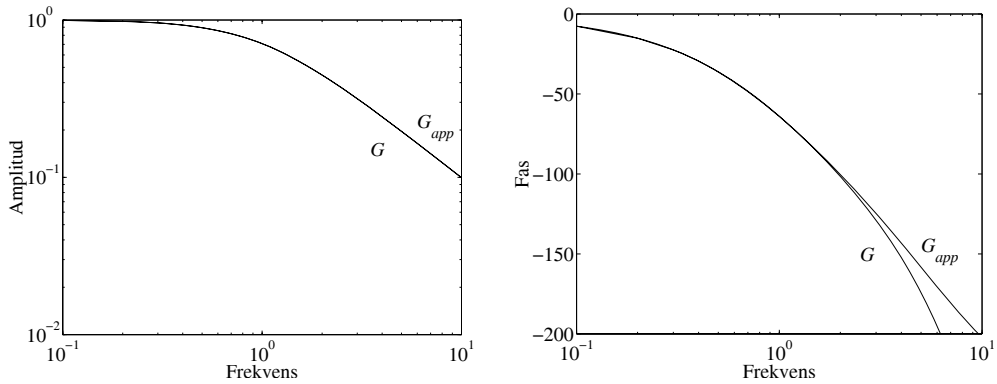
- Lågfrekvensasymptoten 1 i båda fall.
- Brytfrekvens

  $\omega_1 = 1$ ner, enkel (för båda)

  Notera att $|1 - s/6| = |1 + s/6|$.

- Korrigera
- Fasvridning

$$\underline{/G(s)} = -\arctan(\omega) - \frac{\omega}{3}\frac{180}{\pi} \qquad \text{för exakta}$$
$$\underline{/\hat{G}(s)} = -\arctan(\omega) - 2\arctan(\omega/6) \qquad \text{för approximationen}$$



Slutsatser: $|G(s)|$ och $|\hat{G}(s)|$ samma men faserna $\underline{/G(j\omega)}$ och $\underline{/\hat{G}(j\omega)}$ skiljer sig för högre frekvenser

Stegsvar
Exakta

$$Y(s) = \frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{1+s}\frac{1}{s} = e^{-\frac{1}{3}s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$
$$y(t) = (1 - e^{-(t-1/3)})\theta(t-1/3)$$

Approximation

$$Y(s) = \frac{1-s/6}{(1+s)(1+s/6)}\frac{1}{s} = \frac{6-s}{(1+s)(s+6)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1.4}{s+1} + \frac{0.4}{s+6}$$
$$y(t) = (1 - 1.4e^{-t} + 0.4e^{-6t})\theta(t)$$

5.9

Överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)^4}$$

skall approximeras med

$$\hat{G}(s) = \frac{K}{(1+Ts)^2}$$

så att lågfrekvensförstärkningen och fasen vid $-90°$ överensstämmer.

Lågfrekvensförstärkning i de båda fallen är

$$G(0) = \frac{8}{16} = 0.5\,, \quad \text{och} \quad \hat{G}(0) = K$$

vilket innebär att $K = 0.5$

Fasvridningen $-90°$ för det exakta systemet ges av

$$\underline{/G(j\omega)} = -4\arctan\omega/2 = -90°$$

vilket ger frekvensen

$$\omega = 2\tan 22.5^\circ = 0.83$$

Fasvridningen -90° för approximationen ges av

$$\underline{/\hat{G}(j\omega)} = -2\arctan\omega T = -90^\circ$$

vilket för $\omega = 2\tan 22.5^\circ$ implicerar att

$$T = \frac{1}{\omega}\tan 45^\circ = \frac{1}{2\tan 22.5} = 1.2$$

Överföringsfunktionen för approximationen blir sålunda

$$\hat{G}(s) = \frac{0.5}{(1+1.2s)^2}$$

<u>Bode</u>

Exakta

$$G(s) = \frac{8}{(s+2)^4} = \frac{0.5}{(1+s/2)^4}$$

- Lågfrekvensasymptot 0.5
- Brytfrekvens

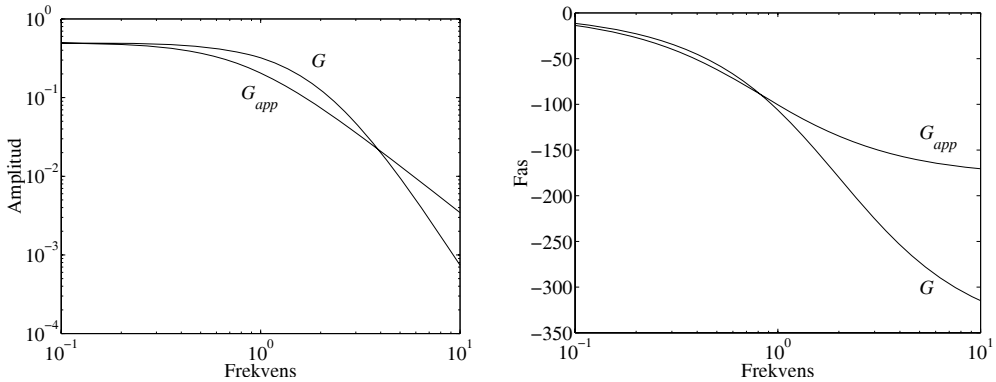
  $\omega_1 = 2$, ner, 4 ggr
- Korrigera
- $\underline{/G(j\omega)} = -4\arctan(\omega/2)$

Approximation

$$\hat{G}(s) = \frac{0.5}{\big(1+(1/0.82)s\big)^2}$$

- Lågfrekvensasymptot 0.5
- Brytfrekvens

  $\omega_1 = 0.82$, ner, dubbel
- Korrigera
- $\underline{/G(j\omega)} = -2\arctan(1.2\omega)$



Stegsvar

Exakta

$$Y(s) = \frac{8}{(s+2)^4}\frac{1}{s} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{4}{(s+2)^4}$$

$$y(t) = (0.5 - 0.5e^{-2t} - te^{-2t} - t^2e^{-2t} - \frac{4}{6}t^3e^{-2t})\theta(t)$$

Approximation

$$Y(s) = \frac{0.343}{(s+0.828)^2}\frac{1}{s} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+0.828} - \frac{0.414}{(s+0.828)^2}$$

$$y(t) = (0.5 - 0.5e^{-0.828t} - 0.414te^{-0.828t})\theta(t)$$

Kommentar: Noggranheten hos approximationen sämre för högre frekvenser, vilket beloppskurvan och stegsvaret visar.

5.10

Massbalans för tanksystemet

$$\frac{d}{dt}\big(V \cdot c\big) = q_{\text{in}} \cdot c_{\text{in}} - q_{\text{ut}} \cdot c_{\text{ut}}$$

Antag ideal omrörning, dvs tankens koncentration är samma som utflödets $c = c_{\text{ut}}$. Konstanta flöden $q_{\text{in}} = q_{\text{ut}} = q$ ger konstant volym V. Detta innebär att $V\dot{c}_{\text{ut}} = q(c_{\text{in}} - c_{\text{ut}})$

a) Laplacetransformering ger

$$G(s) = \frac{C_{\text{ut}}(s)}{C_{\text{in}}(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{V}{q}}$$

b) Insignlen $c_{\text{in}}(t) = c_0 + 0.2c_0 \sin \omega t$ består av en konstant del som stationärt kommer att förstärkas av lågfrekvensförstärkningen $G(0)$, och en oscillerande del som påverkas av frekvensfunktionen $G(j\omega)$.

Lågfrekvensförstärkning $G(0) = 1 \quad (s \to 0)$

Frekvensfunktionen ges av

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\frac{V}{q}}$$

Stationärt fås

$$c_{\text{ut}}(t) = c_0 \cdot 1 + 0.2\, c_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2(\frac{V}{q})^2}} \sin\big(\omega t - \arctan(\omega\tfrac{V}{q})\big)$$

c) För att uppfylla kraven $\pm 5\%$ krävs

$$\frac{0.2}{\sqrt{1 + \omega^2(\frac{V}{q})^2}} \leq 0.05 \quad \Rightarrow \quad \omega^2\big(\frac{V}{q}\big)^2 \geq 15$$

Eftersom $\omega = 2\pi/T = 4\pi$ krävs volymen

$$V \geq \frac{q\sqrt{15}}{4\pi} \approx 1.85 \text{ [m}^3\text{]}$$

5.11

Enligt uppgift 2.11 är följande överföringsfunktioner givna (se lösning uppgift 2.11)

$$G_{\theta_r\theta} = \frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2} = \frac{1}{(1+s/\alpha)^2}$$

$$G_{\theta_r u} = \alpha^2/6\,\frac{s(s+2)}{(s+\alpha)^2} = \frac{1}{3}\frac{s(1+s/2)}{(1+s/\alpha)^2}$$

För de två överföringsfunktioner fås

$G_{\theta_r\theta} = \dfrac{1}{(1+s/\alpha)^2}$ $\qquad$ $G_{\theta_r u} = \dfrac{1}{3}\dfrac{s(1+s/2)}{(1+s/\alpha)^2}$

•Lågfrekvensasymptot

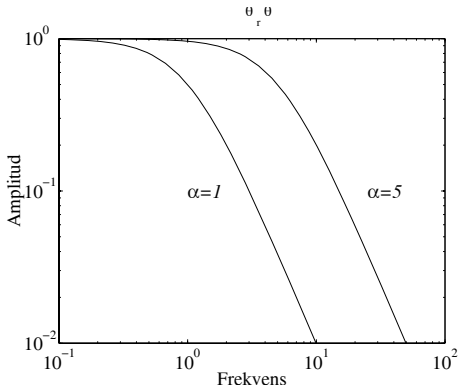
1 $\qquad$ $s/3$. Punkt på asymptotkurvan $|\frac{\omega}{3}|_{\omega=3} = 1$

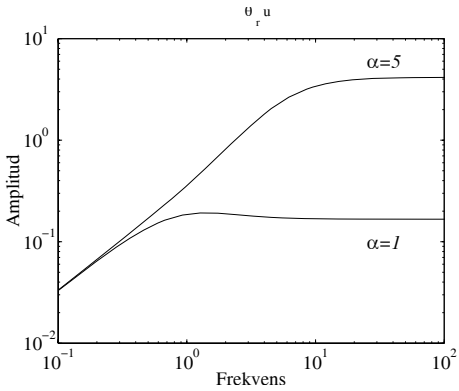
•Brytfrekvens

$\omega_1 = \alpha$, ner, dubbel $\qquad$ $\omega_1 = \alpha$, ner, dubbel
$\omega_2 = 2$, upp, enkel

•Korrigera

Amplituddiagram för $\alpha = 1, 5$ för de två överföringsfunktionerna enligt figurer.





Slutsatser: Ju högre α desto högre bandbredd ω_b (snabbhet), men ju högre α desto högre styrsignalsaktivitet.

5.12

För överföringsfunktionen

$$G_{LP_1}(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

är

- Lågfrekvensasymptot 1
- Brytfrekvens $\omega_1 = 1$, ner, dubbel
- Korrigera

Amplituddiagram, se figur nedan. Bandbredden fås ur

$$|G_{LP_1}(j\omega_b)| = \frac{1}{1+\omega_b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = 0.64$$

För överföringsfunktionen

$$G_{LP_2}(s) = \frac{1}{1+1.4s+s^2}$$

är

- Lågfrekvensasymptot 1
- Brytfrekvens $\omega_1 = 1$, ner, dubbel
- Korrigera, $s^2 + 1.4s + 1 \equiv s^2 + 2\zeta\omega_1 s + \omega_1^2$ implicerar att $\zeta = 0.7$.

Bandbredden fås ur

$$|G_{LP_2}(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega_b^2)^2 + (1.4\omega_b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = 1.01$$

Amplituddiagram, se figur nedan.

Slutsatser: fördel med komplexkonjugerade poler är att bandbredden ökar.
För överföringsfunktionen

$$G_{BP}(s) = \frac{4s^2}{(1+s/0.5)^2(1+s/10)^2}$$

är

- Lågfrekvensasymptot $4s^2$. Punkt på asymptotkurvan $|4\omega^2|_{\omega=0.5} = 1$
- Brytfrekvenser

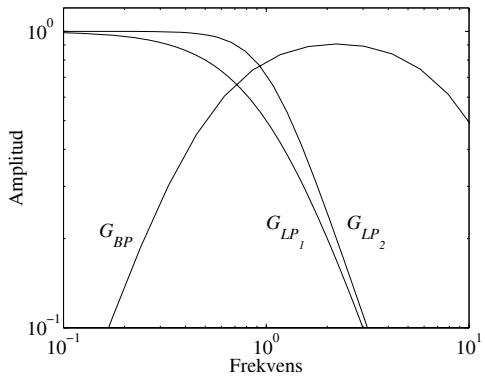
  $\omega_1 = 0.5$ ner, dubbel
  $\omega_2 = 10$ ner, dubbel
- Korrigera

Bandbredd fås ur (intervallet som beloppskurvan inte är 3 dB under 1).

$$|G(j\omega_b)| = \frac{4\omega_b^2}{(1+(\frac{\omega_b}{0.5})^2)(1+(\frac{\omega_b}{10})^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_b = \begin{cases} 0.785 \\ 6.37 \end{cases}$$

dvs

$$\omega_b = [0.785 \quad 6.37]$$



6

Stabilitet och stabilitetsmarginaler

6.1

Impulsfunktionssvaret är

$$Y(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

Inverslaplacetransformering ger

$$y(t) = te^{at}\theta(t)$$

Systemet stabilt för $a = -1$ (poler i vänstra halvplanet) men instabilt för $a = 0$ (poler i origo) och $a = 1$ (poler i högra halvplanet).

6.2

Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned} sX(s) &= -X(s) + 2U(s) \\ sY(s) &= Y(s) - X(s) + U(s) \end{aligned}$$

x löses ut ur första ekvationen och sättes in den andra. Då fås

$$(s-1)Y(s) = -\frac{2\,U(s)}{s+1} + U(s) = \frac{-2+s+1}{s+1}U(s) = \frac{s-1}{s+1}U(s)$$

Sökt överföringsfunktion är

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s-1)}{(s-1)(s+1)}$$

Det är möjligt att kancellera bort polen och nollstället i $s = 1$, vilket resulterar i den in-utsignal stabila överföringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Emellertid är systemet inte internt stabilt eftersom den instabila polen förkortas bort.

6.3

a)

$$s^3 + 4s^2 + 8s + 12 = 0$$

Koefficienterna i Routh-Hurwitz tablå är

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 4 & 12 \\ s^2 & c_0 & 0 \\ s^0 & d_0 & \end{array}$$

där c_0 och d_0 beräknas enligt

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{4 \cdot 8 - 12 \cdot 1}{4} = 5 \\ d_0 &= \frac{c_0 \cdot 12 - 0 \cdot 4}{c_0} = 12 \end{aligned}$$

dvs systemet är stabilt eftersom inga teckenväxlingar sker i första kolumnens koefficienter. Numerisk beräkning ger att polerna ligger i $s_1 = -2.685,\ s_{2,3} = -0.6575 \pm j2.0092$

b)

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 10 = 0$$

Koefficienterna i Routh-Hurwitz tablå är

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 11 & 10 \\ s^3 & 6 & 6 & 0 \\ s^2 & c_0 & c_1 & \\ s^1 & d_0 & 0 & \\ s^6 & e_0 & & \end{array}$$

där c_0, c_1, d_0 och e_0 beräknas enligt

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{6 \cdot 11 - 6 \cdot 1}{6} = 10 \\ c_1 &= \frac{6 \cdot 10 - 0 \cdot 1}{6} = 10 \\ d_0 &= \frac{c_0 \cdot 6 - c_1 \cdot 6}{c_0} = 6 - \frac{10}{10} \cdot 6 = 0 \\ e_0 &= \frac{d_0 \cdot c_1 - 0 \cdot c_0}{d_0} = c_1 = 10 \end{aligned}$$

dvs systemet är marginellt stabilt, med poler på imaginäraxeln, eftersom $d_0 = 0$ och övriga koefficienter i första kolumnen är strikt positiva.

Numerisk beräkning ger polerna $s_{1,2} = -3 \pm j,\ s_{3,4} = \pm j$

c)

$$s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 12s + 10 = 0$$

Koefficienterna i Routh-Hurwitz tablå blir

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 2 & 10 \\ s^1 & 6 & 12 & 0 \\ s^2 & c_0 & c_1 & \\ s^1 & d_0 & 0 & \\ s^0 & e_0 & & \end{array}$$

där c_0, c_1, d_0 och e_0 beräknas

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{6 \cdot 2 - 12 \cdot 1}{6} = \epsilon, \quad \epsilon \to 0 \\
c_1 &= \frac{6 \cdot 10 - 0 \cdot 1}{6} = 10 \\
d_0 &= \frac{c_0 \cdot 12 - c_1 \cdot 6}{c_0} = 12 - \frac{60}{\epsilon}, \quad \epsilon \to 0 \\
e_0 &= \frac{d_0 \cdot c_1 - 0 \cdot c_0}{d_0} = 10
\end{aligned}$$

Då $\epsilon \to 0$ går $d_0 \to -\infty$, dvs antalet teckenväxlingar hos koefficienterna i första kolumnen är 2, vilket innebär att 2 stycken poler ligger i högra halvplanet.

Numerisk beräkning ger polerna $s_1 = -5.9552, \quad s_2 = -0.7448$ och $s_{3,4} = 0.35 \pm j1.4601$

6.5

Stabiliteten avgörs av rötterna till karaktäristiska ekvationen $1 + L(s) = 0$ eftersom dessa är poler i det återkopplade systemet.

Med överföringsfunktioner enligt uppgift fås

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K}{1 + Ts} \cdot \frac{1}{s(1 + 0.1s)} = 0$$

eller

$$(1 + Ts)s(1 + 0.1s) + K = 0$$

vilket är samma som

$$0.1Ts^3 + (0.1 + T)s^2 + s + K = 0$$

Koefficienterna i Routh-Hurwitz tablå blir

$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 0.1T & 1 \\
s^2 & 0.1 + T & K \\
s^1 & c_0 & 0 \\
s^0 & d_0 &
\end{array}$$

där c_0 och d_0 är

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{(0.1 + T)1 - K \cdot 0.1T}{0.1 + T} = 1 - K\,\frac{T}{1 + 10T} \\
d_0 &= \frac{c_0 \cdot K - 0(0.1 + T)}{c_0} = K
\end{aligned}$$

Enligt uppgift är $K > 0$ och $T > 0$ vilket innebär att $0.1T > 0, \quad 0.1 + T > 0$ och $d_0 = K > 0$. Stabiliteten beror alltså på c_0.

Routh-Hurwitz ger att systemet är stabilt om även $c_0 > 0$

$$1 - K\frac{T}{1 + 10T} > 0$$

dvs

$$K < \frac{10T + 1}{T} = 10 + \frac{1}{T}$$

Förstärkningen för att systemet ska vara marginellt stabilt ges av likheten

$$K = 10 + \frac{1}{T}$$

För att få en amplitudmarginal till stabilitetsgränsen minskas K

$$K = \big(10 + \frac{1}{T}\big)/A_m = 5 + \frac{1}{2T}$$

där $A_m = 2$ är amplitudmarginalen 2 ggr.

Speciellt fås

$$\begin{array}{lll} K \to 5 & \text{då} & T \to \infty \\ K \to \infty & \text{då} & T \to 0 \end{array}$$

6.6

Stabiliteten avgörs av rötterna hos $1 + L(s) = 0$ eftersom de är poler hos det slutna systemet.

Studera därför

$$1 + \frac{50}{s(s^2/\omega_0^2 + 0.02s + 1)} = 0$$

eller, efter att ha skrivit uttrycket med gemensam nämnare

$$s(s^2/\omega_0^2 + 0.02s + 1) + 50 = 0$$

dvs

$$\frac{1}{\omega_0^2}s^3 + 0.02s^2 + s + 50 = 0$$

Routh-Hurwitz tablå blir

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1/\omega_0^2 & 1 \\ s^2 & 0.02 & 50 \\ s^2 & c_1 & \\ s^0 & d_1 & \end{array}$$

där

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{0.02 \cdot 1 - 50/\omega_0^2}{0.02} = 1 - \frac{2500}{\omega_0^2} \\ d_1 &= \frac{c_1 \cdot 50 - 0 \cdot 0.02}{c_1} = 50 \end{aligned}$$

Routh-Hurwitz kriterium innebär att systemet är stabilt om alla koefficienter i första kolumnen är strikt positiva, dvs

$$c_1 = 1 - \frac{2500}{\omega_0^2} > 0$$

vilket implicerar att

$$\omega_0 > \sqrt{2500} = 50$$

Systemet stabilt för $\omega_0 \geq 50$, marginellt stabilt om $\omega_0 = 50$.

6.7

a)

$$\begin{aligned} F &= \text{den kraft som verkar på pendelen i vridningspunkten} \\ h &= \text{massans höjdkoordinat} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= F\sin\theta \\ M\ddot{h} &= F\cos\theta - Mg \end{aligned}$$

För små θ är $\ddot{h} \approx 0$ och $\cos\theta \approx 1$, vilket leder till $F = Mg$, och

$$M\ddot{y} = Mg\sin\theta = Mg\frac{y-u}{\ell}.$$

Laplace transformering ger

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-g/\ell}{s^2 - g/\ell} = \frac{-9.81}{(s+\sqrt{9.81})(s-\sqrt{9.81})}$$

Systemet är instabilt med en pol i $s = \sqrt{9.81}$.

b) Kretsöverföringen med PD-regulator

$$L(s) = -\frac{9.81K_p(1+T_d s)}{s^2 - 9.81}$$

Slutna systemet

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-9.81K_p(1+T_d s)}{s^2 - 9.81 - 9.81K_p - 9.81K_pT_d s}$$

Karakteristiska ekvationen

$$s^2 - 9.81K_pT_d s - 9.81(1+K_p) \equiv s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

2:a ordningens system, dvs stabilt då

$$\begin{aligned} -(1+K_p) &> 0 \\ -K_pT_d &> 0 \end{aligned}$$

Detta kräver att

$$K_p < -1 \quad \text{och} \quad T_d > 0$$

För minimal amplitudmarginal $A_{min} = 0.5$ välj

$$K_p = \frac{-1}{0.5} = -2$$

dvs kretsförstärkningens belopp ($|L|$) tillåts minska med en faktor 2 (minimal amplitudmarginal) innan systemet blir instabilt. Bestäm T_d för att få önskad dämpning

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{-9.81(1+K_p)} = \sqrt{9.81} \\ 2\zeta\omega_0 &= -9.81K_pT_d = 2\cdot 9.81T_d \end{aligned}$$

$$T_d = \frac{2\zeta\omega_0}{2\cdot 9.81} = \frac{0.7\sqrt{9.81}}{9.81} = \frac{0.7}{\sqrt{9.81}}$$

c) Det finns en undre gräns för förstärkningens belopp eftersom systemet blir instabilt då ingen återkoppling förekommer (regulatorförstärkning = 0)

6.8

Felet $E(s)$ är definierat som

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

I det återkopplade systemet är $Y(s) = L(s)E(s)$, vilket ger

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}R(s) \qquad \text{där} \qquad L(s) = \frac{K}{s+2}\,\frac{1}{s(s+1)}$$

Enligt uppgift skall felet $e(t)$ vara litet då utsignalen $y(t)$ följer ett börvärde som växer linjärt med hastigheten 0.2 volt/sekund, dvs

$$r(t) = 0.2t\,, \quad t \geq 0$$

Laplacetransformering

$$R(s) = \frac{0.2}{s^2}$$

Felet blir då

$$E(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{K}{s+2}\,\dfrac{1}{s(s+1)}} \cdot \frac{0.2}{s^2} = \frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+K}\,\frac{0.2}{s^2}$$

Under förutsättning att systemet är stabilt ger slutvärdessatsen det stationära felet

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{s(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)+K}\,\frac{0.2}{s^2} = \frac{0.4}{K}$$

För ett fel som är mindre än 10mV krävs att

$$e_s = \frac{0.4}{K} < 10 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad K > 40$$

Stabiliteten kontrolleras med Routh-Hurwitz. Stabiliteten avgörs av rötterna hos $1 + L(s) = 0$ eftersom de är poler hos det slutna systemet. $1 + L(s)$ är ekvivalent med nämnarpolynomet till $E(s)/R(s)$

$$s(s+1)(s+2) + K = 0$$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Routh-Hurwitz tablå

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & c_1 & \\ s^0 & d_1 & \end{array}$$

där

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{3 \cdot 2 - K \cdot 1}{3} = 2 - \frac{K}{3} \\ d_1 &= \frac{c_1 \cdot K - 0 \cdot 3}{c_1} = K \end{aligned}$$

Systemet är enligt Routh-Hurwitz stabilt om första kolumnens koefficienter är strikt positiva, vilket implicerar att

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 - K/3 > 0 \\ d_1 &= K > 0 \end{aligned}$$

dvs

$$0 < K < 6$$

Systemet är därför instabilt för $K > 40$. Kravet på ett stationärt fel mindre än 10mV kan därför inte uppfyllas.

6.9

Den öppna kretsförstärkningen

$$L(s) = \frac{Ke^{-s}}{1+5s}$$

har inga poler i högra halvplanet, dvs stabiliteten kan studeras med hjälp av Nyqvist förenklade kriterium. Kriteriet säger att systemet inte är instabilt om

$$|L(j\omega_\pi)| \leq 1$$

där ω_π ges av

$$\underline{/L(j\omega_\pi)} = -180^\circ$$

Detta kan avgöras grafiskt i ett Bode, alternativt Nyqvistdiagram, där $L(s)/K$ uppritas och amplitudmarginalen avläses vilket ger K. I följande lösning löses dock detta numeriskt med hjälp av de två ekvationerna ovan. Börjar därför med att beräkna ω_π

$$\begin{aligned} \underline{/L(j\omega_\pi)} &= -\omega \cdot \frac{180^\circ}{\pi} - \arctan 5\omega = -180^\circ \\ \Rightarrow \quad & \omega_\pi = 1.69 \end{aligned}$$

Beloppet av kretsförstärkningen för ω_π

$$|L(j\omega_\pi)| = \frac{K}{\sqrt{1+(5\omega_\pi)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1+(5\cdot 1,69)^2}} \leq 1$$

sätter en gräns för K

$$K \leq 8.5$$

Likhet ger det maxvärde som K kan ha för att systemet inte skall vara instabilt, dvs $K_{\max} = 8.5$. Varken Routh-Hurwitz eller polbestämning kan avgöra stabiliteten eftersom systemet innehåller dödtid.

6.10

Allmänt kan ett godtyckligt $L(s)$ skrivas på formen

$$L(s) = \frac{K}{s^n}\frac{a(s)}{b(s)}$$

där a och b polynomen är normerade så att $a(0)/b(0) = 1$. K/s^n är lågfrekvensasymptoten, där K är kretsförstärkningen och n är kretsens typsiffra, dvs antalet integrationer hos $L(s)$.

Fasvridningen blir

$$\underline{/L(j\omega)} = \underline{/K} - n\cdot 90^\circ + \underline{/a(j\omega)/b(j\omega)}$$

Enligt figur har kretsförstärkningen $L(s)$ en fasvridning på -270° för $\omega = 0$.

Då kretsförstärkningen K är positiv fås $\underline{/K} = 0$, dvs

$$\underline{/L(j0)} = -n\cdot 90^\circ = -270^\circ - k360^\circ$$

Typsiffran $n = 3 + 4k$, där $k = 0, 1, 2\ldots$

Stabiliteten studeras med fullständiga Nyqvist kriteriet, där polerna i origo undviks genom

$$s = re^{j\theta}, -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ,\ r \ll 1,$$

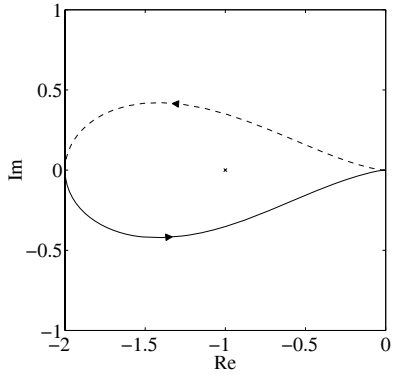
Det innebär $n\cdot 1/2$ varv med medurs omslingringar kring origo, vilket ger totalt antal omslingringarna kring -1 som $N = -1 + \dfrac{n-1}{2} = 2k$ stycken. Då inga poler ligger i högra halvplanet hos $L(s)$ är $P = 0$.

$$Z = N + P = 2k,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

dvs systemet är stabilt då $k = 0$ ty då är $Z = 0$, men instabilt då $k = 1, 2, \ldots$, ty då är $Z > 0$.

6.11

Notera att Nyqvist fullständiga kriterium måste användas i både a), b) och c) eftersom alla överföringsfunktioner har en pol i högra halvplanet, dvs $P = 1$.



a)

$$
\begin{aligned}
L(s) &= \frac{4}{(s-1)(s+2)} \\
L(j\omega) &= -\frac{4}{(1-j\omega)(j\omega+2)} = -\frac{4(2+\omega^2)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} - j\frac{4\omega}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

där sista likheten fås genom komplexkonjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel.

Ur figur fås

$$N = -1$$

vilket innebär att

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0$$

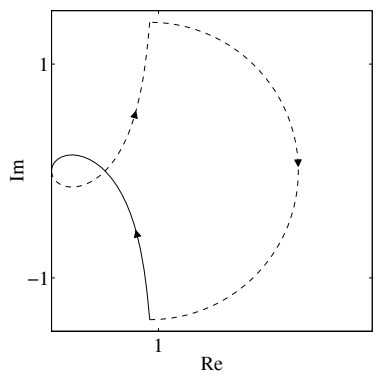
dvs systemet är stabilt enligt Nyqvist kriterium.

b)

$$
\begin{aligned}
L(s) &= \frac{2+s}{s(2-s)} \\
L(j\omega) &= \frac{2+j\omega}{j\omega(2-j\omega)} = \frac{4}{(4+\omega^2)} - j\frac{(4-\omega^2)}{\omega(4+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

där sista likheten fås genom komplexkonjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel. För $s = re^{j\theta}$ där $-90° \leq \theta \leq 90°, \quad r \ll 1$ fås

$$L(re^{j\theta}) \to \frac{1}{r}e^{-j\theta}$$



Ur figur fås

$$N = 0$$

vilket innebär att

$$Z = N + P = 0 + 1 = 1$$

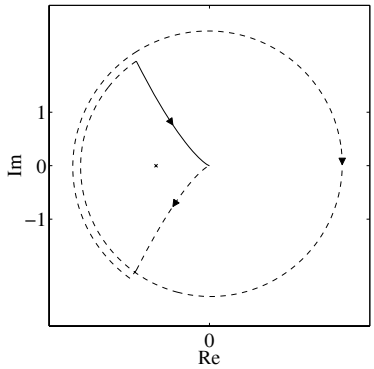
dvs systemet är instabilt ty 1 pol ligger i högra halvplanet hos det slutna systemet enligt Nyqvist kriterium.

c)

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{1}{s^3(1-s)} \\ L(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^3(1-j\omega)} = -\frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)} + j\frac{1}{\omega^3(1+\omega^2)} \end{aligned}$$

där sista likheten fås genom komplex konjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel. För $s = re^{j\theta}$ där $90° \leq \theta \leq 90°$, $r \ll 1$ fås

$$L(re^{j\theta}) \to \frac{1}{r^3}e^{-j3\theta}$$



Ur figur fås $N = 2$ vilket innebär att

$$Z = N + P = 2 + 1 = 3$$

dvs systemet är instabilt med 3 poler i högra halvplanet hos det slutna systemet, enligt Nyqvist kriterium.

6.12

Kretsförstärkningen är

$$L(s) = KG(s) = K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)}$$

Stabiliteten skall studeras med Nyqvist kriterium. Eftersom $L(s)$ har en pol i högra halvplanet, $P = 1$, måste Nyqvist fullständiga kriterium tillämpas.

För att det återkopplade systemet skall vara stabilt enligt Nyqvist kriterium måste

$$Z = N + P = 0$$

dvs $N = -P = -1$, vilket innebär en moturs omslingring av -1.

Värdena på K som ger ett stabilt system kan bestämmas genom att avbilda $L(s)$ för $K = 1$ (dvs $G(s)$) längst Nyqvist väg

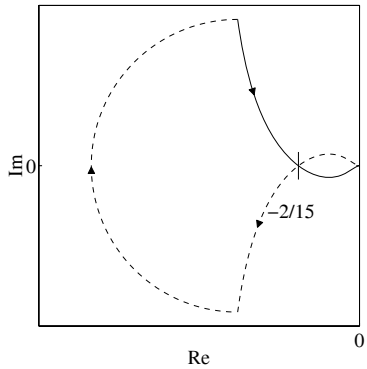
$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega - 1)(j\omega + 6)} = -\frac{(11+\omega^2)}{(1+\omega^2)(36+\omega^2)} + j\frac{(6-4\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(36+\omega^2)}$$

där sista likheten fås genom komplexkonjugering och uppdelning i en realdel och en imaginärdel. Eftersom gradtalet i täljaren är strikt mindre än i närmaren ger $s = Re^{j\theta}, 90° \leq \theta \leq -90°, R \gg 1$ att

$$G(Re^{j\theta}) \to 0$$

För $s = -j\omega$ fås spegelbilden av $G(j\omega)$ kring real-axeln. För $s = re^{j\theta}$ där $-90° \leq \theta \leq 90° \quad r \ll 1$ fås

$$G(re^{j\theta}) = -\frac{e^{-j\theta}}{6r}$$



För $K = 1$ är systemet instabilt ty $N = 1$.

Vi vill att skärningen med real-axeln skall vara till vänster om -1. Detta inträffar då

$$\frac{6 - 4\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(36+\omega^2)} = 0$$

dvs för $\omega^2 = 6/4 = 3/2$, vilket medför att

$$-\frac{K(11+3/2)}{(1+3/2)(36+3/2)} = -\frac{2K}{15} < -1$$

dvs $K_{\min} = 15/2$. Om $K < K_{\min}$ blir $N = 1$, om $K > K_{\min}$ kommer $N = -1$, dvs systemet är då stabilt.

Jämför nu med Routh-Hurwitz kriterium. Karakteristiska ekvationen $1 + L(s) = 0$ resulterar i

$$1 + K\frac{(s+1)}{s(s-1)(s+6)} = 0$$

eller

$$s^3 + 5s^2 + (-6+K)s + K = 0$$

Routh-Hurwitz tablå blir

s^3	1	$-6+K$
s^2	5	K
s^1	c_1	
s^0	d_1	

där

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{5(-6+K)-K}{5} = -6 + \frac{4K}{5} \\ d_1 &= \frac{c_1 K - 0 \cdot 5}{c_1} = K \end{aligned}$$

Systemet är alltså stabilt enligt Routh-Hurwitz om $K > 0$ och

$$c_1 = -6 + \frac{4K}{5} > 0$$

dvs

$$K > \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

6.13

Observationerna ger följande information

ω	$\lvert G(j\omega)\rvert$	φ
0.4	1.0	$-90°$
1.5	0.3	$-135°$
2.0	0.5	$-180°$

Överkorsningsfrekvensen bestämmer fasmarginalen

$$\begin{aligned}&\omega_c = 0.4\\&\varphi = -90° \;\rightarrow\; \varphi_m = 180° - 90° = 90°\end{aligned}$$

Beloppet vid fasen $-180\circ$ bestämmer amplitudmarginalen

$$\begin{aligned}&\omega_\pi = 2\\&|G(j\omega_\pi)| = 0.5 \;\rightarrow\; A_m = 2\end{aligned}$$

Nyquists förenklade kriterium visar att det återkopplade systemet är stabilt.

6.14

a) Approximativ kretsöverföring

$$\tilde{L}(s) = \frac{(0.3K)}{(0.3s+1)}\frac{(2-2s)}{(2+2s)}$$

K införs för att kunna bestämma amplitudmarginalen med Routh-Hurwitz. Karakteristisk ekvation

$$\begin{aligned}&0.3K(2-2s) + (0.3s+1)(2+2s) = 0\\&0.6s^2 + s(2.6-0.6K) + 0.6K + 2 = 0\end{aligned}$$

Rouths tablå

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 0.6 & 2+0.6K \\ s^1 & 2.6-0.6K & 0 \\ s^0 & c_1 & \end{array}$$

För stabilt system krävs

$$2.6 - 0.6K > 0 \quad \text{och} \quad 2 + 0.6K > 0$$

vilket innebär att $-3.3 < K < 4.3$ dvs det går att öka förstärkningen i det ursprungliga systemet 4.3 gånger innan det blir instabil. Amplitudmarginalen blir därför

$$A_m = 4.3$$

b) Utan approximationen innebär dödtiden att Nyquists kriterium måste användas

$$L(s) = \frac{0.3}{1+0.3s}e^{-2s}$$

Bodediagram eller numerisk räkning ger

$$\begin{aligned}\underline{/L(j\omega_\pi)} &= -\arctan(0.3\omega_\pi) - 2\omega_\pi \cdot \frac{180°}{\pi} = -180°\\&\Rightarrow \quad w_\pi = 1.38\\A_m &= \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{\sqrt{1+0.3^2\omega_\pi^2}}{0.3} = 3.61\end{aligned}$$

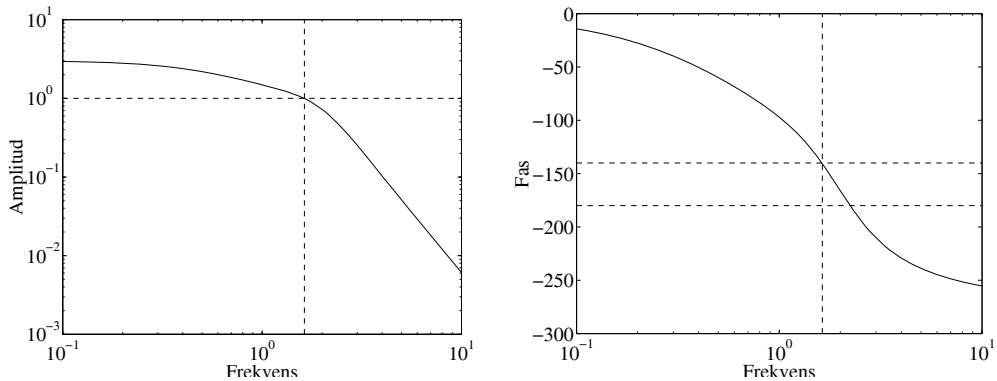
Kommentar: med Padé-approximationen får man för liberala marginaler.

6.15

Kretsöverföring

$$\begin{aligned} L(s) &= G_A(s)K_2(s)G_1(s)K_p = \frac{1}{s(1+0.5s)+2}\cdot 3\cdot\frac{1}{0.1+0.2s}\cdot 0.2 \\ &= \frac{3}{\left(1+\frac{s}{0.5}\right)\left(1+2\cdot 0.5\,\frac{s}{2}+\frac{s^2}{2^2}\right)} \end{aligned}$$

Det komplexkonjugerade polparet har $\omega_0 = 2$ och $\zeta = 0.5$



Avläsning i Bodediagram ger $\varphi_m = 40°$ och $\omega_c = 1.6$ rad/s. En grov uppskattning av stigtiden t_r fås med relationen $t_r\omega_c \approx 1$, jmf (6.43) på sid. 261 i läroboken, vilket ger

$$t_r \approx \frac{1}{\omega_c} = 0.6 \text{ s}$$

Den verkliga stigtiden är c:a 0.7 s.

6.16

Kretsöverföringen $L(s)$ blir

$$L(s) = \frac{K_i}{s}Ke^{-sT_d} \qquad \text{där } K = 200\,\text{kg/sek och } T_d = 10\,\text{sek}$$

dess belopp och fas

$$\begin{aligned} |L(j\omega)| &= K_i\frac{K}{\omega} \\ \underline{/L(j\omega)} &= -90° - \omega T_d\cdot\frac{180}{\pi} \end{aligned}$$

<u>Kravet $\varphi_m \geq 40°$</u>
Enligt definition är

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 180° + \underline{/L(j\omega_c)} \\ &= 180° - 90° - \omega_c T_d\cdot\frac{180°}{\pi} \;\geq\; 40° \quad\Rightarrow\quad \omega_c \leq \frac{50\pi}{180T_d} \end{aligned}$$

Eftersom ω_c ges av $|L(j\omega_c)| = 1$ fås

$$K_i\frac{K}{\omega_c} = 1 \qquad \text{dvs} \quad K_i = \frac{\omega_c}{K} \leq \frac{50\pi}{180T_dK}$$

vilket med insatta värden ger

$$K_i \leq \pi/7200 = 4.36 \cdot 10^{-4}$$

Kravet $A_m > 2.5$ ggr

Enligt definition är

$$\underline{/L(j\omega_\pi)} = -180^\circ\ , \quad A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

Första ekvationen implicerar att

$$-90^\circ - \omega_\pi T_d \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -180^\circ \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \frac{\pi}{2T_d}$$

dvs kravet $A_m \geq 2.5$ ger

$$A_m = \frac{1}{K_i \dfrac{K}{\omega_\pi}} = \frac{\pi}{2T_d K_i K} \geq 2.5 \quad \text{dvs} \quad K_i \leq \frac{\pi}{5T_d K}$$

vilket med insatta värden ger

$$K_i \leq \frac{\pi}{10000} = 3.14 \cdot 10^{-4}$$

Av de två kraven ställer $A_m \geq 2.5$ ggr strängare krav på K_i, dvs om $K < K_i^{max}$ där

$$K_i^{max} = 3.14 \cdot 10^{-4}$$

så uppfylls båda kraven.

6.17

a) Inför beteckningen

$$r(\omega) = |1 + L(j\omega)| \Rightarrow |S(j\omega)| = \frac{1}{r(\omega)}$$

$$\begin{aligned} |T(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{r(\omega_c)} = \frac{1}{r(w_c)} = |S(j\omega_c)| \\ &= \frac{1}{2 \cdot r(\omega_c)/2} = \frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)} \end{aligned}$$

b)

$$\max(\min r(\omega)) \Leftrightarrow \min(\max 1/r(\omega)) = \min(\max |S(j\omega)|)$$

c) $L(j\omega)$ innanför $B \ \Rightarrow \ r(\omega) < 1 \ \Rightarrow \ |S(j\omega)| > 1$

Dessutom kommer $L(j\omega)$ att passera cirkeln med en fas motsvarande $\varphi_m < 60^\circ$

$\max |S(j\omega)| \leq 1 \ \Rightarrow \ L(j\omega)$ ej hamnar innanför cirkeln $B \ \Rightarrow \ \varphi_m \geq 60^\circ$ och $A_m = \infty$

6.18

Eftersom tjockleken x mäts med en givare placerad d meter från fräshjulet och materialet rör sig med hastigheten $v = 1.25$ cm/sek, är tjockleken x fördröjd d/v sek.

Kretsöverföringen $L(s)$ blir därför

$$L(s) = \frac{0.1}{s(1 + 0.1s)} e^{-(d/1.25)s}$$

Stabilitet studeras med Nyqvist förenklade kriterium. Detta implicerar att systemet är stabilt om

$$|L(j\omega_\pi)| < 1 \quad \text{dvs} \quad \frac{0.1}{\omega_\pi \sqrt{1 + (0.1\omega_\pi)^2}} < 1$$

eller, om ω_π löses ut, $\omega_\pi > \sqrt{-50+\sqrt{50^2+1}}$. Eftersom, enligt definition, $\underline{/L(j\omega_\pi)} = -180^\circ$ fås

$$-\frac{d\omega_\pi}{1.25}\cdot\frac{180^\circ}{\pi} - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_\pi) = -180^\circ$$

För ett stabilt system, då $\omega_\pi > \sqrt{-50+\sqrt{50^2+1}}$, gäller att

$$-\frac{d\sqrt{-50+\sqrt{50^2+1}}}{1.25}\cdot\frac{180}{\pi} - 90^\circ - \arctan(0.1\sqrt{-50+\sqrt{50^2+1}}) \;>\; -180^\circ$$

dvs, d ska uppfylla

$$d < \left(90^\circ - \arctan(0.1\sqrt{-50+\sqrt{50^2+1}})\right)\cdot\frac{1.25\pi}{180^\circ\sqrt{-50+\sqrt{50^2+1}}} = 19.5$$

dvs för $d < 19.5$ cm är systemet stabilt.

7

Principer för dimensionering av regulatorer I: Prestanda

7.1

Utan reglering

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

För låga frekvenser ($s \to 0$), $G(s) \approx 1$. Reglering ska dämpa störningen 50 ggr. Vid reglering antas stor kretsförstärkning vid störningsfrekvensen, $K_p G(s) \gg 1$, dvs

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1 + K_p G(s)} \approx \frac{1}{K_p} < \frac{1}{50}$$

dvs $K_p > 50$

7.2

Då en process utsätts för laststörningar blir utsignalen vid återkopplad reglering (closed loop) $Y_{cl}(s) = S(s)Y_{ol}(s)$, där $Y_{ol}(s)$ är processens utsignal utan återkoppling (open loop) och $S(s)$ är det återkopplade systemets känslighetsfunktion.

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{s(s+1)}{s^2 + s + K}$$

En reduktion av lågfrekventa laststörningar $\omega \leq 0.5$ rad/s med en faktor 3 motsvarar därför ett krav på

$$|S(j\omega)| = \frac{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}} < \frac{1}{3}$$

för $\omega \leq 0.5$ rad/s. För låga frekvenser är $|S|$ en växande funktion med avseende på ω ($|S| \approx \omega/K$). Därför studeras olikheten vid $\omega = 0.5$ rad/s, d.v.s.

$$3\,\omega\sqrt{\omega^2 + 1} < \sqrt{(K - \omega^2)^2 + \omega^2}$$

$$9 \cdot 0.5^2(0.5^2 + 1) < K^2 - 2 \cdot 0.5^2 K + 0.5^4 + 0.5^2$$

$$K^2 - 0.5K - 8(0.5^4 + 0.5^2) > 0$$

$$K > 0.25 + \sqrt{0.25^2 + 2.5} = 1.85$$

Kravet på undertryckning av lågfrekventa laststörningar ger därför en undre gräns för $K > 1.85$.

Mätbrusets inverkan på utsignalen $|Y/W|$ ska reduceras i förhållande till inverkan på den uppmätta utsignalen ($|Y_m/W| = 1$)

$$\frac{Y}{W} = \frac{L}{1+L} = T$$

$$T = \frac{\dfrac{K}{s(s+1)}}{1+\dfrac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2+s+K}$$

För höga frekvenser ($\omega > 3$) gäller $|T| \approx |T|_{HF} = K/\omega^2$ (om brytfrekvensen $\sqrt{K} < 3$). Kravet på ett litet $|T|$ vid högre frekvenser ger en övre gräns för K

$$|T(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(K-\omega^2)^2+\omega^2}} < \frac{1}{4}$$

dvs

$$\begin{aligned}
4K &< \sqrt{(K-\omega^2)^2+\omega^2} \\
16K^2 &< K^2 - 2\cdot 3^2 K + 3^4 + 3^2 \\
K^2 + \frac{18}{15}K - \frac{90}{15} &< 0 \\
K &< -0.6 + \sqrt{0.6^2+6} = 1.92
\end{aligned}$$

De båda kraven ger ett intervall för värden på K

$$1.85 < K < 1.92$$

7.3

Kretsöverföringen $L(s) = F_{r1}\cdot G\cdot F_{r2}\ , \quad G = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

I.

$$\begin{aligned}
L &= \frac{7}{(s+1)^2} \\
S &= \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+7} = \frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+8} \\
T &= \frac{7}{(s+1)^2+7} = \frac{7}{s^2+2s+8} \\
GS &= \frac{1}{(s+1)^2+7} = \frac{1}{s^2+2s+8}
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
L &= 1.4\,\frac{s+1}{s}\cdot\frac{1}{(s+1)^2} = \frac{1.4}{s(s+1)} \\
S &= \frac{s(s+1)}{s(s+1)+1.4} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+1.4} \\
T &= \frac{1.4}{s(s+1)+1.4} = \frac{1.4}{s^2+s+1.4} \\
GS &= \frac{s}{(s+1)\big(s(s+1)+1.4\big)} = \frac{s}{(s+1)(s^2+s+1.4)}
\end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ T &= 0 \\ GS &= \frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Asymptoterna för frekvensfunktionerna

	$\lvert S\rvert_{LF}$	$\lvert S\rvert_{HF}$	$\lvert T\rvert_{LF}$	$\lvert T\rvert_{HF}$	$\lvert GS\rvert_{LF}$	$\lvert GS\rvert_{HF}$
I.	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{\omega^2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{\omega^2}$
II.	$\frac{\omega}{1.4}$	1	1	$\frac{1.4}{\omega^2}$	$\frac{\omega}{1.4}$	$\frac{1}{\omega^2}$
III.	1	1	0	0	1	$\frac{1}{\omega^2}$

Vid referenssignaländringar med återkoppling gäller

$$\left|\frac{E}{R}\right| = \left|\frac{1}{1+L}\right| = |S|$$

Vid referenssignaländringar och öppen styrning ($F_{r2} = 0$)

$$Y = F_{r1}G \cdot R$$

$$\frac{E}{R} = 1 - F_{r1}G = \frac{s^2+2s}{s^2+2s+1}$$

$$\left|\frac{E}{R}\right|_{LF} = 2\omega\,, \quad \left|\frac{E}{R}\right|_{HF} = 1$$

Vid processtörningar (V) och mätfel (W), $R = 0 \;\Rightarrow\; E = R - Y = -Y$

$$\left|\frac{E}{V}\right| = \left|\frac{Y}{V}\right| = \left|\frac{G}{1+L}\right| = |GS|$$

$$\left|\frac{E}{W}\right| = \left|\frac{Y}{W}\right| = \left|\frac{L}{1+L}\right| = |T|$$

Eftersom brytpunkterna för S, T och GS ligger väl separerade från $\omega = 0.05, 20$, så räcker det att titta på LF, HF-asymptoterna.

		I	II	III*)
a)	$v =$enhetssteg			
	$\lvert GS_{LF}(0)\rvert$	0.125	0	1
b)	$v = \sin(\omega t)$			
	$\lvert GS_{LF}(j0.05)\rvert$	0.125	0.0036	1
	$\lvert GS_{HF}(j20)\rvert$	0.0025	0.0025	0.0025
c)	$w = \sin(\omega t)$			
	$\lvert T_{LF}(j0.005)\rvert$	0.875	1	0
	$\lvert T_{HF}(j20)\rvert$	0.018	0.0035	0
d)	$r =$ enhetssteg			
	$\lvert S_{LF}(0)\rvert$	0.125	0	0
e)	$r = \sin(\omega t)$			
	$\lvert S_{LF}(j0.05)\rvert$	0.125	0.036	0.1
	$\lvert S_{HF}(j20)\rvert$	1	1	1
$*)$	Öppen styrning			

Lågfrekventa processtörningar och stegstörningar kompenseras via återkoppling, men ej vid öppen styrning. Den effektivaste kompenseringen erhålls vid PI-reglering då kvarstående fel undviks vid stegstörningar. Högfrekventa processtörningar påverkas inte alls av återkopplingen, men kompenseras väl av processen.

Högfrekventa mätstörningar kompenseras via återkoppling, medan lågfrekventa mätstörningar ej kompenseras av återkopplingsmekanismen.

Referenssignalsteg ger kvarstående fel vid P-reglering men ej vid PI-reglering och öppen styrning. Lågfrekventa referenssignalvariationer kompenseras mest effektivt vid PI-reglering, medan högfrekventa referenssignalvariationer ej följs av någon styrstrategi.

7.4

Enligt figur

$$L = \frac{K_p}{s(s+1)}\ , \qquad G = \frac{1}{s(s+1)}$$

a) Bodediagram, LF: $\dfrac{K_p}{s}$, brytfrekvens $\omega = 1$

$$\underline{/L(j\omega)} = -90^\circ - \arctan(\omega)$$

Bestäm överkorsningsfrekvens ω_c och ta fram fasmarginalen φ_m

$$\begin{aligned} |L(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p &= \omega_c\sqrt{\omega_c^2+1} \\ K_p^2 &= \omega_c^4 + \omega_c^2 \\ \omega_c^2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + K_p^2} \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(\omega_c)$$

Högre $K_p \rightarrow$ Högre $\omega_c \rightarrow$ Mindre φ_m

b)

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+L} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+K_p} & |S|_{LF} &= \frac{\omega}{K_p} & |S|_{HP} &= 1 \\
T &= \frac{L}{1+L} = \frac{K_p}{s^2+s+K_p} & |T|_{LF} &= 1 & |T|_{HF} &= \frac{K_p}{\omega^2} \\
GS &= \frac{G}{1+L} = \frac{1}{s^2+s+K_p} & |GS|_{LF} &= \frac{1}{K_p} & |GS|_{HF} &= \frac{1}{\omega^2} \\
FS &= \frac{F}{1+L} = \frac{K_p s(s+1)}{s^2+s+K_p} & |FS|_{LF} &= \omega & |FS|_{HF} &= K_p
\end{aligned}
$$

Följning av referenssignal: $E/R = 1/(1+L) = S$, stort K_p ger bra följning vid lägre frekvenser eftersom $|S|$ då blir liten.

Processtörningar: $Y/V = G/(1+L) = GS$, stort K_p ger bra kompensering, eftersom $|GS|$ då är liten.

Mätstörningar: $Y/W = L/(1+L) = T$, bra kompensering då $|T|$ är litet, dvs då K_p är litet.

Styrsignalens känslighet för mätstörningar: $U/W = F/(1+L) = FS$, höga nivåer för högt FS och därmed stort K_p.

c) Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + s + K_p \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 = 0$$

Identifiering av ζ och ω_n ger

$$
\begin{aligned}
\omega_n &= \sqrt{K_p} \\
\zeta &= \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{K_p}}
\end{aligned}
$$

Polerna ges av

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - K_p}$$

$$
\begin{aligned}
K_p = 0.25: &\quad s_{1,2} = -0.5 &&, \quad \zeta = 1 \\
K_p = 1: &\quad s_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm j\tfrac{\sqrt{3}}{2} &&, \quad \zeta = 0.5 \\
K_p = 4: &\quad s_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm j\tfrac{\sqrt{15}}{2} &&, \quad \zeta = 0.25
\end{aligned}
$$

Minskad dämpning ger mindre fasmarginal. Ökad överkorsningsfrekvens ger i allmänhet ökad snabbhet. En enkel approximation är att $t_r\omega_c \approx 1$, där t_r är stigtiden, jmf (6.43) på sid. 261 i läroboken.

7.5

a) Kretsöverföringen är

$$L = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)\frac{4}{s} = \frac{4(K_i + sK_p)}{s^2}$$

Polerna ges av den karakteristiska ekvationen

$$1 + L = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + 4K_p s + 4K_i \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Identifiering ger

$$\omega_n = 2\sqrt{K_i} \quad , \qquad \zeta = \frac{4K_p}{2\omega_n} = \frac{K_p}{\sqrt{K_i}} = 0.7$$

Sambandet mellan K_p och K_i

$$K_p^2 = 0.49K_i$$

Överkorsningsfrekvensen ω_c ges av

$$|L(j\omega_c)| = \left|\frac{4(K_i + j\omega_c K_p)}{-\omega_c^2}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\sqrt{K_i^2 + K_p^2\omega_c^2} = \omega_c^2$$

$$\begin{aligned} 16(K_i^2 + 0.49K_i\omega_c^2) &= \omega_c^4 \\ \omega_c^4 - 7.84K_i\omega_c^2 - 16K_i^2 &= 0 \\ \omega_c^2 &= (3.92 + 5.60)K_i \\ \omega_c &= 3.086\sqrt{K_i} \end{aligned}$$

Beräkna fasmarginalen

$$\begin{aligned} \underline{/L(j\omega_c)} &= \arctan\left(\frac{K_p\omega_c}{K_i}\right) - 180^\circ = \arctan\left(\frac{\sqrt{0.49K_i}\cdot 3.086\sqrt{K_i}}{K_i}\right) - 180^\circ \\ &= 65.2^\circ - 180^\circ \end{aligned}$$

dvs $\varphi_m = 65^\circ$

b) Referenssignal: $E/R = 1/(1+L) = S$
Processtörningarnas inverkan ges av: $Y/V = G/(1+L) = GS$
Mätstörningar: $Y/W = L/(1+L) = T$
Styrsignalens känslighet för mätstörning: $U/W = F/(1+L) = FS$

$$S = \frac{1}{1+L} = \frac{s^2}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \qquad |S|_{LF} = \frac{\omega^2}{4K_i}$$

d.v.s. stort K_i förbättrar följningen av lågfrekventa referenssignaländringar.

$$GS = \frac{G}{1+L} = \frac{4s}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \qquad |GS|_{LF} = \frac{\omega}{K_i}$$

d.v.s. stort K_i ger en effektivare kompensering av processtörningar.

$$T = \frac{L}{1+L} = \frac{4(K_i + K_p s)}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \qquad |T|_{HF} = \frac{4K_p}{\omega}$$

d.v.s. stort K_p ger sämre kompensering av mätstörningar.

$$FS = \frac{F}{1+L} = \frac{s(K_i + K_p s)}{s^2 + 4(K_i + K_p s)} \quad , \qquad |FS|_{HF} = K_p$$

d.v.s. stort K_p ökar känsligheten för mätstörningar hos styrsignalen.

c) Enligt a) gäller sambandet

$$\frac{1}{K_i} = \frac{\zeta^2}{K_p^2}$$

Detta samband samt resultaten i uppgift b) visar att det råder motstridiga krav när det gäller önskemålen att samtidigt uppnå t.ex. god kompensering av processtörningar (stort K_i), liten känslighet för mätstörningar (litet K_p) och väl dämpning (stort ζ, goda stabilitetsmarginaler). En förbättring av prestanda, d.v.s. en ökning av K_i, kräver antingen en minskning av ζ (sämre dämpning) eller en ökning av K_p (ökad känslighet för mätstörningar).

7.6

Kretsöverföringar och känslighetsfunktioner för de olika fallen

$$
\begin{aligned}
F_I: \quad L &= \frac{0.7}{s(s+1)} \\
S &= \frac{s(s+1)}{s(s+1)+0.7} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+0.7} \\
GS &= \frac{1}{s+1}S(s) = \frac{s}{s^2+s+0.7} \\
T &= \frac{0.7}{s(s+1)+0.7} = \frac{0.7}{s^2+s+0.7} \\
FS &= \frac{0.7(s+1)}{s^2+s+0.7}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{PI}: \quad L &= \frac{5(s+5)}{s(s+1)} \\
S &= \frac{s(s+1)}{s(s+1)+5(s+5)} = \frac{s(s+1)}{s^2+6s+25} \\
GS &= \frac{1}{s+1}S(s) = \frac{s}{s^2+6s+25} \\
T &= \frac{5(s+5)}{s^2+6s+25} \\
FS &= \frac{5(s+1)(s+5)}{s^2+6s+25}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{PI_f}: \quad L &= \frac{6}{s(s+3)} \\
S &= \frac{s(s+3)}{s(s+3)+6} = \frac{s(s+3)}{s^2+3s+6} \\
GS &= \frac{1}{s+1}S(s) = \frac{s(s+3)}{(s^2+3s+6)(s+1)} \\
T &= \frac{6}{s(s+3)+6} = \frac{6}{s^2+3s+6} \\
FS &= \frac{6(s+1)}{s(s+3)+6} = \frac{6(s+1)}{s^2+3s+6}
\end{aligned}
$$

Bandbredden fås ur Bodediagram eller analytiskt enligt

$$|T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}$$

	$\lvert S\rvert_{\omega\to 0} = \lvert GS\rvert_{\omega\to 0}$	$\lvert T\rvert_{\omega\to\infty}$	$\lvert FS\rvert_{\omega\to\infty}$	ω_b
F_I:	$\omega/0.7$	$0.7/\omega^2$	$0.7/\omega$	0.96
F_{PI}:	$\omega/25$	$5/\omega$	5	8.5
F_{PI_f}:	$\omega/2$	$6/\omega^2$	$6/\omega$	2.8

Ökad bandbredd ω_b ger bättre följning av lågfrekventa referenssignaler (mindre $|S|$ för små ω), effektivare kompensering av lågfrekventa processtörningar (mindre $|GS|$ för små ω), men sämre kompensering av högfrekventa mätstörningar (större $|T|$ för stora ω) och högre styrsignalaktivitet för högre frekvenser (större $|FS|$ för stora ω).

7.7

a) För återkopplat system

$$\frac{Y}{V} = \frac{\dfrac{K}{1+s}}{1+\dfrac{2K}{s(s+1)}} = \frac{sK}{s^2+s+2K} = G_{vy1}(s)$$

Utan återkoppling

$$\frac{Y}{V} = \frac{K}{1+s} = G_{vy2}(s)$$

b) Bättre kompensering med återkoppling om $|G_{vy1}(j\omega)| < |G_{vy2}(j\omega)|$, dvs

$$\frac{|j\omega|K}{|2K-\omega^2+j\omega|} < \frac{K}{|1+j\omega|} \;\Rightarrow\; |2K-\omega^2+j\omega| > |j\omega||1+j\omega|$$

Kvadrering ger

$$4K^2+\omega^4-4K\omega^2+\omega^2 > \omega^2(1+\omega^2)$$
$$4K^2 > 4K\omega^2, \quad \begin{cases} K=1 \;\Rightarrow\; \omega<1 \\ K=2 \;\Rightarrow\; \omega<\sqrt{2}\approx 1.4 \end{cases}$$

Avläsning med hjälp av asymptotiskt Bodediagram (vid handräkning): Det återkopplade system ges i Bodeform av

$$G_{vy1}(s) = \frac{0,5s}{1+\frac{1}{2K}s+\frac{1}{2K}s^2}$$

och har en brytfrekvens vid $\sqrt{2K}$.

Enligt de asymptotiska amplitudkurvorna för det öppna och det återkopplade systemet ger det återkopplade system bättre kompensering fram till återkopplade systemets brytfrekvens $\sqrt{2K}$. Lägg märke till att vi inte har tagit hänsyn till de verkliga amplitudkurvorna, som för det återkopplade systemet ju är beroende av dess dämpning.

$$S(s) = \frac{1}{1+\dfrac{2K}{s(s+1)}} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+2K}, \quad |S(j\omega)| = \frac{|j\omega||j\omega+1|}{|2K-\omega^2+j\omega|}$$

Om återkoppling är bättre gäller enligt ovan $|2K-\omega^2+j\omega| > |j\omega||j\omega+1|$, dvs $|S|<1$. Större K medför att återkoppling är fördelaktigt upp till högre frekvenser. I gengäld ökar $\max|S|$ (enligt Bodediagram eller Bodes integralsats) vilket försämrar kompenseringen av processtörningar för det reglerade systemet i motsvarande frekvensområde.

7.8

a) Öppet: $Y = G\cdot V$

Slutet: $Y = \dfrac{G}{1+F\cdot G}\cdot V$

Minskningen av störningens inverkan genom återkoppling ges av

$$\frac{(Y/V)_{\textit{slutet}}}{(Y/V)_{\textit{öppet}}} = \frac{1}{1+F\cdot G} = S$$

b) Slutna systemet ger bättre reglering än det öppna om $|S(j\omega| < 1$, $\forall\omega$. Detta kan formuleras som

$$|S(j\omega)| < 1\,,\ \forall\omega \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{|1+F(j\omega)G(j\omega)|} < 1\,,\ \forall\omega \quad\Leftrightarrow$$
$$|F(j\omega)G(j\omega)-(-1)| > 1\,,\ \forall\omega \quad\Leftrightarrow$$
$F(j\omega)G(j\omega) = L(j\omega)$ ligger utanför cirkeln med centrum i -1 och radien 1

7.9

Kvarstående fel vid ”störning”, $v(t) = v_0$

$$\frac{E}{V} = \frac{G}{1+L}\ , \quad \text{där} \quad L = FK \cdot \frac{1}{ms^2+bs}$$

a) $F = K_p$ (proportionell reglering)

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{ms^2+bs} \cdot \frac{1}{1+K_pk \cdot \dfrac{1}{ms^2+bs}} = \frac{1}{ms^2+bs+K_pK}$$

Använd slutvärdessatsen då $V(s) = v_0/s$, kvarstående felet blir

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{v_0}{ms^2+bs+K_pK} = \frac{v_0}{K_pK}$$

b) $F = K_p + \dfrac{K_i}{s}$ (integralverkan)

$$\frac{E}{V} = \frac{1}{ms^2+bs} \cdot \frac{1}{1+K\,\dfrac{K_ps+K_i}{s} \cdot \dfrac{1}{ms^2+bs}} = \frac{s}{s(ms^2+bs)+K(K_ps+K_i)}$$

Slutvärdessatsen med $V(s) = v_0/s$ ger det kvarstående felet

$$e_s = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{sv_0}{0+KK_i} = 0$$

7.10

Felet ges av överföringsfunktionen

$$\frac{E}{\theta_r} = \frac{1}{1+L} = S$$

där kretsöverföringen

$$L = \frac{0.4 \cdot 3 \cdot 2}{(1+0.5s)s(s+1)}$$

Känslighetsfunktionen

$$S = \frac{s(s+1)(1+0.5s)}{s(s+1)(1+0.5s)+2.4}$$

Målet är att följa börvärdet $\theta_r = \dfrac{30}{s^2}$. Det kvarstående felet blir

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{30S(s)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{30(s+1)(1+0.5s)}{s(s+1)(1+0.5s)+2.4} = \frac{30}{2.4} = 12.5\ [\,^\circ\,] \end{aligned}$$

7.11

a) 1. Vid kompensering med serielänk

$$\begin{aligned} \frac{Y}{R} &= \frac{F_{PD}G}{1+F_{PD}G} = \frac{2.5(1+s)}{s^2(1+s/6)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2.5(1+s)}{s^2(1+s/6)}} \\ &= \frac{2.5(1+s)}{s^2(1+s/6)+2.5(1+s)} = \frac{15(1+s)}{s^3+6s^2+15s+15} \end{aligned}$$

2. I fallet med parallellänk

$$\frac{Y}{R} = \frac{G}{1+F_{PD}G} = \frac{2.5}{s^2} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2.5(1+s)}{s^2(1+s/6)}}$$

$$= \frac{2.5(1+s/6)}{s^2(1+s/6)+2.5(1+s)} = \frac{15(1+s/6)}{s^3+6s^2+15s+15}$$

I första fallet ger nollstället nära origo, $s=-1$, en översläng.

b) Referenssignalen $R = \dfrac{1}{s^2}$

För fall 1:

$$E = R - Y = \frac{1}{s^2} - \frac{15(1+s)}{s^3+6s^2+15s+15} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s^3+6s^2}{s(s^3+6s^2+15s+15)}$$

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+6s}{s^3+6s^2+15s+15} = 0$$

Fall 2:

$$E = R - Y = \frac{1}{s^2} - \frac{2.5(s+6)}{s^3+6s^2+15s+15} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s^3+6s^2+12.5s}{s(s^3+6s^2+15s+15)}$$

$$e_s = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+6s+12.5}{s^3+6s^2+15s+15} = \frac{12.5}{15} = \frac{5}{6}$$

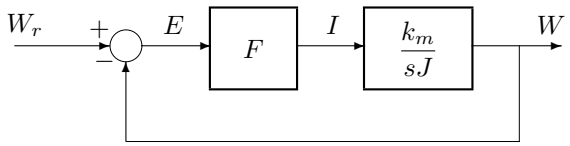
Slutsats: Vid stegsvaret fås i första fallet både en stor styrsignal och en påtaglig översväng, vilket undviks då kompenseringslänken placeras i återkopplingen. I gengäld får man i det andra fallet kvarstående fel vid börvärdesramper.

7.12

Laplacetransformering av ekvationen för roboten ger

$$J \cdot sW = k_m I \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{I} = \frac{k_m}{sJ}$$

Inför en regulator F



a) Felet ges av överföringsfunktionen E/W_r där $F=K$ är en proportionell regulator

$$\frac{E}{W_r} = \frac{1}{1+K\dfrac{k_m}{Js}}$$

För $W_r = 1/s^2$ fås det stationära felet med slutvärdessatsen

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+K\dfrac{k_m}{J}} = \frac{J}{Kk_m} < 0.05$$

dvs

$$K > \frac{J}{0.05\,k_m} = 0.08$$

b) Inför integralverkan, $F = K_p + K_i/s$. Behåll högfrekvensförstärkningen från a) $|F|_{HF} = K$, dvs låt $K_p = K = 0.08$. Det slutna systemets karakteristiska ekvation

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{k_m}{sJ} = 0$$
$$Js^2 + K_p k_m s + K_i k_m = 0$$
$$s^2 + \frac{K_p k_m}{J} s + \frac{K_i k_m}{J} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Identifiering ger

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_i k_m}{J}} = \frac{K_p k_m}{2\zeta J} \;\Rightarrow\; K_i = \frac{K_p^2 k_m}{4\zeta^2 J} = 0.816$$

7.13

Systemet utsätts för störningar v kring frekvensen ω_0, dvs

$$V(s) = \frac{B(s)}{s^2 + \omega_0^2} \qquad \left(\text{Om } v(t) = \sin\omega_0 t \text{ är } V(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\right)$$

Enligt interna modellprincipen införs nämnarpolynomet $s^2 + \omega_0^2$ i kretsöverföringen. Eftersom störningen ligger innan processen måste man även kompensera för processens inverkan på störningen, dvs inför $\dfrac{s+2}{s^2+\omega_0^2}$ i kretsöverföringen

$$L(s) = K(s+1) \cdot \frac{s+2}{s^2+\omega_0^2} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{K(s+1)}{s^2+\omega_0^2}$$

Karakteristisk ekvation

$$1 + L(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 + \omega_0^2 + Ks + K = 0$$

En dubbelpol: $(s+a)^2 \equiv s^2 + Ks + \omega_0^2 + K$, $a > 0$

Beräkna a och K

$$\begin{cases} 2a = K \\ a^2 = \omega_0^2 + K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a - \omega_0^2 = 0$$

dvs

$$\begin{aligned} a &= 1 + \sqrt{1+\omega_0^2} = 2.02 \qquad (\omega_0 = 0.2) \\ K &= 2a = 4.04 \end{aligned}$$

Sökta överföringsfunktioner blir

$$G_{ry} = \frac{K(s+1)}{s^2+\omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{K(s+1)}{s^2+\omega_0^2}} = \frac{K(s+1)}{s^2 + Ks + K + \omega_0^2} = \frac{4.04(s+1)}{(s+2.02)^2} \qquad (\textit{dubbelpol enligt ovan})$$

$$G_{vy} = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{K(s+1)}{s^2+\omega_0^2}} = \frac{s^2+\omega_0^2}{(s+2)(s^2+Ks+K\omega_0^2)} = \frac{s^2+0.2^2}{(s+2)(s+2.02)^2}$$
$$\approx \frac{s^2+0.2^2}{(s+2)^3}$$

$$G_{ru} = \frac{K(s+2)(s+1)}{s^2+\omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{K(s+1)}{s^2+\omega_0^2}} = \frac{K(s+1)(s+2)}{s^2+Ks+K+\omega_0^2} = \frac{4.04(s+1)(s+2)}{(s+2.02)^2}$$
$$\approx \frac{4.04(s+1)}{(s+2)}$$

7.14

För det återkopplade systemet gäller

$$
\begin{aligned}
L &= F(s)G(s) = F(s)\frac{K}{s}\overline{G}(s) \\
S &= \frac{1}{1+L} = \frac{s}{s+F(s)K\overline{G}(s)} \\
T &= \frac{L}{1+L} = \frac{F(s)K\overline{G}(s)}{s+F(s)K\overline{G}(s)} \\
FS &= \frac{F}{1+L} = \frac{sF(s)}{s+F(s)K\overline{G}(s)} \\
GS &= \frac{G}{1+L} = \frac{K\overline{G}(s)}{s+F(s)K\overline{G}(s)}
\end{aligned}
$$

Högfrekvensasymptoterna är lika i a) och b)
Asymptoterna för regulatorerna vid låga frekvenser är givna som, a) $F(s) \to k_p$, b) $F(s) \to k_i/s$. För processen gäller att $|G|_{LF} = K\overline{G}(0)/s = K/s$. Asymptoterna för amplitudfunktionerna

	$\omega \to 0$, a)	$\omega \to 0$, b)	$\omega \to \infty$
$\lvert L\rvert$	$\frac{k_pK}{\omega}$	$\frac{k_iK}{\omega^2}$	$k_\infty\lvert G(j\omega)\rvert$
$\lvert S\rvert$	$\frac{\omega}{k_pK}$	$\frac{\omega^2}{k_iK}$	1
$\lvert T\rvert$	1	1	$k_\infty\lvert G(j\omega)\rvert$
$\lvert FS\rvert$	$\frac{\omega}{K}$	$\frac{\omega}{K}$	k_∞
$\lvert GS\rvert$	$\frac{1}{k_p}$	$\frac{\omega}{k_i}$	$\lvert G(j\omega)\rvert$

Kvarstående fel då $V(s) = \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}$. $E(s) = -GS \cdot V(s)$, använd slutvärdessatsen

a) Steg: $e_s = \lim_{s\to 0} -sGS \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{k_p}$

Ramp: $e_s = \lim_{s\to 0} -sGS \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} -\frac{1}{sk_p} \to \infty$

b) Steg: $e_s = \lim_{s\to 0} -sGS \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} -\frac{s}{k_i} = 0$

Ramp: $e_s = \lim_{s\to 0} -sGS \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{1}{k_i}$

8

Dimensionering av PID-regulatorer

8.1

Då $F(s)$ har ren I-verkan

$$L(s) = \frac{K_i}{s}\frac{1}{s(2+s)}, \quad \underline{/L(j\omega)} < -180^\circ$$

dvs, går ej att få stabilt system: A, E går inte.

Kvarstående fel vid störning

$$\frac{E(s)}{V(s)} = -\frac{G(s)}{1+F(s)G(s)}$$

Proportionell reglering, $F = K_p$

$$\frac{E(s)}{V(s)} = -\frac{1}{s(2+s)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{K_p}{s(2+s)}} = -\frac{1}{s^2+2s+K_p}$$

Slutvärdessatsen, $v(t) = 2t$

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{E(s)}{V(s)} \cdot \frac{2}{s^2} = \lim_{s\to 0}\big(-\frac{2}{s}\big) \cdot \frac{1}{K_p} \to \infty$$

dvs, B, C går inte. Välj D!

Kvarstående fel för fall D

$$\begin{aligned}
\frac{E(s)}{V(s)} &= -\frac{1}{s(2+s)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{20}{s}\cdot\dfrac{5s+1}{s(2+s)}} = -\frac{s}{s^3+2s^2+20(5s+1)} \\
e_s &= \lim_{s\to 0} s\,\frac{E(s)}{V(s)} \cdot \frac{2}{s^2} = \lim_{s\to 0}\big(-\frac{2}{s}\big) \cdot \frac{s}{20} = -0.1
\end{aligned}$$

Stabilitet

$$L(s) = \frac{20(5s+1)}{s} \cdot \frac{1}{s(s+2)} = \frac{20}{s^2}\,\frac{(5s+1)}{(s+2)}$$

Ta fram ω_c ur Bode-diagram
Alternativ: Titta på högfrekvensasymptoten

$$L_{HF}(s) = \frac{100}{s^2}, \quad |L_{HF}(j\omega)| = \frac{100}{\omega^2} = 1 \quad \text{för} \quad \omega = 10$$

Brytfrekvenserna 0.2 och 2 är mycket mindre än 10 dvs. $\omega_c \approx 10$

$$\angle L(j\omega_c) = \angle L(j10) - 80^\circ + \arctan(5 \cdot 10) - \arctan(0.5 \cdot 10) = -170^\circ$$

Stabilt med $\varphi_m = 10^\circ$

8.2

Ta fram ω_{G150} för $G(s) = \dfrac{5}{(1+10s)^3}$

$$\angle G(j\omega_{G150}) = -3\arctan(10\omega_{G150}) = -150^\circ$$

$$\arctan(10\omega_{G150}) = 50^\circ \;\Rightarrow\; \omega_{G150} = 0.119$$

dvs, välj $\omega_c = 0.0476$. Processens amplitud och fas vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c

$$|G(j\omega_c)| = \frac{5}{(1+100\omega_c^2)^{3/2}} = 3.68$$
$$\angle G(j\omega_c) = -3\arctan 10\omega_c = -76.4^\circ$$

Dessa data erhålls också enkelt med hjälp av ett Bodediagram för $G(s)$. Betrakta PI-regulatorn

$$F(s) = \frac{K_i}{s}(1+T_i s)$$

Vid frekvensen ω_c önskas följande fas och amplitud på kretsöverföringen

$$\begin{aligned} \angle L(j\omega_c) &= -180^\circ + \varphi_m = -130^\circ \\ |L(j\omega_c)| &= 1 \end{aligned}$$

Regulatorns fas och amplitud vid ω_c

$$\begin{cases} \angle F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan T_i\omega_c \\ \angle F(j\omega_c) = \angle L(j\omega_c) - \angle G(j\omega_c) = -130^\circ + 76.4^\circ = -53.6^\circ \end{cases}$$

$$T_i\omega_c = \tan 36.4^\circ \quad \Rightarrow \quad T_i = 15.5$$

$$\begin{cases} |F(j\omega_c)| = \dfrac{K_i}{\omega_c}\sqrt{1+(T_i\omega_c)^2} = \dfrac{K_i}{\omega_c}\sqrt{1+\tan^2 36.4^\circ} \\ |F(j\omega_c)| = \dfrac{1}{|G(j\omega_c)|} = \dfrac{1}{3.68} \end{cases}$$

Dessa samband ger integralförstärkningen $K_i = 0.0104$ och högfrekvensförstärkningen $K_\infty = K_i T_i = 0.161$. Alternativt bestäms T_i och K_i via fig. 8.6.

8.3

Identifiering utifrån stegsvaret ger $T_d = 2,\ T = 2,\ K = 3$

$$G(s) = \frac{Ke^{-T_d s}}{1+Ts} = \frac{3e^{-2s}}{1+2s}$$

a) Bestäm ω_{G150}

$$\angle G(j\omega_{G150}) = -2\omega_{G150} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} - \arctan 2\omega_{G150} = -150^\circ$$

Numerisk lösning (alt ritande av Bodediagram) ger $\omega_{G150} = 0.802$, dvs välj $\omega_c = 0.321$. Vid den önskade överkorsningsfrekvensen ω_c , gäller för processen

$$\begin{aligned} |G(j\omega_c)| &= \frac{3}{\sqrt{1+4\omega_c^2}} = 2.52 \\ \angle G(j\omega_c) &= -\arctan 2\omega_c - 2\omega_c \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -69.5^\circ \end{aligned}$$

Designa PI-regulator

$$F(s) = \frac{K_i}{s}(1+T_i s)$$

Önskad fasmarginal $\varphi_m = 50^\circ$ innebär att fasen på regulatorn vid ω_c ska vara

$$\begin{cases} \angle F(j\omega_c) = \angle L(j\omega_c) - \angle G(j\omega_c) = -130^\circ + 69.5^\circ = -60.5^\circ \\ \angle F(j\omega_c) = -90^\circ + \arctan T_i\omega_c = -60.5^\circ \end{cases}$$

$$\tan 29.5^\circ = T_i\omega_c \quad \Rightarrow \quad T_i = 1.76$$

Kretsens amplitud ska vara 1 vid ω_c

$$|F(j\omega_c)| = \frac{K_i}{\omega_c}\sqrt{1+T_i^2\omega_c^2} = \frac{K_i}{\omega_c}\sqrt{1+\tan^2 29.5^\circ} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{1}{2.52}$$

$$\Rightarrow K_i = 0.111$$

<u>Alternativ</u>: PI-design genom kurvavläsning i diagrammen i fig. 8.6

Diagram 1) $\angle F(j\omega_c) = -60.5^\circ \Rightarrow T_i\omega_c = 0.57 \quad \Rightarrow \quad T_i = 1.8$

Diagram 2) $\angle F(j\omega_c) = -60.5^\circ \Rightarrow \dfrac{K_i\,|G(j\omega_c)|}{\omega_c} = 0.87 \quad \Rightarrow \quad K_i = 0.11$

b) Variera ω_c, ta fram $\max K_i$. Arbetsgång: för givet ω_c, räkna ut $|G(j\omega_c)|$ och $\angle G(j\omega_c)$. Fasmarginalen ger det önskade $\angle F(j\omega_c)$, vilket bestämmer K_i. Vid handräkning ger diagrammen i fig. 8.6 följande resultat

ω_c	$\lvert G\rvert$	φ_G	φ_F	K_i
0.3	2.57	-65.3	-64.7	0.105
0.4	2.34	-84.5	-45.5	0.122
0.5	2.12	-102.3	-27.7	0.110

Det optimala värdet på ω_c erhålls genom att skriva en MATLAB-rutin som bestämmer parametrarna i tabellen för önskat ω_c. En sökning för olika ω_c ger snabbt det optimala värdet $\omega_c = 0.41$, för vilket $K_i = 0.122$ och $T_i = 2.56$.

Observera att vi i denna optimering inte kontrollerar M_S. För de tre överkorsningsfrekvenserna $\omega_c = 0.3$, 0.4 och 0.5 blir $M_S = 1.8$, 2.2 och 2.9. Rekommenderad övre gräns är $M_S \leq 1.7$, vilket visar att ovan genomförda optimering bör kompletteras med en övre gräns för M_S, se nästa deluppgift.

c) En sökning med `pi_opt` med $\varphi_{m\,min} = 45^\circ$, $\varphi_{m\,max} = 60^\circ$, $\omega_{c\,min} = 0.3\omega_{G150} = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$ och $\omega_{c\,max} = 0.5\omega_{G150} = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$, se (8.17) på sid. 319 i boken, ger

$$\omega_{c\,opt} = 0.274 \qquad \varphi_{m\,opt} = 55.0^\circ \qquad M_S = 1.696 \qquad M_T = 1.08 \qquad K_i = 0.0942$$

En andra sökning kring denna (ω_c, φ_m)-punkt med $\varphi_{m\,min} = 53°$, $\varphi_{m\,max} = 57°$, $\omega_{c\,min} = 0.25$ och $\omega_{c\,max} = 0.29$ ger

$$\omega_{c\,opt} = 0.275 \qquad \varphi_{m\,opt} = 55.2° \qquad M_S = 1.699 \qquad M_T = 1.08 \qquad K_i = 0.0945$$

Med hänsyn taget till begränsningen på M_S blir slutsatsen att det första förslaget på $\omega_c = 0.4\omega_{G150} = 0.32$ och $\varphi_m = 50°$, deluppgift a), med resultatet $K_i = 0.11$ och $M_S = 1.88$ ger en hyfsad lösning. Optimeringen med avseende på ω_c och konstant φ_m utan hänsyn till M_S, deluppgift b), ger däremot ett sämre resultat, eftersom M_S blir alltför stort. Jämför gärna stegsvaren för de olika lösningarna från laststörning och referens till utsignal.

8.4

a) För överföringsfunktionen $G(s) = 5/(1+10s)^3$ gäller att $G(0) = 5$. Eftersom

$$\angle G(j\omega_{G180}) = -3\arctan(10\omega_{G180}) = -180°$$

gäller att

$$10\omega_{G180} = \tan 60° = 1.73 \;\Rightarrow\; \omega_{G180} = 0.173$$

och $|G(j\omega_{G180})| = 5/(1+100\omega_{G180}^2)^{3/2} = 0.627$ (dessa data bestäms alternativt via Bodediagram). Kappatalet blir därför

$$\kappa_{180} = \frac{|G(j\omega_{G180})|}{G(0)} = \frac{0.627}{5} = 0.125$$

Enligt tabell 8.1 på sid. 346 bestäms då PI-regulatorns parametrar till ($\tau = T_i$ för PI-reg.)

$$K_i = \omega_{G180}(0.33 - 0.15\kappa_{180})/G(0) = 0.173(0.33 - 0.15 \cdot 0.125)/5 = 0.0108$$
$$T_i = \frac{1}{\omega_{G180}(0.18 + \kappa_{180})} = \frac{1}{0.173(0.18 + 0.125)} = 18.9$$

b) Under förutsättning att processen har en negativ fasvridning på minst $-180°$ erhålls självsvängning vid ren P-reglering då förstärkningen K_p höjs så att det återkopplade systemet blir marginell stabilt. Detta innebär att kretsförstärkningen $K_pG(j\omega_{G180}) = -1$, vilket i sin tur tillsammans med den erhållna periodtiden för självsvängningen T_0 bestämmer

$$|G(j\omega_{G180})| = \frac{1}{K_p} \qquad \omega_{G180} = \frac{2\pi}{T_0}$$

En begränsad självsvängning kan alternativt genereras med ett relä, se figurerna 8.20 och 8.21 på sid. 351-352. Processens statiska förstärkning $G(0)$ bestäms med hjälp av ett stegsvar, där

$$G(0) = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Här är Δu insignaländringen från en konstant nivå u_0 till en annan nivå $u_0 + \Delta u$, och Δy den resulterande konstanta utsignaländringen efter att transienten har klingat av. Tillsammans ger detta $\kappa_{180} = |G(j\omega_{G180})|/G(0)$.

8.5

För $G(s) = 5/(1+10s)^3$ gäller enligt uppgift 8.2 att $\omega_{G150} = 0.12$. En sökning med `pi_opt` med $\varphi_{m\,min} = 45°$, $\varphi_{m\,max} = 60°$, $\omega_{c\,min} = 0.3\omega_{G150} = 0.3 \cdot 0.12 = 0.036$ och $\omega_{c\,max} = 0.5\omega_{G150} = 0.5 \cdot 0.12 = 0.06$, se (8.17) på sid. 319, ger

$$\omega_{c\,opt} = 0.0486 \qquad \varphi_{m\,opt} = 51.7° \qquad M_S = 1.694 \qquad M_T = 1.16 \qquad K_i = 0.0103$$

En andra sökning kring denna (ω_c, φ_m)-punkt med $\varphi_{m\,min} = 50°$, $\varphi_{m\,max} = 53°$, $\omega_{c\,min} = 0.047$ och $\omega_{c\,max} = 0.05$ ger

$$\omega_{c\,opt} = 0.0500 \qquad \varphi_{m\,opt} = 52.0° \qquad M_S = 1.699 \qquad M_T = 1.15 \qquad K_i = 0.0104$$

Eftersom den bästa lösningen nu inträffade vid $\omega_{c\,max} = \omega_{c\,opt} = 0.050$ förflyttas ω_c-intervallet något högre upp till $\omega_{c\,min} = 0.049$ och $\omega_{c\,max} = 0.055$, vilket ger

$$\omega_{c\,opt} = 0.0512 \qquad \varphi_{m\,opt} = 52.7^\circ \qquad M_S = 1.700 \qquad M_T = 1.14 \qquad K_i = 0.0104$$

Den optimala PI-regulatorn ger därför $J_v = 1/K_i = 95.7$ och $M_S = 1.70$, vilket kan jämföras med tumregeln $\omega_c = 0.4\omega_{G150}$, $\varphi_m = 50^\circ$ som enligt övning 8.2 gav samma J_v och ett obetydligt högre $M_S = 1.71$. Tabell 8.1 på sid. 346 gav enligt övning 8.4 $J_v = 1/K_i = 1/0.0108 = 92.6$ och $M_S = 1.73$, d.v.s. något bättre prestanda (mindre J_v) men samtidigt lite sämre (högre) M_S.

De förenklade ansatserna för dimensionering av PI-regulatorer i övning 8.2 och 8.4 gav för denna processmodell extremt goda resultat (nära den optimala lösningen). Detta är ingen slump, samtidigt som större avvikelser också förekommer, inte minst för processer med besvärligare dynamik som exempelvis lång dödtid (högre kappa-tal).

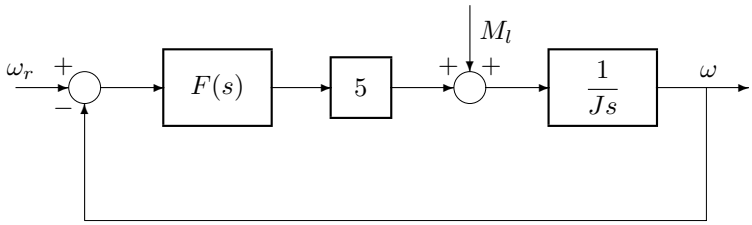
8.6

Laplace-transformering ger

$$J \cdot sW(s) = k_m \cdot I(s) - M_l(s)$$

Inför regulatorn $F(s)$ som styr motorströmmen genom återkoppling av vinkelhastigheten

$$I(s) = F(s)\left(W_{\text{ref}}(s) - W(s)\right)$$



i) Inget stationärt fel vid konstant lastmoment M_l kräver I-verkan

$$F_{PI}(s) = \frac{K_i}{s}\,(1 + sT_i)$$

ii) Kvarstående fel vid rampstörning

$$\frac{W(s)}{M_l(s)} = \frac{1}{100s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5K_i}{s}(1 + sT_i) \cdot \frac{1}{100s}}$$

Slutvärdessatsen då $M_l(t) = 10 \cdot t$ ger

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \omega(t) &= \lim_{s\to 0} s\,\frac{W(s)}{M_l(s)} \cdot \frac{10}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{100s + \frac{5K_i}{s}} \\ &= \frac{2}{K_i} \le 0.5\end{aligned}$$

dvs statiska förstärkningen $K_i \ge 4$

iii) Det slutna systemet ges av

$$\begin{aligned}\frac{W(s)}{W_{\text{ref}}(s)} &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{5K_i(1 + sT_i)}{100s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5K_i(1 + sT_i)}{100s^2}} \\ &= \frac{5K_i(1 + sT_i)}{100s^2 + 5K_iT_is + 5K_i} = \frac{1 + sT_i}{1 + T_is + \frac{100}{5K_i} \cdot s^2}\end{aligned}$$

Identifiera nämnarkoefficienterna i 2:a gradsuttrycket: $1 + 2\zeta T_n s + T_n^2 s^2$

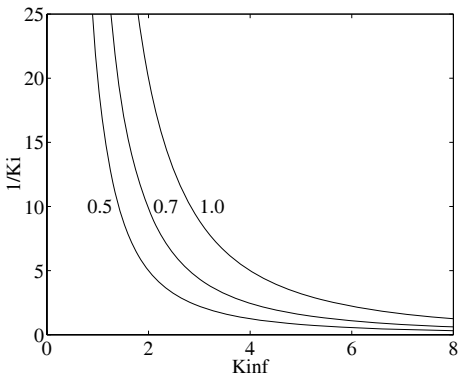
$$\zeta = \frac{T_i}{2\sqrt{\dfrac{100}{5K_i}}} = \frac{T_i\sqrt{K_i}}{4\sqrt{5}} \approx 0.112\, T_i\sqrt{K_i}$$

a) En regulator som uppfyller i) – iii):

Låt $K_i = 4, \quad \zeta = 0.7 \Rightarrow T_i = 3.13$

b)

$$\begin{aligned} K_\infty &= K_i T_i = K_i \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{K_i}}\,\zeta = 4\sqrt{5}\,\zeta\sqrt{K_i} \\ K_\infty^2 &= 80\zeta^2 \cdot K_i \end{aligned}$$



c) Bra kompensering av laststörning vid lågt $\frac{1}{K_i}$ ger högt K_∞, dvs höga styrsignaler och större kärslighet för mätstörningar. Både $\frac{1}{K_i}$ och K_∞ kan minskas om ζ väljs mindre; ett lägre ζ motsvarar lägre stabilitetsmarginaler.

8.7

Dimensionera en PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b} \quad , \qquad G(s) = \frac{0.5}{s(1+2s)^2}$$

Önskad överkorsningsfrekvens given: $\omega_c = 0.4$. Vid ω_c gäller för processen

$$\begin{aligned} |G(j\omega_c)| &= \frac{0.5}{0.4(1 + 4 \cdot 0.4^2)} = 0.762 \\ \angle G(j\omega_c) &= -90^\circ - 2\arctan(2 \cdot 0.4) = -167.3^\circ \end{aligned}$$

a) $\varphi_m = 45^\circ$, kräver ett faslyft $\angle F_{PD} = 32.3^\circ$ vid ω_c. Maximalt faslyft vid önskat ω_c ger då enligt fig. 8.12 på sid. 327: $b = 3.3$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\,\sqrt{b}} = 0.72\ , \quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 4.5$$

$$\begin{cases} \text{Lågfrekvensförstärkning :} & K_p = 0.72 \\ \text{Högfrekvensförstärkning :} & K_\infty = bK_p = 2.4 \end{cases}$$

b) $\varphi_m = 60°$, kräver ett faslyft $\angle F_{PD} = 47.3°$ vid ω_c. Enligt fig. 8.12 på sid. 327: $b = 6.6$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}} = 0.51\ , \quad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 6.4$$

$$\begin{cases} K_p = 0.51 \\ K_\infty = bK_p = 3.4 \end{cases}$$

Ökad stabilitetsmarginal ger högre K_∞, d.v.s. högre styrsignaler med ökad känslighet för mätstörningar, och lågt K_p, d.v.s. sämre kompensering av processstörningar.

8.8

Vid ω_c fås önskad fasmarginal. ω_c är också ett mått på systemets snabbhet. Använd en reglerstrategi (kompenseringslänk) som förskjuter ω_c med en faktor 5 med bibehållen faskaraktär. Regulatorn

$$F(s) = K_p \frac{1+5s}{1+s}$$

kancellerar den långsamma polen och inför en snabbare, dvs förskjuter faskurvan med en faktor 5.

$$L(s) = K_p \frac{1+5s}{1+s} \cdot \frac{1}{s(1+5s)} = \frac{K_p}{s(1+s)}$$

Om det ursprungliga $\omega_c = \omega_{co}$, så har vi i första fallet utan kompensering

$$|\,0.5\,G(j\omega_{co})| = \left|\frac{0.5}{j\omega_{co}(1+5j\omega_{co})}\right| = 1 \;\Rightarrow\; |\,j\omega_{co}(1+5j\omega_{co})| = 0.5 \tag{1}$$

Efter kompensering är $\omega_c = 5\omega_{co}$, dvs för kretsöverföringen med kompenseringslänk gäller

$$|L(j5\omega_{co})| = \left|\frac{K_p}{5j\omega_{co}(1+5j\omega_{co})}\right| = 1 \;\Rightarrow\; K_p = 5\,|\,j\omega_{co}(1+5j\omega_{co})|$$

(1) $\Rightarrow \quad K_p = 5 \cdot 0.5 = 2.5$.

Alternativ lösning: Rita Bodediagram för $L(s) = 0.5/(s(1+5s))$ (P-reglering) och bestäm $\omega_c = 0.29$. Rita Bodediagram för $1/(s(1+s)$ och bestäm K_p så att $L(s) = K_p/(s(1+s))$ får $\omega_c = 5 \cdot 0.29 = 1.43$. Detta erhålls då $K_p = 2.5$. Kontrollera att fasmarginalen är identisk i de båda fallen ($\varphi_m = 35°$).

	Efter kompensering	Innan kompensering
Lågfrekvensförstärkning:	$K_p = 2.5$	$K = 0.5$
Högfrekvensförstärkning:	$K_\infty = 5 \cdot K_p = 12.5$	$K = 0.5$

8.9

a) Eftersom $\dfrac{1}{Js^2}$ har fasen $-180°$ ger varken P- eller PI-reglering tillräcklig fasmarginal.
Använd PD för att lyfta fasen.

b) $\omega_c = 5, \quad \varphi_m = 60°$

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1+\tau_d s}{1+\tau_d s/b}$$

Vid önskat ω_c gäller för processen $G(s) = \dfrac{2}{Js^2} = \dfrac{8}{s^2}$

$$\angle G(j\omega_c) = -180°$$

$$\angle F_{PD}(j\omega_c) = -180° + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180° + 60° - -180° = 60°$$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{8}{\omega_c^2} = 0.32$$

Maximalt faslyft vid önskat ω_c ger då enligt fig. 8.12 på sid. 327

$$\angle F_{PD}(j\omega_c) = \varphi_{max} = 60^\circ \;\Rightarrow\; b = 14$$
$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}} = 0.84$$
$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 0.75$$

dvs

$$F_{PD}(s) = 0.84\frac{(1+0.75s)}{(1+0.053s)}$$

8.10

$$G(s) = \frac{0.4}{s(1+5s)} \qquad \text{Tidsenhet [ms]}$$

a) P-regulator med $\varphi_m = 50^\circ$

$$F(s) = K_p \;\Rightarrow\; L(s) = \frac{0.4K_p}{s(1+5s)}$$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{0.4K_p}{\omega_c\sqrt{1+25\omega_c^2}} = 1 \quad\Rightarrow\quad K_p = \frac{\omega_c\sqrt{1+25\omega_c^2}}{0.4} \tag{1}$$
$$\angle L(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan(5\omega_c) = -130^\circ \qquad (\text{ger } \varphi_m = 50^\circ)$$
$$\arctan 5\omega_c = 40^\circ \quad\Rightarrow\quad \omega_c = 0.2\tan 40^\circ = 0.17$$

(1) $\Rightarrow$ $K_p = 0.55$

För det reglerade systemet fås karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} s(1+5s) + 0.4K_p = 0 \\ 5s^2 + s + 0.4\cdot 0.55 = 0 \end{array}$$

Identifiera parametrar ζ, ω_n

$$s^2 + 0.2s + 0.044 \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2 \quad , \quad \begin{cases} \omega_n = 0.21 \\ \zeta = 0.48 \end{cases}$$

Bandbredden blir enligt (5.41) på sid. 203

$$\omega_b = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1-2\zeta^2)^2}} = 1.3\omega_n = 0.27$$

Alternativt uppskattas ω_b från Bodediagrammet i fig. 5.15 på sid. 187. Stigtiden blir enligt (5.5) på sid. 173

$$t_r \approx \frac{1}{\omega_n}(1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2) = 7.6 \quad \text{[ms]}$$

b)

$$F_{PD}(s) = K_p\frac{1 + s\,\tau_d}{1 + s\,\tau_d/b}$$

Snabba upp systemet med kancellering, dvs välj $\tau_d = 5$

$$L(s) = K_p\frac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}\cdot\frac{0.4}{s(1+5s)} = \frac{0.4K_p}{s(1+5s/b)}$$

Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{5}{b}s^2 + s + 0.4K_p = 0$$

Identifiera:

$$s^2 + \frac{b}{5}s + \frac{0.4bK_p}{5} \equiv s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \tag{2}$$

För den speciella kretsöverföringen $L(s)$ i denna deluppgift gäller enligt (6.41) på sid. 260 att fasmarginalen enbart beror på ζ. Bibehållen fasmarginal innebär därför att ζ ej förändras. Den önskade stigtiden $t_r = 2$ är därmed $7.6/2 = 3.8$ gånger snabbare än stigtiden vid P-reglering ($t_r = 7.6$). Med konstant $\zeta = 0.48$ innebär detta enligt (5.5) på sid. 173 att ω_n ökar med en faktor 3.8 till

$$\omega_n = 3.8 \cdot 0.21 = 0.80$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad b = 10\zeta\omega_n = 10 \cdot 0.48 \cdot 0.8 = 3.8 \qquad \text{samt} \qquad K_p = \frac{5\omega_n^2}{0.4b} = \frac{5 \cdot 0.8^2}{0.4 \cdot 3.8} = 2.1$$

Kretsöverföringen blir då $L(s) = 0.84/(s(1 + 5s/3.8)$ och ett Bodediagram visar att $\omega_c = 0.64$ (vilket väl överensstämmer med det faktum att ω_c enligt (6.40) på sid. 260 ska öka på samma sätt som ω_n med en faktor 3.8 till $\omega_c = 3.8 \cdot 0.17 = 0.646$).

PD-regulator	P-regulator från a)
$K_\infty = K_p b = 8.0$	$K_\infty = K_p = 0.55$
$K_p = 2.1$	$K_p = 0.55$

c) Dimensionera med max faslyft vid $\omega_c = 0.64$

$$\angle G(j\omega_c) = -90^\circ - \arctan 5\omega_c = -162.6^\circ$$

För $\varphi_m = 50^\circ$ behövs faslyftet: $\angle F_{PD} = \varphi_m - 180^\circ - \angle G(j\omega_c) = -130^\circ + 162.6^\circ = 32.6^\circ$

$$|G(j\omega_c)| = \frac{0.4}{\omega_c\sqrt{1 + 25\omega_c^2}} = 0.186 \quad (\omega_c = 0.64)$$

Maximalt faslyft vid önskat ω_c ger då enligt fig. 8.12 på sid. 327

$$\angle F_{PD}(j\omega_c) = \varphi_{max} = 32.6^\circ \;\Rightarrow\; b = 3.3$$

och

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}} = 3.0$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 2.8$$

Lågfrekvensförstärkning: $K_p = 3.0$
Högfrekvensförstärkning: $K_\infty = K_p b = 9.9$

d) Stegformad börvärdesändring:
Eftersom det är integralverkan i processen blir det kvarstående felet 0

Laststörning:

$$\frac{E(s)}{V(s)} = \frac{-G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{E(s)}{V(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{-G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{-\dfrac{0.4}{s}}{1 + K_p \cdot \dfrac{0.4}{s}} = -\frac{0.4}{K_p \cdot 0.4} = -\frac{1}{K_p}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{reg}}: &\quad |e_s| = 1.82 \\ PD_{b)}: &\quad |e_s| = 0.48 \\ PD_{c)}: &\quad |e_s| = 0.33 \end{aligned}$$

e) För $F_{PD}(s) = K_p \dfrac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}$ sker maximalt faslyft vid mittfrekvensen $\omega_m = \dfrac{\sqrt{b}}{\tau_d}$. Kvoten mellan låg/hög frekvensförstärkning är

$$\frac{K_p}{K_\infty} = \frac{K_p}{K_p b} = \frac{1}{b}$$

Denna kvot maximeras således då b minimeras.

Av de två PD-regulatorerna är därför den senare med maximalt faslyft vid ω_c att föredra framför kancellationsstrategin i uppgift b), eftersom både den statiska noggrannheten och faktorn b minskar i uppgift c).

8.11

System med dödtid 10 sek.

$$F_{PID}(s) = K_p\big(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1+T_f s}\big)$$

Omedelbart efter referensändringen kommer dödtiden medföra att återkopplingen inte inverkar på styrsignalen $u(t)$, dvs för referenssteget på 10° C fås

$$U(s) = F_{PID}(s) \cdot \frac{10}{s} = 10K_p\big(\frac{1}{s} + \frac{1}{T_i s^2} + \frac{T_d}{1+T_f s}\big)$$

Inverslaplacetransformera till tidsplanet

$$\begin{aligned} u(t) &= 10K_p\big(1 + \frac{1}{T_i}t + \frac{T_d}{T_f}e^{-t/T_f}\big) \\ u(0^+) &= 10K_p\big(1 + 0 + \frac{T_d}{T_f}\big) = 10K_p\big(1 + \frac{T_d}{T_f}\big) \end{aligned}$$

<u>Alternativt</u>: använd begynnelsevärdessatsen

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} u(t) &= \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot F_{PID}(s) \cdot \frac{10}{s} \\ &= 10K_p\big(1 + 0 + \frac{T_d}{T_f}\big) \end{aligned}$$

Med insatta värden: $T = 30,\ T_d = 6,\ T_f = 1,\ K_p = 0.2 \ \Rightarrow\ u(0^+) = 14$

8.12

Processen från uppgift 8.3

$$G(s) = \frac{3e^{-2s}}{1+2s}$$

a) Designa en PID-regulator så att $\varphi_m = 50°$, $\beta = 10$ och $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$. På samma sätt som i uppgift 8.3 bestäms $\omega_{G150} = 0.80$, vilket ger $\omega_c = 0.6\omega_{G150} = 0.48$. För processen gäller vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c att

$$\begin{aligned} |G(j\omega_c)| &= \frac{3}{\sqrt{1+4\omega_c^2}} = 2.16 \\ \angle G(j\omega_c) &= -2\omega_c \frac{180°}{\pi} - \arctan 2\omega_c = -98.8° \end{aligned}$$

Fasmarginalen $\varphi_m = 50°$ ger regulatorns fasvridning

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180° + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180° + 50° - -98.8° = -31.2°$$

Från fig. 8.15(a) på sid. 335 erhålls för $\beta = 10$ och $\angle F_{PID}(j\omega_c) = -31.2°$ värdet $\omega_c\tau = 0.60$, vilket bestämmer

$$\tau = 0.6/\omega_c = 0.6/0.48 = 1.25$$

Fig. 8.15(b) ger på samma sätt $K_\infty|G(j\omega_c)| = 4.4$, vilket innebär att $K_\infty = 4.4/2.16 = 2.0$ och

$$K_i = \frac{K_\infty}{\beta\tau} = \frac{2.0}{10 \cdot 1.25} = 0.16$$

Regulatorn och dess hög/låg-frekvensasymptoter blir därför

$$F_{PID}(s) = \frac{0.16}{s} \cdot \frac{(1+1.25s)^2}{1+0.125s} \quad , \qquad \begin{cases} K_i = 0.16 \\ K_\infty = 2.0 \end{cases}$$

b) Jämfört med PI-regulatorn i uppgift 8.3, där $K_i = 0.11$ och $K_\infty = 0.2$, ökar K_i med en faktor 1.45, medan K_∞ ökar med en faktor 10.

8.13

Processen från uppgift 8.2

$$G(s) = \frac{5}{(1+10s)^3}$$

a) Designa en PID-regulator så att $\varphi_m = 50°$, $\beta = 5$ och $\omega_c = 0.6\omega_{G150}$. På samma sätt som i uppgift 8.2 bestäms $\omega_{G150} = 0.119$, vilket ger $\omega_c = 0.6\omega_{G150} = 0.0714$. För processen gäller vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c att

$$|G(j\omega_c)| = \frac{5}{(1+100\omega_c^2)^{3/2}} = 2.70$$
$$\angle G(j\omega_c) = -3\arctan 10\omega_c = -106.6°$$

Fasmarginalen $\varphi_m = 50°$ ger regulatorns fasvridning

$$\angle F_{PID}(j\omega_c) = -180° + \varphi_m - \angle G(j\omega_c) = -180° + 50° - -106.6° = -23.4°$$

Från fig. 8.15(a) på sid. 335 erhålls för $\beta = 5$ och $\angle F_{PID}(j\omega_c) = -23.4°$ värdet $\omega_c\tau = 0.77$, vilket bestämmer

$$\tau = 0.77/\omega_c = 0.77/0.0714 = 10.8$$

Fig. 8.15(b) ger på samma sätt $K_\infty|G(j\omega_c)| = 2.45$, vilket innebär att $K_\infty = 2.45/2.7 = 0.907$ och

$$K_i = \frac{K_\infty}{\beta\tau} = \frac{0.907}{5 \cdot 10.8} = 0.0168$$

Regulatorn blir därför med $K_i = 0.017$

$$F_{PID}(s) = \frac{0.017}{s} \cdot \frac{(1+10.8s)^2}{1+2.16s}$$

Kontroll visar att $\varphi_m = 49.6°$, $\omega_c = 0.0720$ och $K_\infty = 0.918$

b) Samma som i a) men $\beta = 10$. Från fig. 8.15(a) på sid. 335 erhålls för $\beta = 10$ och $\angle F_{PID}(j\omega_c) = -23.4°$ värdet $\omega_c\tau = 0.71$, vilket bestämmer

$$\tau = 0.71/\omega_c = 0.71/0.0714 = 9.94$$

Fig. 8.15(b) ger på samma sätt $K_\infty|G(j\omega_c)| = 4.7$, vilket innebär att $K_\infty = 4.7/2.7 = 1.74$ och

$$K_i = \frac{K_\infty}{\beta\tau} = \frac{1.74}{10 \cdot 9.94} = 0.0175$$

Regulatorn blir därför

$$F_{PID}(s) = \frac{0.0175}{s} \cdot \frac{(1+9.94s)^2}{1+0.994s}$$

Kontroll visar att $\varphi_m = 50.3°$, $\omega_c = 0.0709$ och $K_\infty = 1.74$

c) Jämfört med PI-regulatorn i uppgift 8.2, där $K_i = 0.010$ och $K_\infty = 0.16$, ökar K_i (prestanda) med en faktor 1.7 för $\beta = 5$, medan K_∞ (styrsignalaktivitet) ökar med en faktor 5.7. För $\beta = 10$ blir ökningen av K_i en faktor 1.75, medan K_∞ ökar med en faktor 10.9.

8.15

En PID-regulator på generell form med dubbelnollställe

$$F_{PID}(s) = K_i \frac{(1+s\tau)^2}{s(1+s\tau/\beta)} = K_i \frac{1+2\tau s+\tau^2 s^2}{s(1+s\tau/\beta)}$$

kan skrivas som en PID-regulator på parallell form

$$\begin{aligned} F_{PID}(s) &= K_p\big(1+\frac{1}{sT_i}+\frac{sT_d}{1+sT_f}\big) = K_p\,\frac{sT_i(1+sT_f)+1+sT_f+s^2T_iT_d}{sT_i(1+sT_f)} \\ &= \frac{K_p}{T_i}\cdot\frac{1+(T_i+T_f)s+(T_d+T_f)T_is^2}{s(1+sT_f)} \end{aligned}$$

Polen ger att: $\quad T_f = \dfrac{\tau}{\beta}$

För dubbelnollstället fås $(T_d = bT_f,\ T_i = aT_d = abT_f)$

$$\begin{cases} 2\tau = T_i + T_f = (1+ab)T_f = \dfrac{\tau}{\beta}(1+ab) \\ \tau^2 = (T_d+T_f)T_i = (b+1)ab\cdot T_f^2 = \dfrac{\tau^2}{\beta^2}(b+1)ab \end{cases}$$

τ kan elimineras

$$\begin{cases} 2\beta = 1+ab \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{2\beta-1}{b} \\ \beta^2 = (b+1)ab \end{cases}$$

dvs,

$$\begin{aligned} \beta^2 = (b+1)(2\beta-1) \quad &\Rightarrow \quad b = \frac{\beta^2}{2\beta-1} - 1 = \frac{(\beta-1)^2}{2\beta-1} \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{1}{(\beta-1)^2} \end{aligned}$$

$$T_d = bT_f\ , \qquad T_i = aT_d$$

Lågfrekvensförstärkningen: $\dfrac{K_p}{T_i} = K_i \ \Rightarrow\ K_p = T_iK_i$

9

Principer för dimensionering av regulatorer II: Robusthet

9.1

Sök stabilitetsgränsen genom att använda Routh-Hurwitz. Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K_p}{s(1+s)(1+Ts)} = 0$$

dvs

$$Ts^3 + (1+T)s^2 + s + K_p = 0$$

Routh-Hurwitz tablå

$$\begin{array}{ccc} s^3 & T & 1 \\ s^2 & 1+T & K_p \\ s^1 & c_0 & 0 \\ s^0 & d_0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1+T-K_p \cdot T}{1+T} = 1 - K_p \frac{T}{1+T} \\ d_0 &= K_p \end{aligned}$$

Stabilt system om $c_0 > 0$ och $K_p \dfrac{T}{1+T} < 1$

K_p är uppåt begränsad. För att uppnå önskad marginal $A_m = 2$, halveras K_p

$$(2K_p)\frac{T}{1+T} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2K_pT < 1+T$$

Eftersom $2K_p > 1$ fås

$$T_{\max} = \frac{1}{2K_p - 1} \quad , \quad K_p = 3 \;\Rightarrow\; T_{\max} = 0.2$$

9.2

a) Multiplikativ osäkerhet

$$\Delta_m(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{K_0 - K}{K}\,, \qquad \text{där} \qquad K = 3$$

$G(s)$ är den nominella modellen medan $G_0(s)$ är det verkliga systemet. Hur mycket får det verkliga K_0 variera för garanterad stabilitet?

Komplementära känslighetsfunktionen för den nominella kretsöverföringen

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{0.5K}{s^2 + s + 0.5K}$$

Robusthetskravet ger

$$|T(j\omega) \cdot \Delta_m(j\omega)| = \frac{|0.5(K_0 - K)|}{|-\omega^2 + j\omega + 0.5K|} < 1$$

dvs

$$\begin{aligned} 0.5|K_0 - 3| &< \sqrt{(0.5 \cdot 3 - \omega^2)^2 + \omega^2} \\ 0.25(K_0 - 3)^2 &< \omega^4 - 2\omega^2 + 1.5^2 = (\omega^2 - 1)^2 - 1 + 1.5^2 \end{aligned}$$

Högerledet har sitt minimum då kvadraten är noll

$$(K_0 - 3)^2 < 4(1.5^2 - 1) = 5$$

$$\begin{cases} K_0 - 3 < \sqrt{5} & \Rightarrow \quad K_0 < 3 + \sqrt{5} \\ -(K_0 - 3) < \sqrt{5} & \Rightarrow \quad K_0 > 3 - \sqrt{5} \end{cases}$$

dvs

$$0.764 < K_0 < 5.24$$

b) Karakteristiska ekvationen för det verkliga systemet ges av

$$1 + L(s) = 1 + \frac{0.5K_0}{s(s+1)} = 0$$

dvs $\quad s^2 + s + 0.5K = 0\,,$ vilket ger Routh-Hurwitz tablå

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 0.5K_0 \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & 0.5K_0 & \end{array}$$

Stabilt system om $K_0 > 0$

Slutsats: $|T \cdot \Delta_m| < 1$ är ett konservativt kriterium.

9.3

Multiplikativ osäkerhet

$$\Delta_m(s) = \frac{e^{-sT_d} - e^0}{e^0} = e^{-sT_d} - 1$$

$$|\Delta_m(j\omega)|^2 = (\cos\omega T_d - 1)^2 + \sin^2\omega T_d = 2 - 2\cos\omega T_d$$

Robusthetskravet kan skrivas som

$$|\Delta_m(j\omega)|^2 < \frac{1}{|T(j\omega)|^2}$$

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{0.25K^2}{(0.5K-\omega^2)^2+\omega^2}, \quad \text{där} \quad K=3$$

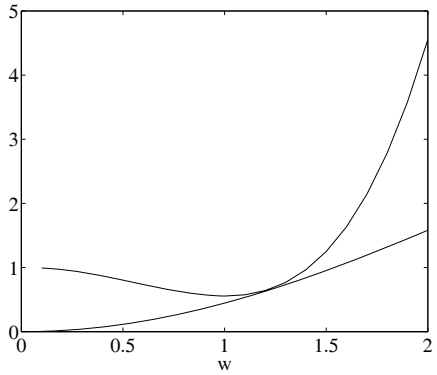
dvs

$$2 - 2\cos\omega T_d < \frac{(1.5-\omega^2)^2+\omega^2}{0.25\cdot 3^2}$$

Med datorhjälp fås

$$T_d < 0.68$$

I figuren visar den undre kurvan $|\Delta_m(j\omega)|^2$ för $T_d = 0.68$ och den övre visar $|T(j\omega)|^{-2}$.



Nyquist kriterium:
Överkorsningsfrekvensen ω_c bestäms från kretsöverföringen

$$|L(j\omega_c)| = \frac{0.5K}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}} = 1$$

$$\omega_c^2(\omega_c^2+1) = 1.5^2$$

$$\omega_c^2 = -0.5 + \sqrt{0.25+1.5^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 1.040$$

För stabilt system gäller att

$$\underline{/L(j\omega_c)} = -\omega_c T_d \frac{180^\circ}{\pi} - 90^\circ - \arctan\omega_c > -180^\circ$$

$$\Rightarrow \; T_d < \frac{\pi}{180^\circ\cdot 1.04}\big(90^\circ - \arctan(1.04)\big) = 0.736$$

$T_d < 0.736$ stämmer bra överens med det föregående resultatet, vilket visar att $|T\cdot\Delta_m| < 1$ ger ett bra mått på stabilitetsområdet. Detta beror på att dödtiden ger mer osäkerhet för höga frekvenser där $|T\cdot\Delta_m| < 1$ är ett bra stabilitetsmått.

9.4

Den multiplikativa osäkerheten blir

$$\Delta_m(s) = \frac{G_0(s)-G(s)}{G(s)} = \frac{1-Ts-1}{1} = -Ts$$

Designa en PI-regulator för det nominella $G(s) = \dfrac{1}{1+5s}$

$$F_{PI}(s) = K_p\,\frac{1+sT_i}{sT_i}$$

Den nominella kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{K_p(1+sT_i)}{sT_i(1+5s)}\,, \quad \text{låt } T_i = 5 \quad \Rightarrow \quad L(s) = \frac{K_p}{5s}$$

Komplementär känslighetsfunktion

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p}{5s} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{K_p}{5s}} = \frac{1}{1+\dfrac{5s}{K_p}}$$

Eftersom $|T(0)| = 1$ fås bandbredden som

$$|T(j\omega_b)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{5\omega_b}{K_p}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_b = \frac{K_p}{5}$$

Multiplicera med osäkerheten

$$T(s)\Delta_m(s) = \frac{-Ts}{1+\dfrac{s}{\omega_b}}$$

Betrakta motsvarande asymptotiska amplituddiagram: LF-asymptoten har lutningen +20dB/dekad, vid brytfrekvensen ω_b blir lutningen 0dB. Den exakta amplitudkurvan kommer att vara växande med ett maximum då $\omega \to \infty$. Robusthets kravet blir då

$$\max_{\omega} |T(j\omega)\Delta_m(j\omega)| = \lim_{\omega\to\infty} |T(j\omega)\Delta_m(j\omega)| = T\omega_b < 1$$

dvs den nominella bandbredden är begränsad till

$$\omega_b < \frac{1}{T}$$

9.5

(Jmf. uppgift 5.5)

Ta fram den multiplikativa osäkerhetsfaktorn

$$\begin{aligned}\Delta_m(s) &= \frac{F(s)}{F(s)} \cdot \frac{G_0(s)-G(s)}{G(s)} = \frac{L_0(s)-L(s)}{L(s)} = \frac{\dfrac{1}{1+0.02+(s/\omega_n)^2} - \dfrac{1}{1+0.02s}}{\dfrac{1}{1+0.02s}} \\ &= \frac{1+0.02s}{1+0.02s+(s/\omega_n)^2} - 1 = \frac{-(s/\omega_n)^2}{1+0.02s+(s/\omega_n)^2}\end{aligned}$$

Den komplementära känslighetsfunktionen

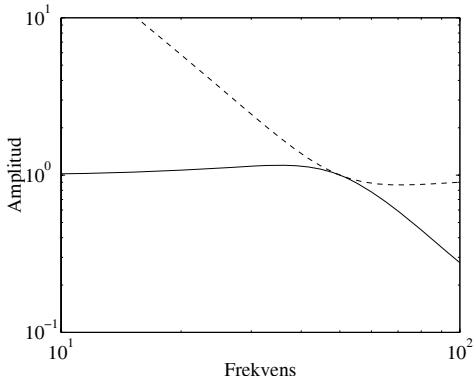
$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{50}{s(1+0.02)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{50}{s(1+0.02s)}} = \frac{50}{0.02s^2+s+50}$$

Robusthetskravet är uppfyllt om

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta(j\omega)|}$$

Uppgift 5.5 gav stabilitetsgränsen $\omega_n > 50$ genom Routh-Hurwitz. I amplitud diagrammet är $|T(j\omega)|$ och $|\Delta_m(j\omega)|^{-1}$ uppritade för $\omega_n = 50$.

Robusthetskriteriet ger alltså samma gränsvärde på ω_n



9.6

a) Den slutna överföringsfunktionen

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)} = \frac{\dfrac{K(s+2)}{s(s+a)}}{1+\dfrac{K(s+2)}{s(s+a)}} = \frac{K(s+2)}{s(s+a)+K(s+2)}$$

Välj K och a så att systemet får en dubbelpol i $s=-2$

$$s(s+a)+K(s+2) \equiv (s+2)^2 \quad \Rightarrow \quad a=2,\ K=2$$

b) Kretsöverföringen blir

$$L(s) = F(s)G(s) = \frac{2(s+2)}{s(s+2)} = \frac{2}{s}$$

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{2}{s+2} \\ G_{vy}(s) &= \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1+L(s)} = \frac{s}{s^2+0.1s+1} \end{aligned}$$

Nackdel: De svagt dämpade polerna (resonans) finns med i störningsdynamiken

c) Använd robusthetskravet $\max_w |T(j\omega)\cdot\Delta_m(j\omega)| < 1$

$$|T(j\omega)\cdot\Delta_m(j\omega)| = \left|G_{ry}(j\omega)\cdot\frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)}\right| < \sqrt{\frac{4}{4+\omega^2}}\cdot\sqrt{\frac{4\omega^2}{4+\omega^2}} = \frac{4\omega}{4+\omega^2} < 1\ , \quad \text{då } \omega > 0$$

Den sista olikheten inses genom likheten $\dfrac{4\omega}{4+\omega^2} = 1 - \dfrac{(\omega-2)^2}{4+\omega^2}$

9.7

Nominell överföringsfunktion: $G(s)$, verklig: $G_0(s) = G(s)\tilde{G}(s)$

Den multiplikativa osäkerheten

$$\Delta_m(s) = \frac{G_0(s)-G(s)}{G(s)} = \tilde{G}(s) - 1$$

Antag att reglering av systemet ger

$$T(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+\omega_0 s+\omega_0^2}$$

Bandbredden ges av $|T(j\omega_b)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ eftersom $|T(0)| = 1$. Kvadrering ger

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{(\omega_0^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega_0\omega_0)^2} = \frac{1}{2}$$
$$2\omega_0^4 = \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_b^2 + \omega_b^3 + \omega_0^2\omega_b^2 = 2\omega_0^4$$
$$\omega_b^4 - \omega_0^2\omega_b^2 - \omega_0^4 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_b^2 = \frac{\omega_0^2}{2} + \sqrt{\frac{\omega_0^4}{4} + \omega_0^4}$$
$$\omega_b^2 = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \quad \Rightarrow \quad \omega_b = 1.272\omega_0$$

Robusthetskrav

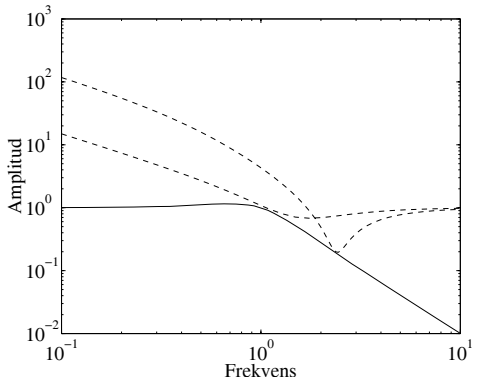
$$|T(j\omega)\cdot\Delta_m(j\omega)| < 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{|\Delta_m(j\omega)|} > |T(j\omega)|$$

Välj ω_0 så högt som möjligt utan att kurvorna korsas

a)

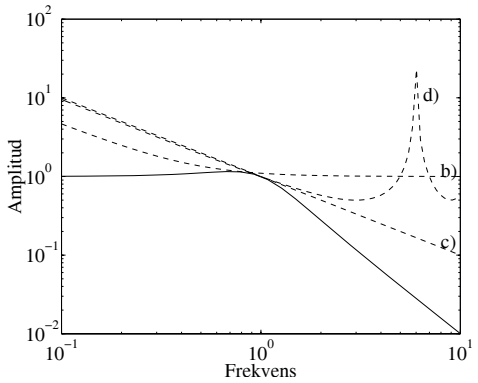
$$\tilde{G}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \;\Rightarrow\; \Delta_m(s) = -\frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

I figuren är kurvorna $|T(j\omega/\omega_0)|$ och $\dfrac{1}{|\Delta_m(j\omega)|}$ ritade för



i) $\zeta = 0.5,\ \omega_n = 1.5$ dvs $\omega_n > 1.5\cdot\omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_b < 0.85\omega_n$

ii) $\zeta = 0.1,\ \omega_n = 2.4$ dvs $\omega_n > 2.4\cdot\omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_b < 0.53\omega_n$



b)

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{1+Ts} \;\Rightarrow\; \Delta_m(s) = -\frac{Ts}{1+Ts}$$

I figuren är $T = 2.2$, dvs

$$\frac{1}{T} > \frac{1}{2.2}\,\omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_b < \frac{2.8}{T}$$

c)

$$\tilde{G}(s) = 1 - Ts \;\Rightarrow\; \Delta_m(s) = -Ts$$

I figur, $T = 1.0$

$$\frac{1}{T} > \frac{1}{1.0}\,\omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_b < \frac{1.3}{T}$$

d)

$$\tilde{G}(s) = e^{-sT_d} \;\Rightarrow\; \Delta_m(s) = e^{-sT_d} - 1$$

$$\begin{aligned} |\Delta_m(j\omega)|^2 &= |\cos\omega T_d - j\sin\omega T_d - 1|^2 = \sin^2\omega T_d + (\cos\omega T_d - 1)^2 \\ &= 2 - 2\cos\omega T_d \end{aligned}$$

Figuren visar kurvan för $T_d = 1.05$

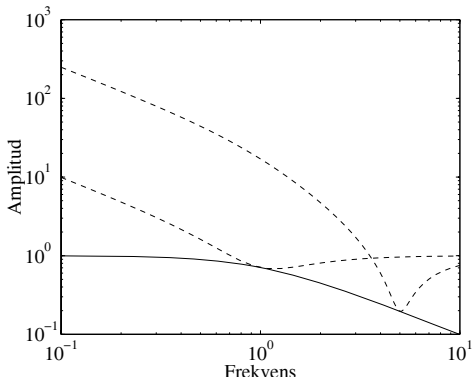
$$\frac{1}{T_d} > \frac{1}{1.05}\,\omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_b < \frac{1.3}{T_d}$$

9.8

Den komplementära känslighetsfunktionen

$$T(s) = \frac{\omega_b}{s + \omega_b}$$

där $\omega = \omega_b$ är bandbredden



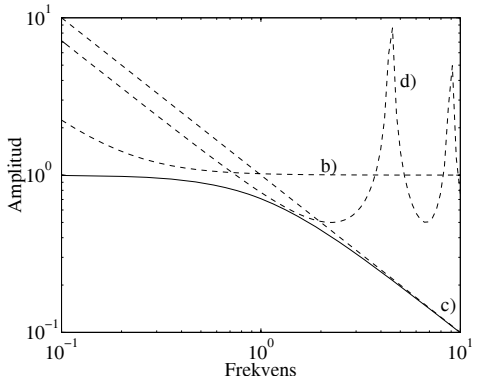
a) I figuren är $|T(j\omega/\omega_b)|$ och $|\Delta_m(j\omega)|^{-1}$ uppritade för

$$\begin{aligned} \zeta = 0.5,\ \omega_n = 1 \quad &\Rightarrow \quad \omega_n > 1\cdot\omega_b\ , \quad \omega_b < \omega_n \\ \zeta = 0.1,\ \omega_n = 5 \quad &\Rightarrow \quad \omega_n > 5\cdot\omega_b\ , \quad \omega_b < 0.2\omega_n \end{aligned}$$

b) ω_b godtyckligt eftersom $\dfrac{1}{|\Delta_m(j\omega)} > |T(j\omega)|$ för alla ω

c) $T = 1:\quad \dfrac{1}{T} > 1\cdot\omega_b$

d) $T_d = 1.4:\quad \dfrac{1}{T_d} > \dfrac{1}{1.4}\,\omega_b$



9.9

a) Öppet system: $G^{ö}_{vy}(s) = G(s)$

Slutet system: $G^{s}_{vy}(s) = \dfrac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}$

Störningens påverkan på utsignalen för det slutna systemet ska vara mindre jämfört med det öppna. För störning med frekvensen ω_v fås

$$\left|\frac{G^{s}_{vy}(j\omega_v)}{G^{ö}_{vy}(j\omega_v)}\right| = \frac{1}{|1 + F(j\omega_v)G(j\omega_v)|} < 1$$

dvs

$$|F(j\omega_v)G(j\omega_v) - (-1)| > 1$$

Om detta skall gälla oberoende av ω_v så måste kretsöverföringens frekvenskurva ligga utanför en cirkel med medelpunkt i -1 och radien 1

b) I allmänhet gäller Bodes integralsats: $\int \log|S(j\omega)|d\omega = 0$

$S(s) = 1/(1 + F(s)G(s))$ måste alltså ha belopp såväl mindre som större än 1 för varierande ω, dvs kravet kan inte uppfyllas för alla ω.

9.10

a)

$$G(s) = \frac{e^{-0.4s}}{(1+s)^3}$$

Vid dödtid kan systemet inte bli snabbare än e^{-sT_d}

$$\omega_c \leq \frac{1}{T_d} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

b)

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+s)^3}$$

Ett nollställe i högra halvplanet i $s = b$ medför att systemet inte kan bli snabbare än $\dfrac{b-s}{s+b}$.

$G(s)$ har nollställe i $s = 1$

$$\omega_c \leq \frac{b}{2} = 0.5$$

c)

$$G(s) = \frac{1}{(s-0.5)(s+1)^2}$$

En pol i högra halvplanet $s = p$ ger att ω_c begränsas nedåt

$$\omega_c \geq 2p = 1$$

10

Alternativa designprinciper och regulatorstrukturer

10.1

a) Kretsöverföringen

$$L(s) = K_r \frac{\dfrac{1}{1+0.1s}}{1+\dfrac{K_d}{1+0.1s}} \frac{1}{s} = \frac{K_r}{s} \cdot \frac{1}{1+0.1s+K_d} = \frac{10K_r}{s^2+10(K_d+1)s}$$

Karakteristiska ekvationen

$$1 + L(s) = 0 \;\Rightarrow\; s^2 + 10(K_d+1)s + 10K_r = 0$$

Önskad karakteristisk ekvation genom polplacering

$$s^2 + 10(K_d+1)s + 10K_r \equiv (s+10+10j)(s+10-10j) = s^2 + 20s + 200$$

ger $\quad K_d = 1, K_r = 20$

b) $\omega_n = \sqrt{200},\ 2\zeta\omega_n = 20 \quad \Rightarrow \quad \zeta = 10/\sqrt{200} = 1/\sqrt{2}$

Kretsen bryts vid u vilket ger två slingar i återkopplingen. Kretsöverföringen då intern återföring används blir

$$L_i(s) = \frac{1}{1+0.1s}\Big(\frac{K_r}{s} + K_d\Big) = \frac{K_r + K_d s}{s(1+0.1s)} = \frac{20+s}{s(1+0.1s)}$$

$$|L_i(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{20^2+\omega_c^2}}{\omega_c\sqrt{1+0.1^2\omega_c^2}} = 1 \;\Rightarrow\; 400 + \omega_c^2 = \omega_c^2(1+0.01\omega_c^2)$$

$$\omega_c = 10\sqrt{2} \approx 14.1$$

$$\underline{/L_i(j\omega_c)} = \arctan\frac{\omega_c}{20} - 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) = -109^\circ$$

$$\varphi_m = 71^\circ$$

c) Dimensionera en PD-regulator $F_{PD}(s) = K_p \dfrac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}$ utan intern återföring som ger samma ω_c och φ_m som i b). Vid önskat ω_c gäller för processen

$$G(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)}$$

$$\begin{aligned} \angle G(\omega_c) &= -90^\circ - \arctan(0.1\omega_c) = -144.7^\circ \\ |G(j\omega_c)| &= 0.0408 \end{aligned}$$

För att uppnå samma φ_m som i b) krävs ett faslyft $\angle F_{PD}(j\omega_c) = 35.7^\circ$.
b fås ur diagrammet för PD-dimensionering

$$b = 3.8\ , \qquad K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}} = 12.6\ , \qquad \tau_d = \frac{\sqrt{b}}{\omega_c} = 0.138$$

dvs regulatorn blir

$$F_{PD}(s) = 12.6\,\frac{1+0.14s}{1+0.036s}$$

d) För PD-regulatorn i c) fås kretsöverföringen

$$L_{pd}(s) = F_{PD}(s)G(s) = K_p\,\frac{1+s\tau_d}{s(1+0.1s)(1+s\tau_d/b)}$$

Eftersom både L_i och L_{pd} innehåller en integrator $1/s$ så kommer $1+L(s) \to L(s)$ då $s \to 0$ och $1+L(s) \to 1$ då $s \to \infty$

Vid låga frekvenser $\omega \to 0$ gäller därför att

$$\frac{|S_{pd}|}{|S_i|} \approx \frac{|L_{pd}|^{-1}}{|L_i|^{-1}} \approx \frac{\omega/K_p}{\omega/K_r} = 1.6$$

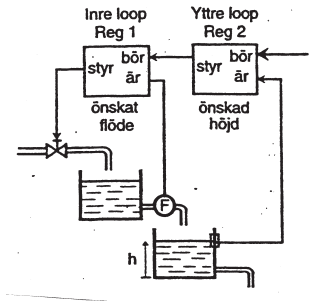
dvs lågfrekventa processtörningar kompenseras sämre med PD-reglering eftersom $|S_{pd}| > |S_i|$.

Robusthet vid högre frekvenser bestäms av komplementära känslighetsfunktionen, $\omega \to \infty$

$$\frac{|T_{pd}|}{|T_i|} \approx \frac{|L_{pd}|}{|L_i|} \approx \frac{K_p \cdot b \cdot 10/\omega^2}{K_d \cdot 10/\omega} = \frac{47.5}{\omega} = 3.4\frac{\omega_c}{\omega}$$

dvs robustheten förbättras med PD-regulatorn då $\omega \geq 3.4\,\omega_c$ eftersom $|T_{pd}|$ då är mindre än $|T_i|$.

10.2



10.3

a) Kretsens överföringsfunktion

$$L(s) = K_p \cdot \frac{1}{1+sT_1} \cdot \frac{Ke^{-sT_d}}{(1+sT_2)}$$

Från t.ex. Bode-diagram fås att förstärkningen $K_p \approx 0.15$ ger $A_m = 2.5,\ \varphi_m = 70°$

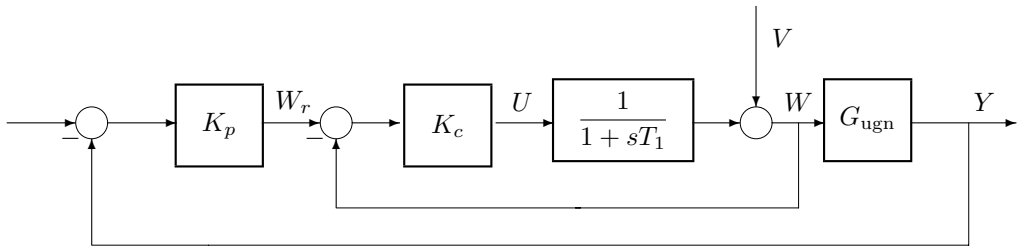
$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{Ke^{-sT_d}}{1+sT_2}}{1 + K_pK\dfrac{e^{-sT_d}}{(1+sT_1)(1+sT_2)}}$$

För stationära fel $s \to 0$ fås

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{K}{1+K_pK} = \begin{cases} 20, & \text{oreglerat } (K_p = 0) \\ 5, & \text{reglerat } (K_p = 0.15) \end{cases}$$

dvs felet reduceras 4 ggr

b) Kaskadreglering:



$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{V(s)} &= \frac{Ke^{-sT_d}}{1+sT_2} \cdot \frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{K_pKe^{-sT_d}}{1+sT_2}\right)\dfrac{K_c}{1+sT_1}} \\ &= \frac{Ke^{-sL}(1+sT_1)}{(1+sT_1+K_c)(1+sT_2) + K_pK_cKe^{-sT_d}} \end{aligned}$$

En stegformad störning $s \to 0$ ska reduceras 2 ggr

$$\left|\frac{Y(j\omega)}{V(j\omega)}\right|_{LF} = \frac{K}{1+K_c+K_pK_cK} = 0.5$$

$K_p = 0.15,\ K = 20 \Rightarrow K_c = 9.75$

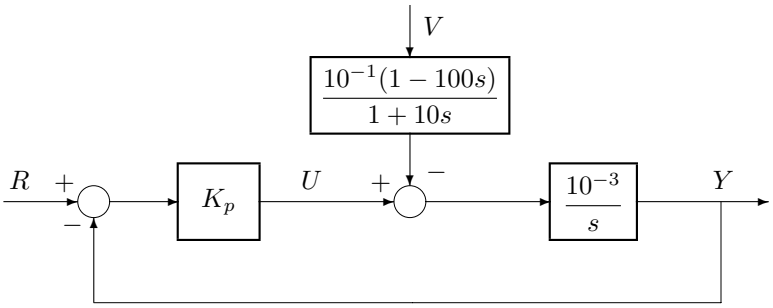
c) Utregleringen (transienten) blir betydligt snabbare, eftersom den inre återkopplingen inte påverkas av ugnens dödtid och tröghet.

10.4

a)

$$Y(s) = \frac{10^{-3}}{s}U(s) - \frac{10^{-4}(1-100s)}{s(1+10s)}V(s) = \frac{10^{-3}}{s}\left(U(s) - \frac{1-100s}{1+10s}V(s)\right)$$

Återkoppla nivån och inför en P-regulator. Resulterande blockschema



b)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K_p \cdot 10^{-3}}{s}}$$

Ett börvärdessteg $R(s) = \frac{1}{s}$ ger ett begynnelsefel $e(0) = 1$

$$E(s) = \frac{s}{s + K_p \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s + K_p \cdot 10^{-3}} \;\subset\; e(t) = e^{-K_p 10^{-3}\, t}$$

Efter 60 sekunder ska enhetsfelet ha sjunkit till 0.25

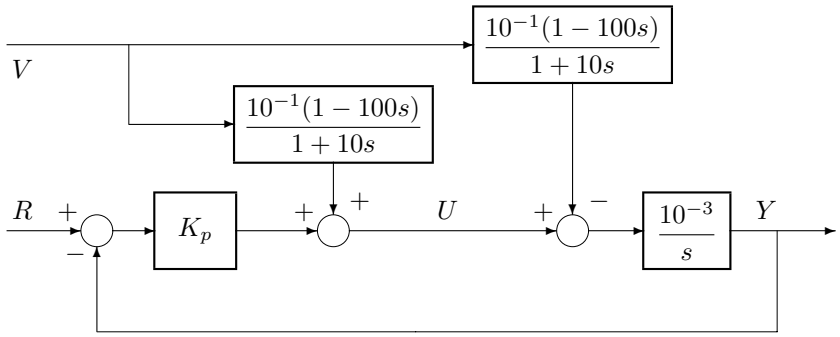
$$e(60) = e^{-0.06 \cdot K_p} = 0.25 \;\Rightarrow\; K_p = 23.1$$

$$\frac{E(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1-100s}{1+10s} \cdot \frac{10^{-4}}{s}}{1 + \frac{K_p \cdot 10^{-3}}{s}} = \frac{(1-100s) \cdot 10^{-4}}{(1+10s)(s + K_p \cdot 10^{-3})}$$

Kvarstående felet då $V(s) = 2/s$

$$\begin{aligned} e_s &= \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\, \frac{(1-100s)10^{-4}}{(1+10s)(s+K_p \cdot 10^{-3})} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{K_p \cdot 10^{-3}} \\ &= 8.66 \cdot 10^{-3} \quad [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

c) En modell av störningsdynamiken används för att addera en kompenseringssignal till styrsignalen



d) Stabiliteten påverkas ej, eftersom framkopplingslänken ej ingår i återkopplingen.
Framkopplingslänken i sig måste dock vara stabil.

10.5

A : Fel – framkoppling kväver mätbara störningar
B : Fel – framkoppling har inget med PID-reglering att göra
C : Korrekt!

10.6

a) Återkoppling:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{1}{1 + \dfrac{b}{s(s+a)}} = \frac{s(s+a)}{s^2 + as + b}$$

LF-asymptot: a/bs
Brytfrekvenser: +20dB vid $\omega = a$, -40dB vid $\omega = \sqrt{b}$

Framkoppling:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = 1 - (s+1)\frac{b}{s+a} = \frac{s + a - bs - b}{s+a} = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{1 + \dfrac{1-b}{a-b}s}{1 + \dfrac{1}{a}s}$$

LF-asymptot: $(a-b)/a$
Brytfrekvenser: +20dB vid $\omega = (a-b)/(1-b)$, -20dB vid $\omega = a$

Framkopplingen är designad att kompensera störningen i det nominella fallet $a = b = 1$
$\Rightarrow\ Y(s)/V(s) = 0$

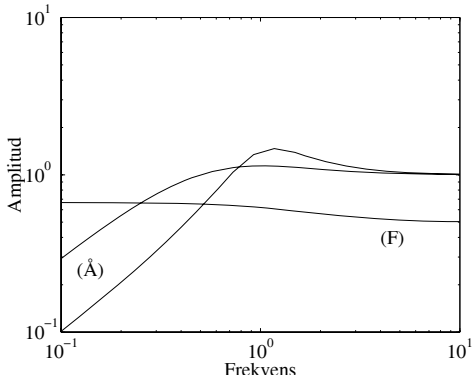
Då $a = 1.5,\ b = 0.5$ fås

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + s/2}{1 + s/1.5}$$

Öppen styrning:

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = 1$$

I figuren visas amplitudkurvorna för framkoppling i alternativfallet, samt de två återkopplade fallen där störningen dämpas mest i det nominella fallet.



b) Vid modellosäkerhet ger framkoppling kvarstående fel för låga frekvenser, detta undviks med återkopplingens integralverkan.

För höga frekvenser ger framkoppling bättre kompensering än återkoppling om modellen är någorlunda tillförlitlig.

En kombination av fram- och återkoppling innebär att framkopplingen förbättrar högfrekvensegenskaperna medan återkopplingen tar hand om de långsamma störningarna.

10.7

Systemet ges av

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_v V(s)$$

Inför framkoppling av den mätbara mätstörningen

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\big[U(s) + F_f(s)V(s)\big] + G_v(s)V(s) \\ &= G(s)U(s) + \big[G(s)F_f(s) + G_v(s)\big]V(s) \end{aligned}$$

a) Kompensera för störningens inverkan

$$\begin{aligned} F_f(s) &= -\frac{G_v(s)}{G(s)} = -\frac{s+b_v}{s+a_v}\,e^{-sT_{dv}} \cdot \frac{s+a}{s+b}\,e^{sT_d} \\ &= -\frac{(s+a)}{(s+a_v)}\frac{(s+b_v)}{(s+b)}\,e^{-s(T_{dv}-T_d)} \end{aligned}$$

b) För att framkopplingen ska vara stabil krävs att nollstället för $G(s)$ ligger i VHP (minfasnollställe) och att polen för $G_v(s)$ ligger i VHP, d.v.s. $b > 0,\ a_v > 0$.

Det går bara att realisera positiv dödtid, dvs $T_{dv} \geq T_d$

Om kraven ej är uppfyllda, använd en statisk förstärkning som bara tar hänsyn till LF-karakteristiken

$$F_f = -\frac{ab_v}{a_v b}$$

10.8

a) Störningens inverkan (sätt $R(s) = 0$)

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = \big[G_v(s) + F_f(s)G_u(s)\big]G_y(s)\,\frac{1}{1 + G_u(s)G_y(s)F_{\mathrm{PID}}(s)}$$

Överföringsfunktionen blir noll om F_f väljs som

$$F_f(s) = -\frac{G_v}{G_u}$$

b)

G_u	icke min-fas	$\Rightarrow$	F_f instabil – problem!
G_y	icke min-fas	$\Rightarrow$	inga problem!
G_v	icke min-fas	$\Rightarrow$	F_f icke min-fas men detta OK!

10.9

Kretsöverföringen: $L(s) = G(s)F(s)$

Fel vid börvärdesändringar: $\dfrac{E(s)}{R(s)} = -\dfrac{1}{1+L(s)}$

Störningens inverkan: $\dfrac{Y(s)}{V(s)} = \dfrac{G(s)}{1+L(s)}$

a) $L(s) = \dfrac{10}{s}\,,\quad \dfrac{E(s)}{R(s)} = \dfrac{0.1s}{1+0.1s}\,,\quad \dfrac{Y(s)}{V(s)} = \dfrac{0.1s}{(1+0.1s)(1+s)}$

b) $L(s) = \dfrac{10}{s}\,,\quad \dfrac{E(s)}{R(s)} = \dfrac{0.1s}{1+0.1s}\,,\quad \dfrac{Y(s)}{V(s)} = \dfrac{0.1s}{1+0.1s} \cdot \dfrac{s+2}{s^2+0.1s+1}$

c) $L(s) = \dfrac{10(s-1+\varepsilon)(s-2)}{s(s-2+\varepsilon)(s-1)}\,,$

$$\frac{E(s)}{R(s)} \approx \frac{0.1s}{1+0.1s} \cdot \frac{(s-2+\varepsilon)(s-1)}{(s-1+\varepsilon)(s-2)}\,,\quad \frac{Y(s)}{V(s)} \approx \frac{0.1s}{1+0.1s} \cdot \frac{(s-1)}{(s-2)}$$

Eftersom allmänt $\dfrac{E}{R} = \dfrac{1}{1+L}$ medan $\dfrac{Y}{V} = \dfrac{G}{1+L}$ kommer processens dynamik att finnas kvar vid processtörningar trots pol-nollställes förkortning i kretsöverföringen L.

Dessutom gäller att instabila poler och nollställen ej kan förkortas bort eftersom en exakt kancellation ej kan genomföras i praktiken på grund av osäkerheter i processmodellen.

10.10

Processen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}$$

Eftersom $-1 < a < 1$ och $\omega_n = 1$ så är $\xi < 0.5$, dvs systemet har resonans

a)

$$\begin{aligned} F_{PID}(s) &= K_p\big(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_f}\big) = K_p \frac{sT_i(1+sT_f) + 1 + sT_f + s^2T_iT_d}{sT_i(1+sT_f)} \\ &= K_p \frac{1 + s(T_i + T_f) + s^2T_i(T_f + T_d)}{sT_i(1+sT_f)} \end{aligned}$$

Låt nollställena kancellera processens poler

$$\begin{cases} T_i + T_f = a \\ T_i(T_f + T_d) = 1 \end{cases}$$

vilket ger

$$T_i = a - T_f \ , \qquad T_d = \frac{1 - T_f(a - T_f)}{a - T_f}$$

b) Kretsöverföringen

$$\begin{aligned} L(s) &= F_{PID}(s)G(s) = K_p \frac{1 + as + s^2}{sT_i(1+sT_f)} \cdot \frac{1}{s^2 + as + 1} \\ &= \frac{K_p}{s(a - T_f)(1+sT_f)} = \frac{K_p}{a - T_f} \cdot \frac{1}{s(1+sT_f)} \end{aligned}$$

Komplementära känslighetsfunktionen

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{K_p}{a - T_f} \cdot \frac{1}{s(1+sT_f)} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{K_p}{a - T_f} \cdot \dfrac{1}{s(1+sT_f)}} \\ &= \frac{K_P}{a - T_f} \cdot \frac{1}{s^2T_f + s + \dfrac{K_p}{a - T_f}} = \frac{K_p}{T_f(a - T_f)} \cdot \frac{1}{s^2 + \dfrac{1}{T_f}s + \dfrac{K_p}{T_f(a - T_f)}} \end{aligned}$$

Dubbelpol i $s = -\alpha$ ger det önskade nämnarpolynomet: $s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$, dvs

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{1}{2\alpha} \\ K_p &= T_f(a - T_f) \cdot \alpha^2 = \frac{\alpha}{2}(a - \frac{1}{2\alpha}) \end{aligned}$$

Uttrycket för PID-regulatorn blir

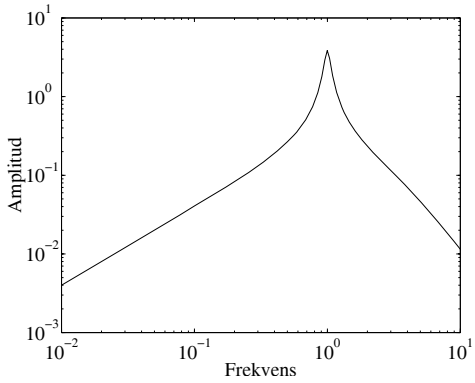
$$\begin{aligned} F_{PID}(s) &= \frac{K_p(s^2 + as + 1)}{sT_i(1+sT_f)} = \frac{K_p}{a - T_f} \cdot \frac{s^2 + as + 1}{s(1 + \dfrac{s}{2\alpha})} \\ &= \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1 + as + s^2}{s(1 + \dfrac{s}{2\alpha})} \end{aligned}$$

$$L(s) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1 + as + s^2}{s(1 + \frac{s}{2\alpha})} \cdot \frac{1}{s^2 + as + 1} = \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{s(1 + \dfrac{s}{2\alpha})}$$

c) Inför en processtörning

$$\begin{aligned} G_{vy}(s) &= \frac{G(s)}{1 + L(s)} = \frac{1}{s^2 + as + 1} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha}{2} \dfrac{2\alpha}{s(s + 2\alpha)}} \\ &= \frac{s(s + 2\alpha)}{(s^2 + as + 1)(s + \alpha)^2} \end{aligned}$$

Skissa $|G_{vy}(j\omega)|$, välj t.ex. $\alpha = 5$, $a = 0.1$ (Brytpunkter: $\omega = 1, 5, 10$). Notera att resonansen finns kvar i störningsdynamiken trots kancellationen.

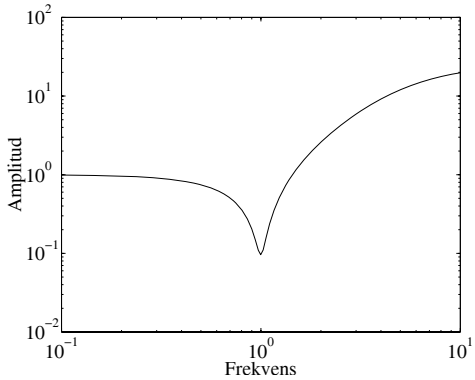


De kancellerade polerna dyker upp i överföringsfunktionen G_{vy}. Detta är en generell egenskap, vilket innebär att kancellerade poler måste vara stabila. I detta exempel krävs därför att $a > 0$ för att kancellation ska vara möjligt att genomföra.

d) Styrsignalnivåer: $U(s)/R(s) = F_{PID}(s)S(s)$

$$\begin{aligned} F_{PID}(s)S(s) &= \frac{F_{PID}(s)}{1 + L(s)} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2\alpha(s^2 + sa + 1)}{s(s + 2\alpha)} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{2\alpha}{s(s + 2\alpha)}} \\ &= \frac{\alpha^2(s^2 + sa + 1)}{(s + \alpha)^2} \end{aligned}$$

Skissa $|F_{PID}(j\omega)S(j\omega)|$, $\alpha = 5$, $a = 0.1$ (Brytpunkter: $\omega = 1, 5$)



10.11

a) För det återkopplade systemet gäller

$$G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kF(s)}{s(1+as)} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{kF(s)}{s(1+as)}} = \frac{kF(s)}{as^2+s+kF(s)} \equiv \frac{1}{(1+\tau s)^2}$$

Lös ut $F(s)$

$$k(1+\tau s)^2 F(s) = as^2 + s + kF(s)$$
$$F(s) = \frac{s(1+as)}{k(2\tau s + \tau^2 s^2)} = \frac{1}{k\tau} \cdot \frac{1+as}{2+\tau s}$$

b) Beräkna överföringsfunktion

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{U(s)}{Y(s)} \cdot \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{1}{(1+\tau s)^2} = \frac{s(1+as)}{k(1+\tau s)^2}$$

Vid stegformade börvärdesändring inträffar i allmänhet regulatorns maximala styrsignal vid tiden $t = 0$. För börvärdessteget $R(s) = r_0/s$ gäller

$$U(s) = \frac{r_0(1+as)}{k(1+\tau s)^2}$$

Begynnelsevärdessatsen ger

$$u(0) = \lim_{s\to\infty} s\,U(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{r_0}{k}\frac{s(1+as)}{(1+\tau s)^2} = \frac{r_0}{k}\frac{a}{\tau^2}$$
$$\tau = 4,\ r_0 = 0.3,\ a = 5,\ k = 0.1 \quad \Rightarrow \quad u(0) = 15/16$$
$$\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad u(0) = 15$$

Det snabbare systemet ($\tau = 1$) kräver betydligt högre styrsignaler.

c) Kretsöverföringen ges av

$$L(s) = G(s)F(s) = \frac{k}{s(1+as)} \cdot \frac{1+as}{k\tau(2+\tau s)} = \frac{1}{\tau s(2+\tau s)}$$
$$|L(j\omega_c)| = \frac{1}{\tau\omega_c\sqrt{4+\tau^2\omega_c^2}} = 1$$

Beräkna $\tau\omega_c$

$$1 = \tau^2\omega_c^2(4+\tau^2\omega_c^2)$$
$$\tau^2\omega_c^2 = -2+\sqrt{5} = 0.236$$

Ta fram fasmarginalen

$$\begin{aligned} \underline{/L(j\omega_c)} &= -90^\circ - \arctan(\tau\omega_c/2) \\ &= -90^\circ - \arctan(\sqrt{0.236/2}) = -103.7^\circ \end{aligned}$$

dvs $\varphi_m = 76.3^\circ$

d) Bandbredden ges av

$$|T(j\omega_b)| = |G_{ry}(j\omega_b)| = \frac{1}{1+(\tau\omega_b)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow\ \omega_b = \frac{1}{\tau}\big(\sqrt{2}-1\big)$$

dvs, bandbredden ökar 4 ggr

e) Litet τ ger ett snabbare system vilket kräver högre styrsignaler.

Den designade regulatorn ger konstanta stabilitetsmarginalerna oberoende av τ.

Högfrekvent modellosäkerhet beskrivs av den multiplikativa osäkerhetsfaktorn $\Delta_m(j\omega)$.
En hög bandbredd ger ett högt $|T(j\omega)|$ för höga frekvenser. Robusthetskravet $|T(j\omega)\Delta_m(j\omega)| < 1$ innebär därför att ett snabbt system ger sämre robusthet.

10.12

a) Otto Smith regulatorn

$$F_{\text{tot}}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{F(s)}{1 + \big[\hat{G}(s) - \hat{G}(s)e^{-s\hat{T}_d}\big]F(s)}$$

ger

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F_{\text{tot}}(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F_{\text{tot}}(s)G(s)e^{-sT_d}} \\ &= \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)\big[\hat{G}(s) - \hat{G}(s)e^{-s\hat{T}_d}\big] + F(s)G(s)e^{-sT_d}} \\ &= \big\{\hat{T}_d = T_d\big\} = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)\hat{G}(s) + F(s)\big[G(s) - \hat{G}(s)\big]e^{-sT_d}} \end{aligned}$$

b) För att få statisk förstärkning 1 införs integralverkan

$$F(s) = K_p\big(1 + \frac{1}{sT_i}\big)$$

Processmodell

$$\hat{G}(s) = G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{K_p\dfrac{1+sT_i}{sT_i} \cdot \dfrac{1}{1+s}e^{-s}}{1 + K_p\dfrac{1+sT_i}{sT_i} \cdot \dfrac{1}{1+s} + 0} = \frac{K_p(1+sT_i)e^{-s}}{s(s+1)T_i + K_p(1+sT_i)}$$

Låt $T_i = 1 \;\Rightarrow\; G_{ry}(s) = \dfrac{K_p e^{-s}}{s + K_p}$

Då $s \to 0$ fås LF-förstärkningen 1

Krav: $t_{5\%} \leq 2$. Eftersom dödtiden $T_d = 1$ så ska systemet utan dödtid ha stigtiden 1

$$e^{-K_p \cdot 1} = 0.05 \;\Rightarrow\; K_p \approx 3$$

dvs

$$F(s) = 3(1 + \frac{1}{s})$$

10.13

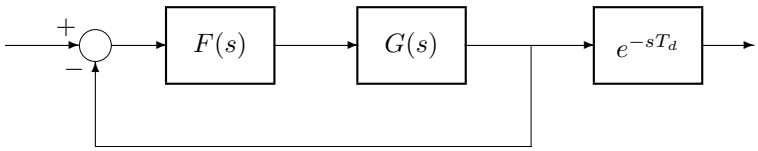
a) se Uppg. 9.13a

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)\big[G(s)e^{-sT_d} + \hat{G}(s)(1 - e^{-s\hat{T}_d})\big]} \\ &= \big\{\hat{T}_d = T_d\big\} = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)G(s) + F(s)\big[G(s) - \hat{G}(s)\big]e^{-sT_d}} \end{aligned}$$

b) Om processmodellen är exakt $\hat{G}(s) = G(s)$

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)G(s)e^{-sT_d}}{1 + F(s)G(s)}$$

Tidsfördröjningen har eliminerats i återkopplingsloopen



dvs länken $F(s)$ kan dimensioneras för $G(s)$ utan dödtid.

10.14

a) Bestäm överföringsfunktionen $G_{ry}(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$

$$Y(s) = R(s) \cdot \big(1 + \frac{1}{sT_i}\big)KG(s) - Y(s)\big(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\big)KG(s)$$

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\big(1 + \frac{1}{sT_i}\big)KG(s)}{1 + \big(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\big)KG(s)} \\ &= \frac{(1 + sT_i)KG(s)}{sT_i + (1 + sT_i + s^2T_iT_d)KG(s)} \end{aligned}$$

Fördel: referenssignalen deriveras inte, snabba variationer i r kan annars ge höga styrsignalspikar (t.ex. vid börvärdessteg)

b)

$$\begin{aligned} G_{ry}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = F_f(s)\,\frac{\big(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\big)KG(s)}{1 + \big(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\big)KG(s)} \\ &= F_f(s)\,\frac{\big(1 + sT_i + s^2T_iT_d\big)KG(s)}{sT_i + (1 + sT_i + s^2T_iT_d)KG(s)} \end{aligned}$$

För att få samma G_{ry} som i a)

$$F_f(s) = \frac{1 + sT_i}{1 + sT_i + s^2T_iT_d} = \{T_i = 4T_d\} = \frac{1 + s4T_d}{(1 + s2T_d)^2}$$

När man inför $F_f(s)$ kancelleras dubbelnollstället i $s = -\dfrac{1}{2T_d}$ och ersätts med ett enkelnollställe i $s = -\dfrac{1}{4T_d}$, (samma poler i båda fallen).

c)

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{F_f(s)K\big(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\big)}{1 + KG(s)\big(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\big)}$$

Eftersom $L(s) = KG(s)(1 + \dfrac{1}{sT_i} + sT_d)$ och komplementära känslighetsfunktionen $T(s) = \dfrac{L(s)}{1 + L(s)}$ fås

$$G_{ru}(s) = \frac{\frac{F_f(s)}{G(s)}L(s)}{1 + L(s)} = \frac{F_f(s)T(s)}{G(s)}$$

Antagande: vid höga frekvenser $T(j\omega) \to L(j\omega)$

$$G_{ru}(j\omega) \to F_f(j\omega)\frac{L(j\omega)}{G(j\omega)}$$

$$|G_{ru}(j\omega)|_{\omega\to\infty} = |F_f(j\omega)|_{\omega\to\infty}\frac{K|G(j\omega)|\omega T_d}{|G(j\omega)|}$$

Fall i) $F_f = 1$

$$|G_{ru}|_{HF} = K\omega T_d$$

Fall ii) F_f enligt b)

$$|G_{ru}|_{HF} = \frac{4\omega T_d}{4\omega^2 T_d^2}\,K\omega T_d = K$$

dvs, antalet nollställen nära $s = 0$ (jmf. b) är kritiskt med tanke på HF-egenskaperna.

10.15

$$\begin{aligned} F_{PID}(s) &= K_i\,\frac{1+2\zeta s\tau+(s\tau)^2}{s(1+s\tau/\beta)} \\ F_{PID_f}(s) &= K_i\,\frac{1+2\zeta s\tau+(s\tau)^2}{s\big(1+2\zeta s\tau/\beta+(s\tau/\beta)^2\big)} \end{aligned}$$

Båda regulatorerna har lågfrekvensasymptoten $\frac{K_i}{\omega}$ och brytpunkter $\frac{1}{\tau}$ och $\frac{\beta}{\tau}$

Bestäm $\max|F_{PID_f}(j\omega)|$ för $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ (eftersom β stort) dvs,

$$F_{PID_f}(j\omega) \approx K_i\,\frac{(j\omega\cdot\tau)^2}{(j\omega)\big(1+2\zeta j\omega\frac{\tau}{\beta}+(j\omega\frac{\tau}{\beta})^2\big)}$$

$$\begin{aligned} |F_{PID_f}(j\omega)|^2 &= K_i^2\,\frac{(\omega\tau)^4}{\omega^2\left[\big(1-(\frac{\omega\tau}{\beta})^2\big)^2+\big(2\zeta\frac{\omega\tau}{\beta}\big)^2\right]}\,, \qquad \text{inför } \omega_0 = \frac{\omega\tau}{\beta} \\ &= K_i^2\tau^2\beta^2\,\frac{\omega_0^2}{\big(1-\omega_0^2\big)^2+4\zeta^2\omega_0^2} = \frac{K_i^2\tau^2\beta^2\cdot\omega_0^2}{\omega_0^4+2\omega_0^2\,(2\zeta^2-1)+1} \end{aligned}$$

Hitta maximum: $\frac{\partial|F_{PID_f}|^2}{\partial\omega_0} = 0$

$$(K_i\tau\beta)^2\,\frac{2\omega_0\big(\omega_0^4+2\omega_0^2(2\zeta^2-1)+1\big)-\omega_0^2\big(4\omega_0^3+4\omega_0(2\zeta^2-1)\big)}{(\cdots)} = 0$$

$$2\omega_0\big\{\omega_0^4+2\omega_0^2(2\zeta^2-1)+1-\big(2\omega_0^4+2\omega_0^2(2\zeta^2-1)\big)\big\} = 0$$

$$1-\omega_0^4 = 0$$

$$\omega_0 = 1$$

dvs max inträffar för $\omega_0 = 1$, dvs $\omega = \frac{\beta}{\tau}$

$$\max|F_{PID_f}(j\omega)|^2 = (K_i\tau\beta)^2\cdot\frac{1}{0+4\zeta^2}$$

$$\Rightarrow\ \max|F_{PID_f}(j\omega)| = \frac{K_i\tau\beta}{2\zeta}$$

Jämför med att hitta maximum genom att titta på HF-asymptoten:

$$|F_{PID_f}(j\omega)|_{HF} = K_i \frac{\omega^2\tau^2}{\omega\dfrac{\omega^2\tau^2}{\beta^2}} = \frac{K_i\beta^2}{\omega}$$

Ur amplituddiagrammet, max inträffar vid $\omega = \beta/\tau$, dvs

$$\max|F_{PID_f}(j\omega)|_{HF} = K_i\tau\beta$$

Kompensera med -6 dB för "dubbelpol" (brytning -40 dB)

$$\max|F_{PID_f}(j\omega)| = \frac{K_i\tau\beta}{2}$$

detta motsvarar den exakta amplituden för $\zeta = 1$

10.16

a) Bestäm överförsingsfunktionen från börvärde till utsignal

$$Y = G\big(F_{rf}R + F(R-Y)\big)$$

dvs

$$G_{ry} = \frac{Y}{R} = \frac{GF_{rf} + GF}{1 + GF}$$

Välj F_{rf} så att $Y(s) = R(s)$, dvs $G_{ry} = 1$

$$GF_{rf} + GF = 1 + GF \;\Rightarrow\; F_{rf} = \frac{1}{G}$$

b) Låt $G = B/A,\ F = D/C,\ F_{rf} = \hat{A}/\hat{B}$ (modell av $1/G$)

$$\frac{Y}{R} = \frac{\hat{A}C + \hat{B}D}{AC + BD}\cdot\frac{B}{\hat{B}}, \quad \frac{U}{R} = \frac{\hat{A}C + \hat{B}D}{AC + BD}\cdot\frac{A}{\hat{B}}$$

För stabil framkoppling F_{rf} måste G:s nollställen vara stabila, dvs stabilt $\hat{B}$.
Dödtid i G innebär "negativ" dödtid i F_{rf} vilket inte går att realisera. För "normala" system gäller $G(\infty) = B(\infty)/A(\infty) = 0$, vilket medför att $|U/R| \to \infty$ för höga frekvenser.

c) Statisk framkoppling $F_{rf} = \dfrac{1}{G(0)} = 0.5$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{2}{(s+1)^2}\left(F_{rf} + 0.5\,\dfrac{s+1}{s}\right)}{1 + \dfrac{1}{s(s+1)}} = \frac{2s}{s+1}\cdot\frac{\left(F_{rf} + 0.5\,\dfrac{s+1}{s}\right)}{s^2+s+1}$$

$$F_{rf} = 0.5: \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$$F_{rf} = 0: \qquad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+1}{(s+1)(s^2+s+1)} \qquad \text{(ingen framkoppling)}$$

Vid framkoppling kommer nollstället i $s = -0.5$ snabba på insvängningen vid bärvärdesändringar.

11

Dimensionering av regulatorer på tillståndsform

Lösningar till övningsuppgifterna i detta kapitel levereras endast som handskrivna anteckningar. Beklagar denna olägenhet.

11.1 a) $\dot{x} = -x + u$

$\dot{y} = -2x + y + u$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

$$(s-1) Y(s) = -2 \frac{1}{s+1} U(s) + U(s)$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-1)(s+1)} U(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$$

b) Styrbarhet

$$\det(B \;\; AB) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore$ ej styrbart

Observerbarhet

$$\det \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$

$\therefore$ observerbart

c) Enligt tillståndsmodellen ges polerna av

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-1) = 0$$

$\therefore$ instabilt eftersom en pol hamnar i $s=1$.

Denna pol kancelleras i överföringsfunktionen vilket innebär att överföringsfunktionen ej beskriver hela dynamiken utan bara den både styr- och observerbara delen. Den instabila moden är således enligt b) ej styrbar, men observerbar.

d) Tillståndsåterkoppling går ej (kräver styrbarhet) observatör ok (kräver observerbarhet)

11.2 a) $\ddot{\theta} = u - v$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u - v$$

$$\det(sI - A + BL_u) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ l_\theta & s + l_\omega \end{bmatrix} = s^2 + l_\omega s + l_\theta =$$

$$= (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha + \alpha^2 \qquad \therefore\ l_\omega = 2\alpha \quad l_\theta = \alpha^2$$

$$s^2\theta = -l_\theta \theta - l_\omega s\theta + K_r \theta_r$$

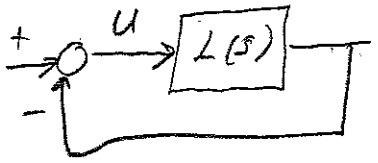
$$\theta = \frac{K_r}{s^2 + l_\omega s + l_\theta}\theta_r \qquad \theta(0) = \theta_r(0) \Rightarrow K_r = l_\theta = \alpha^2$$

$$\underline{\underline{u = \alpha^2(\theta_r - \theta) - 2\alpha\omega}}$$

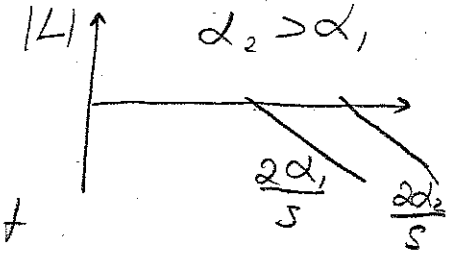
b) se nästa sida

c) $\theta_r = 0$, $v = 0$

$$U(s) = -(2\alpha s + \alpha^2)\theta(s) = -\underbrace{(2\alpha s + \alpha^2)\frac{1}{s^2}}_{L(s)} U(s)$$



$$L(s) \to \frac{2\alpha}{s} \quad \text{då} \quad s \to \infty$$

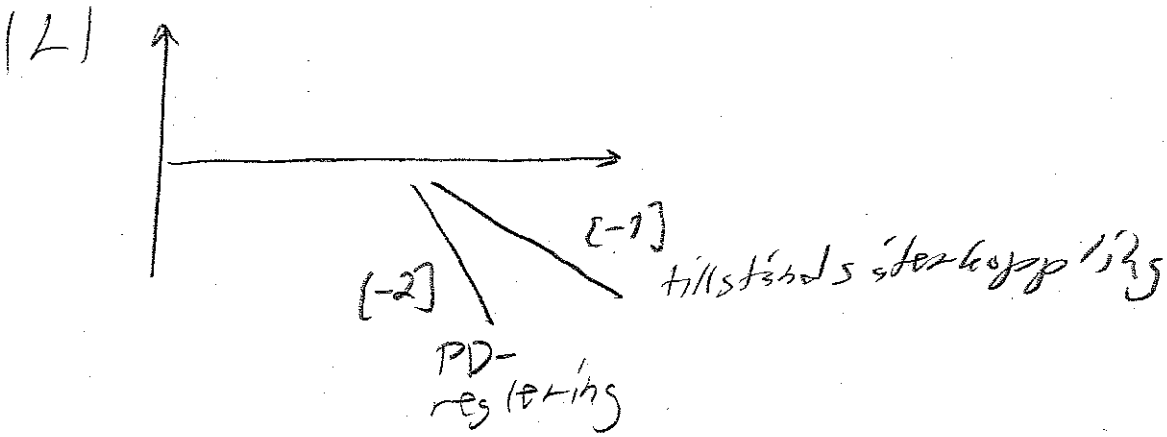


stabilitet vid modellosäkerhet $\Delta_m(s)$ garanteras då $|T\Delta_m| < 1$

$|T| \to |L|$ då $s \to \infty \Rightarrow$ stort Δ_m för högre frekvenser kräver litet $|T| \Rightarrow$ därmed litet $|L|$. $|L|$ ökar då systemets snabbhet (α) ökar, vilket ökar risken för instabilitet pga modellosäkerhet.

d) Vid tillståndsåterkoppling sätter [-1]-lutning för $L(s)$ vid höga frekvenser $\left(\frac{2\alpha}{s}\right)$ medan en PD-regulator ger [-2]-lutning eftersom

$$L(s) = \frac{K_p(1+s\tau)}{s^2(1+s\tau/\beta)} \rightarrow \frac{K_p\beta}{s^2} \quad \text{då } s \to \infty$$



$\therefore$ $|L|$ minskar mycket snabbare för högre frekvenser vid PD-reglering jämfört med tillstånds-återkoppling, vilket är positivt med tanke på robustheten för högfrekventa modellosäkerheter.

b)

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2}U(s) \Rightarrow U(s) = \frac{K_r s^2}{(s+\alpha)^2}\Theta_r(s)$$

$$u(0) = \lim_{s\to\infty} s\,U(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{K_r s^2}{(s+\alpha)^2}\underbrace{\left(\frac{1}{s}\right)}_{\Theta_r(s)} = K_r = \alpha^2$$

11.3

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+0.1)} U(s)$$

Tillståndsmodell

$$sY(s) = \Omega(s)$$

$$(s+0.1)\Omega(s) = U(s)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} y \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} y \\ \omega \end{bmatrix}$$

a) Tillståndsåterkoppling $L_u = [l_y \;\; l_\omega]$

$$\det(sI - A + BL_u) = \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[l_y \;\; l_\omega]\right) =$$

$$= \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ l_y & s+0.1+l_\omega \end{bmatrix} = s^2 + (0.1 + l_\omega)s + l_y = (s+\alpha)^2$$

$$= s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 \Rightarrow l_y = \alpha^2 \quad l_\omega = 2\alpha - 0.1$$

$$G_{ry}(0) = C(-A+BL_u)^{-1}BK_r = 1 \quad \Rightarrow K_r/l_y = 1, \quad K_r = l_y = \alpha^2$$

b) Kretsöverföringen $L(s) = L_u(sI-A)^{-1}B =$

$$= [\alpha^2 \;\; 2\alpha - 0.1]\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+0.1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\alpha^2 \;\; 2\alpha - 0.1]\frac{\begin{bmatrix} s+0.1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}}{s^2+0.1s}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\alpha^2 + (2\alpha - 0.1)s}{s(s+0.1)} \begin{cases} \nearrow \dfrac{\alpha^2}{s} & s \to 0 \\ \searrow \dfrac{2\alpha - 0.1}{s} & s \to \infty \end{cases}$$

α	$L(s)_{s\to 0}$	$L(s)_{s\to\infty}$
0.1	0.01/s	0.1/s
0.5	0.25/s	0.9/s

c) Vid låga frekvenser ger större $L(j\omega)$, motsvarande ett högre α, en lägre känslighetsfunktion $|S(j\omega)| \approx 1/|L(j\omega)|$ dvs bättre prestanda.

Vid höga frekvenser ger lägre $L(j\omega)$, motsvarande ett mindre α, en lägre komplementär känslighetsfunktion $|T(j\omega)| \approx |L(j\omega)|$, dvs bättre robusthet och mindre styrsignalaktivitet (mindre K_r).

11.4

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$\dot{x} = u \qquad y = x$$

a) $u = -l_u x + k_r r$

$$\det(sI - A + BL_u) = \det(s + l_u) = s + 1 \Rightarrow l_u = 1$$

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL_u)^{-1} B k_r = \frac{k_r}{s+1} \qquad G_{ry}(0) = 1 \Rightarrow k_r = 1$$

b) $y_m = y - w$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y_m - C\hat{x}) = u + Ky_m - K\hat{x}$$

$$u = -l_u \hat{x} + k_r r = -\hat{x} + r$$

Regulatorn insatt i observatören ger

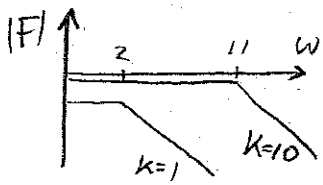
$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} + r + Ky_m - K\hat{x} = -(1+K)\hat{x} + Ky_m + r$$

$$u = -\hat{x} + r$$

Laplacetransformering med $r = 0$ ger

$$\hat{X}(s) = \underbrace{\frac{K}{s + 1 + K}}_{F(s)} Y_m(s) = \frac{\frac{K}{1+K}}{1 + \frac{1}{1+K} s} Y_m(s)$$

$$U(s) = -\hat{X}(s) \quad \left(\text{OBS! } U(s) = -F(s) Y_m(s)\right)$$

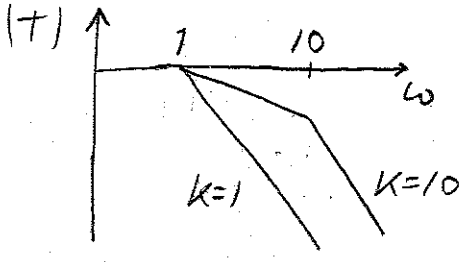


c) $$L(s) = G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1+K)}$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K}{s^2 + (1+K)s + K} = \frac{K}{(s+1)(s+K)} =$$

$$= \frac{1}{(1+s)(1+s/K)}$$

tillstånds-återkopplingspol observatörspol



K=1 ger mer lågpassfiltrering och därmed bättre kompensering av mätstörningar.

11.5 a) $x = [\theta \ \omega]^T$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

b) $$\theta = \frac{1}{s(s+1)} u = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) u$$

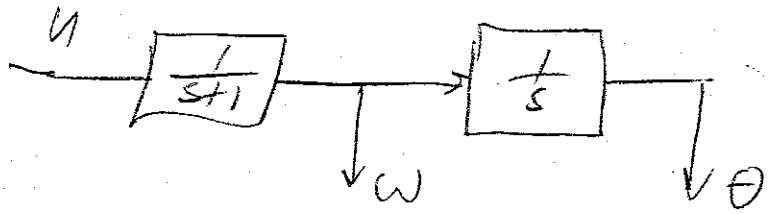
$$\omega = \frac{1}{s+1} u$$

Systemet kan beskrivas på diagonal tillstånds form

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi$$

Av denna tillstånds form framgår att båda modena (polerna) är styrbara medan endast θ kan observera båda modena vilket också är naturligt eftersom



Blockschemat visar att u påverkar bägge modterna medan ω observeras integralmoden.
Alternativ ansats: Undersök $\det(B\ AB)$ $\det\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$

c) Observatör $\theta = (1\ 0)\,x$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(\theta - C\hat{x}) =$$
$$= (A-KC)\hat{x} + Bu + K\theta$$

$$\det(sI - A + KC) = \det\begin{bmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s+1 \end{bmatrix} =$$
$$= (s+k_1)(s+1) + k_2 = s^2 + (1+k_1)s + k_1 + k_2$$
$$= (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$$ (önskad observatördynamik)

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = \alpha^2 \\ 1 + k_1 = 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{aligned} k_1 &= 2\alpha - 1 \\ k_2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} = (sI - A + KC)^{-1}(Bu + K\theta) = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -k_2 & s+k_1 \end{bmatrix}}{(s+\alpha)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \theta$$

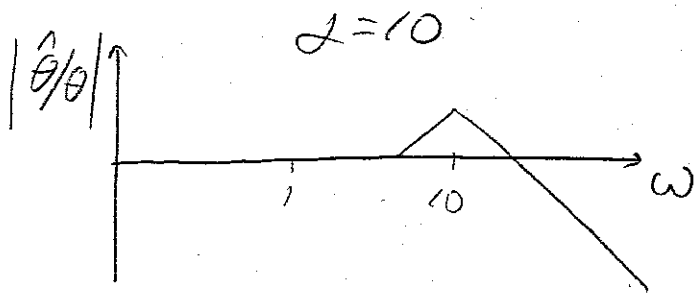
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(2\alpha-1)(s+1) + \alpha^2 - 2\alpha + 1}{(s+\alpha)^2}\,\theta + \dfrac{1}{(s+\alpha)^2}\,u \\[2ex] \dfrac{-k_1k_2 + sk_2 + k_1k_2}{(s+\alpha)^2}\,\theta + \dfrac{s+k_1}{(s+\alpha)^2}\,u \end{bmatrix}$$

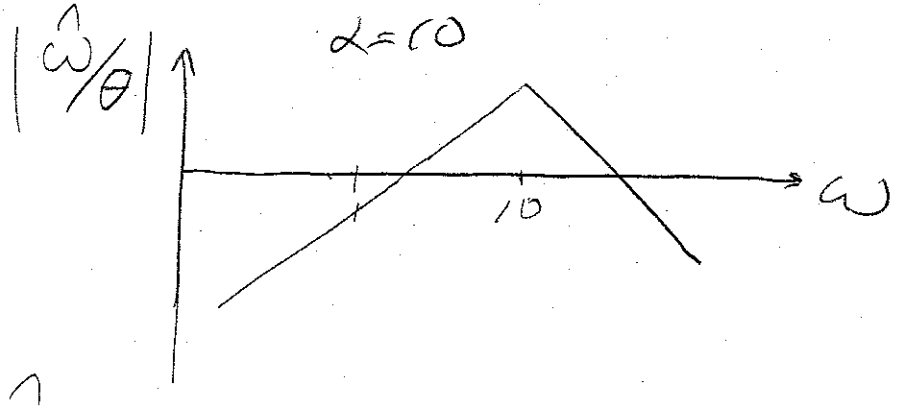
$$\hat{\theta} = \frac{(2\alpha-1)s+\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\theta + \frac{1}{(s+\alpha)^2}u =$$

$$= \frac{1+s/\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}}{(1+s/\alpha)^2}\theta + \frac{1/\alpha^2}{(1+s/\alpha)^2}u$$

$$\hat{\omega} = s\frac{(\alpha-1)^2}{(s+\alpha)^2}\theta + \frac{s+2\alpha-1}{(s+\alpha)^2}u$$

$$= s\frac{(1-1/\alpha)^2}{(1+s/\alpha)^2}\theta + \frac{2\alpha-1}{\alpha^2}\frac{1+s/(2\alpha-1)}{(1+s/\alpha)^2}u$$





$\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ ~ LP filter med bandbredd ~ α

$\frac{\hat{\omega}}{\theta}$ ~ Deriverande filter som begränsar vid $\omega=\alpha$

11.6

$$\Theta(s) = \frac{1}{s}\Omega(s) \qquad \Omega(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot\theta\\ \dot\omega\end{bmatrix}}_{\dot x} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{u}_{u} \qquad y_m = \underbrace{[1\ \ 0]}_{C}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix} - w$$

a) $\det(sI - A + K_y C) = \det\left(\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_\theta\\ k_\omega\end{bmatrix}[1\ 0]\right) =$

$= \det\begin{bmatrix}s+k_\theta & -1\\ k_\omega & s\end{bmatrix} = s^2 + k_\theta s + k_\omega = (s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$

$k_\theta = 2\alpha \qquad k_\omega = \alpha^2$

b) $\dot{\hat x} = A\hat x + Bu + K_y(y_m - C\hat x) \qquad y_m = \theta_m$

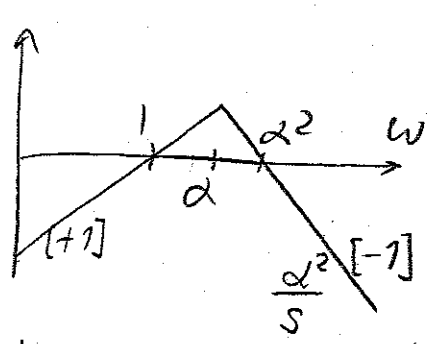
$\hat x(s) = (sI - A + K_y C)^{-1} K_y Y_m(s)$

$$\begin{bmatrix}\hat\theta(s)\\ \hat\Omega(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s+k_\theta & -1\\ k_\omega & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}k_\theta\\ k_\omega\end{bmatrix}\theta_m(s) = \frac{\begin{bmatrix}s & 1\\ -k_\omega & s+k_\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_\theta\\ k_\omega\end{bmatrix}}{(s+\alpha)^2}\theta_m(s)$$

$$= \begin{bmatrix}k_\theta s + k_\omega\\ -k_\omega k_\theta + k_\omega s + k_\theta k_\omega\end{bmatrix}\frac{1}{(s+\alpha)^2}\theta_m(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{2\alpha s + \alpha^2}{(s+\alpha)^2}\\[2ex] \dfrac{\alpha^2 s}{(s+\alpha)^2}\end{bmatrix}\theta_m(s)$$

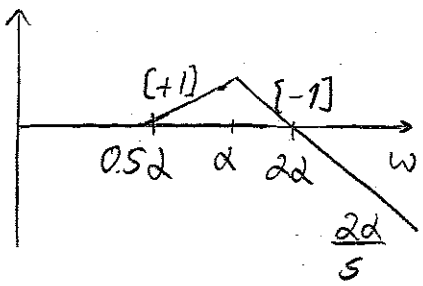
$$= \begin{bmatrix}\dfrac{1 + s/(0{,}5\alpha)}{(1+s/\alpha)^2}\\[2ex] \dfrac{s}{(1+s/\alpha)^2}\end{bmatrix}\theta_m(s)$$

$\dfrac{|\hat\Omega(j\omega)|}{|\theta_m(j\omega)|}$



Deriverande + LP-filter

$\dfrac{|\hat\theta(j\omega)|}{|\theta_m(j\omega)|}$



LP-filter

Högfrekvens asymptoten ökar med α (minskad LP-filtrering, högre bandbredd)

c) $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K_y(Cx - w - C\hat{x}) =$

$= A\tilde{x} - K_y C\tilde{x} + K_y w$

$\tilde{x}(s) = (sI - A + K_y C)^{-1} K_y W(s)$

$\therefore \quad \dfrac{\theta(s) - \hat{\theta}(s)}{W(s)} = \dfrac{\hat{\theta}(s)}{\theta_m(s)} \qquad \dfrac{\Omega(s) - \hat{\Omega}(s)}{W(s)} = \dfrac{\hat{\Omega}(s)}{\theta_m(s)}$

Dessa överföringsfunktioner framgår därför av uppgift b)

12

Tidsdiskreta regulatorer

Endast svar och lösningar till vissa av övningsuppgifterna i detta kapitel levereras som handskrivna anteckningar. Beklagar denna olägenhet.

12.1

a) $\dfrac{1.896}{z-0.368}$

b) $\dfrac{1.1804}{z-0.6065}$

c) $\dfrac{0.74}{z-0.01832}$

d) $\dfrac{0.015(z+1)}{(z-1)^2}$

e) $\dfrac{0.413(z+1)}{z^2-0.1415z+1}$

f) $\dfrac{0.4395(z+0.875)}{(z-1)(z-0.6703)}$

g) $\dfrac{3}{z-1} + \dfrac{0.34z+0.242}{z^2-0.786z+0.368}$

12.2

$G_d(z) = \dfrac{0.0099}{z-0.980}$ $(h=0.1)$ $\qquad G_d(z) = \dfrac{0.04758}{z-0.905}$ $(h=0.5)$

12.3

a) $$G_{ry}(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{Ke^{-sT_d}}{1+Ts}\,\frac{1+Ts}{K(1+s\lambda T-e^{-sT_d})}}{1+\frac{e^{-sT_d}}{1+s\lambda T-e^{-sT_d}}} =$$

$$= \frac{e^{-sT_d}}{1+s\lambda T-e^{-sT_d}+e^{-sT_d}} = \frac{e^{-sT_d}}{1+s\lambda T}$$

b)

$$K(1+s\lambda T-e^{-sT_d})U(s) = (1+sT)E(s)$$

$$K(u(t)+\lambda T\dot{u}(t)-u(t-T_d)) = e(t)+T\dot{e}(t)$$

c)

$$u(t) = u(t-T_d) - \lambda T\dot{u}(t) + \frac{1}{K}e(t) + \frac{T}{K}\dot{e}(t)$$

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t)-u(t-h)}{h} \qquad \dot{e}(t) \approx \frac{e(t)-e(t-h)}{h}$$

Differensapproximationen insatt i reglatorekvationen ger

$$u(t) = u(t-T_d) - \frac{\lambda T}{h}(u(t)-u(t-h)) + \frac{1}{K}e(t) + \frac{T}{Kh}(e(t)-e(t-h))$$

$$u(t) = \frac{h}{h+\lambda T}\left[u(t-T_d) + \frac{\lambda T}{h}u(t-h) + \frac{h+T}{Kh}e(t) - \frac{T}{Kh}e(t-h)\right]$$

Låt $t=kh$ och $T_d = ch$ $\Rightarrow$

$$u(kh) = \frac{h}{h+\lambda T}\left[u(kh-ch) + \frac{\lambda T}{h}u(kh-h) + \frac{h+T}{Kh}e(kh) - \frac{T}{Kh}e(kh-h)\right]$$

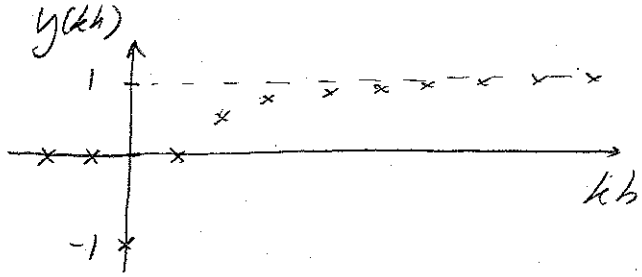
Denna differensekvation kan enkelt programmeras in i en dator och på det sättet implementera den önskade reglerfunktionen.

12.4

$$y(kh) - 0.5\,y(kh-h) = -u(kh) + 1.5\,u(kh-h)$$

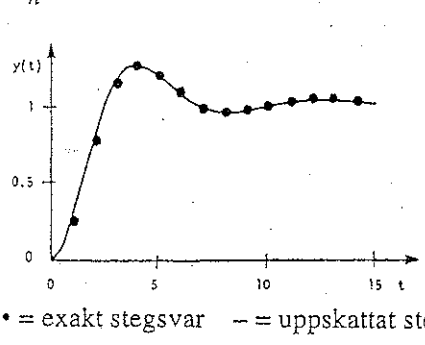
$$y(0) = -1$$

$$y(kh) = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \qquad k > 0$$



12.5

$\omega_n = 0.858 \qquad \zeta = 0.404$



• = exakt stegsvar – = uppskattat stegsvar med hjälp av ζ och ω_n

12.6

a) $$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = 2{,}5\left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right)$$

$$G_d(z) = 2{,}5\left(\frac{2(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} - \frac{(1-e^{-h})(1+e^{-h})}{z-e^{-2h}}\right)$$

$$= 2{,}5(1-e^{-h})\,\frac{2z - 2e^{-2h} - z(1+e^{-h}) + e^{-h} + e^{-2h}}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})}$$

$$= 2{,}5(1-e^{-h})\,\frac{(1-e^{-h})z + e^{-h}(1-e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})} =$$

$$= \frac{2{,}5(1-e^{-h})^2(z+e^{-h})}{(z-e^{-h})(z-e^{-2h})}$$

$$h = \ln 2 \Rightarrow G_d(z) = \frac{0{,}625(z+0{,}5)}{(z-0{,}5)(z-0{,}25)}$$

polerna $\rightarrow$ $z=1$ då $h \rightarrow 0$

— " — $\rightarrow$ $z=0$ då $h \rightarrow \infty$

b) $\omega = 0$ $\quad G_d(e^{j\omega h}) = G_d(1) = \dfrac{2.5\,(1-e^{-h})^2(1+e^{-h})}{(1-e^{-h})(1-e^{-h})(1+e^{-h})} = 2.5$

$$G(j\omega) = G(0) = 2.5 = G_d(1)$$

$\omega = \pi/h$ $\quad G_d(e^{j\omega h}) = G_d(-1) = \dfrac{2{,}5(1-e^{-h})^2(-1+e^{-h})}{(-1-e^{-h})(-1-e^{-2h})}$

$$= -\frac{2{,}5(1-e^{-h})^3}{(1+e^{-h})(1+e^{-2h})} \longrightarrow 0 \text{ då } h \rightarrow 0$$

$$G(j\omega) = G(\infty) = 0 \text{ då } h = 0$$

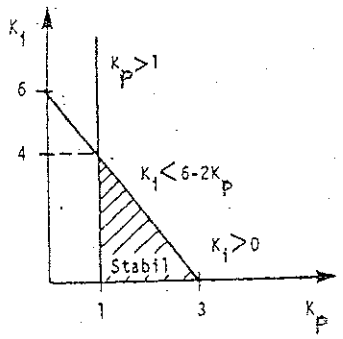
$$\therefore \left|G_d(e^{j\omega h})\right|_{\omega=\frac{\pi}{h}} \rightarrow G(\infty) = 0 \text{ då } h \rightarrow 0$$

12.7 $h < 2/0.96 = 2.08$

12.8

a) $K_i < 6 - 2K_p$
$K_p > 1$
$K_i > 0$

b)



12.9

a) $G(s) = \frac{4}{s+1} \cdot \frac{4}{s+2} = \frac{16}{s+1} - \frac{16}{s+2}$

$$G_d(z) = \frac{16(1-e^{-h})}{z-e^{-h}} - \frac{8(1-e^{-2h})}{z-e^{-2h}} \qquad (h = \ln 2)$$

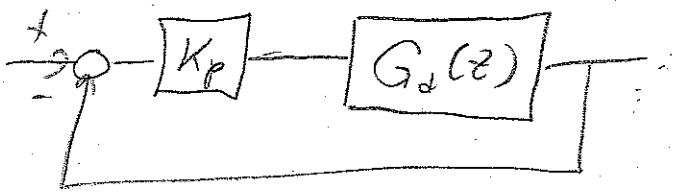
$$= \frac{16(1-1/2)}{z-1/2} - \frac{8(1-1/4)}{z-1/4} = \frac{8}{z-0.5} - \frac{6}{z-0.25} =$$

$$= \frac{8z-2-6z+3}{(z-0.5)(z-0.25)} = \frac{2z+1}{z^2-0.75z+0.125}$$

polerna $\nearrow 0$ då $h \to \infty$

$\searrow 1$ då $h \to 0$

b)



KE $1 + K_p G_d(z) = 0$

$$z^2 - 0.75z + 0.125 + K_p(2z+1) = z^2 - (0.75 - 2K_p)z + \overbrace{}^{K_p + 0.125}$$

$$= (z-\alpha)^2 = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2$$

$K_p + 0.125 = \alpha^2$ $\qquad K_p = \alpha^2 - 0.125$

$0.75 - 2K_p = 2\alpha$ $\qquad 2\alpha^2 - 0.25 + 2\alpha - 0.75 = 0$

$$\alpha^2 + \alpha - 0.5 = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{0.25 + 0.5} =$$

$$= (\sqrt{3} - 1)/2 \approx 0.35$$

$$K_p = 0.35^2 - 0.125$$

12.10

a) $G(s) = e^{-sT_d}$ $\quad h = T_d \Rightarrow G_d(z) = z^{-1}$

$$F(s) = K_p + \frac{K_p/T_i}{s} \Rightarrow F_d(z) = K_p + \frac{K_p T_d/T_i \, z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$$L_d(z) = G_d(z) F_d(z) = K_p \frac{1 + \left(\frac{T_d}{T_i} - 1\right) z^{-1}}{1 - z^{-1}} z^{-1}$$

b) $T_i = T_d \Rightarrow L_d(z) = K_p \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{K_p}{z - 1}$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G_{ry}(z) = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)} = \frac{K_p}{z - (1 - K_p)}$$

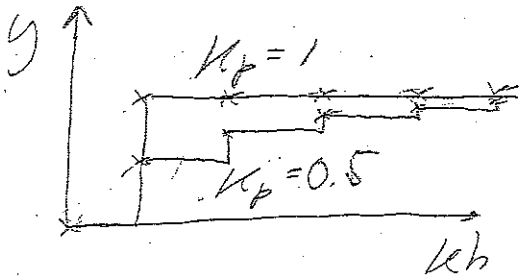
polplacering $\quad z = 1 - K_p = \begin{cases} 0.5 & K_p = 0.5 \\ 0 & K_p = 1 \end{cases}$

Differensekv.

$$y(kh + h) = (1 - K_p) y(kh) + K_p r(kh)$$

$y(kh)$ $K_p = 0.5$	$y(kh)$ $K_p = 1$
0	0
0.5	1
0.75	1
0.875	1

$r(kh) = 1 \quad k > 0$



c) $$L_d(e^{j\omega h}) = \frac{K_p}{e^{j\omega h} - 1} = \frac{K_p}{\cos\omega h + j\sin\omega h - 1} =$$

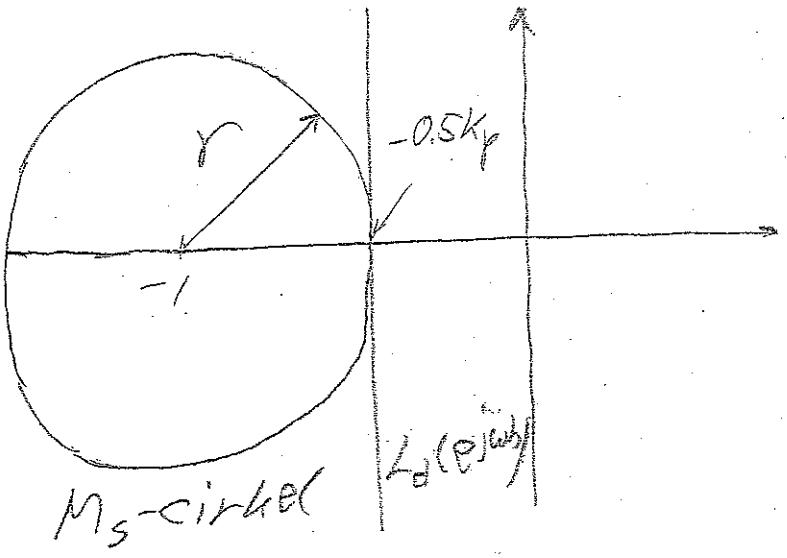
$$= K_p \frac{\cos\omega h - 1 - j\sin\omega h}{(\cos\omega h - 1)^2 - j^2 \sin^2\omega h} = K_p \frac{\cos\omega h - 1 - j\sin\omega h}{\underbrace{\cos^2\omega h + \sin^2\omega h}_{1} + 1 - 2\cos\omega h} =$$

$$= -K_p \frac{1 + \cos\omega h + j\sin\omega h}{2(1 - \cos\omega h)} = -\frac{K_p}{2} - j\frac{K_p \sin\omega h}{1 - \cos\omega h}$$

För små ω gäller $\frac{\sin\omega h}{1 - \cos\omega h} \approx \frac{\omega h}{1 - 1 + \frac{(\omega h)^2}{2}} = \frac{2}{\omega h}$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} L_d \to \begin{matrix} -\infty & \omega \to 0^+ \\ +\infty & \omega \to 0^- \end{matrix}$$

Nyquist diagram



$$r = 1 - 0.5K_p$$

$$M_s = \frac{1}{r} = \frac{1}{1-0.5K_p}$$

d) $K_p = 0.5 \Rightarrow M_s = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} \approx 1.33$

$K_p = 1 \Rightarrow M_s = \frac{1}{1-0.5} = 2$

Ökad snabbhet (större K_p) ger sämre stabilitetsmarginal (ökad M_s)

12.11

a) $y(k+1) = 0.905\,y(k) + 0.190\,u(k)$

z-transformering $\Rightarrow$

$$zY(z) = 0.905\,Y(z) + 0.190\,U(z)$$

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.190}{z-0.905} = \frac{2(1-0.905)}{z-0.905}$$

$$= \frac{2(1-\alpha)}{z-\alpha} \qquad \alpha = e^{-h/T} = 0.905$$

$$G(s) = \frac{2}{1+sT} \qquad T = -\frac{h}{\ln 0.905} \approx 10h$$

$$h = \frac{1}{100} = 0.01 \Rightarrow T \approx 0.1$$

b) $h = \frac{1}{300} \Rightarrow G_d(z) = \frac{2(1-e^{-\frac{1}{300\cdot 0.1}})}{z-e^{-\frac{1}{300\cdot 0.1}}} =$

$$= \frac{0.0656}{z-0.967} \triangleq \frac{b}{z-a}$$

Ändra $a = 0.967$, $b = 0.0656$

$N_{step} = 150$ (3 gånger flera samples per tidskonstant)

c) $L_d(z) = \frac{K_p b}{z-a} = \frac{3b}{z-a}$

KE $1 + A_m L_d(z) = 0 \Rightarrow$ rot på stabgränsen

$$z - a + A_m 3b = 0 \Rightarrow z = a - A_m 3b = -1$$

(ökad förstärkning $\Rightarrow$ roten passerar $z=-1$)

$$A_m = \frac{1+a}{3b} = \begin{cases} 3.3 & f_s = 100 \\ 10 & f_s = 300 \end{cases}$$

12.12 a) $y(kh+h) = a\,y(kh) + b\,u(kh)$

z-transformering $\Rightarrow$

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{0.190}{z-0.905} = \frac{2(1-0.905)}{z-0.905}$$

$$= \frac{2(1-e^{-h/T})}{z-e^{-h/T}} \qquad h = 0.01 \qquad T = 0.1$$

$$G(s) = \frac{2}{1+Ts} = \frac{2}{1+0.1s}$$

b)

```
u1 = 0;
for k=1:Nstep+1
    u(k)=...
    y(k+1)=a*y(k)+b*(u1+v0);
    u1 = u(k);
end
```

c) $F(s) = \frac{5}{s} + 0.25 \qquad F_d(z) = \frac{0.05z^{-1}}{1-z^{-1}} + 0.25$

$$= \frac{0.25 - 0.2z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$u(kh) = F_d(z)\,e(kh) \qquad e(kh) = r_0 - y(kh)$

$u(kh) = u(kh-h) + 0.25\,e(kh) - 0.2\,e(kh-h)$

Program kod

```
u1=0;
e1=0;
for k=1:Nstep+1
    e(k)= r0- y(k);
    u(k)= u1 + 0.25*e(k) - 0.2*e1;
    y(k+1) = a*y(k) + b*(u1+v0);
    u1=u(k); e1=e(k);
end
```

12.13

a) $$F(s) = \frac{K_\infty}{1 - F_s(s)} \Rightarrow F(s) - K_\infty = F(s)F_s(s)$$

$$F_s(s) = 1 - \frac{K_\infty}{F(s)} = 1 - \frac{F(\infty)}{3(s+0.5)/s} = 1 - \frac{3s}{3(s+0.5)} = \frac{0.5}{s+0.5}$$

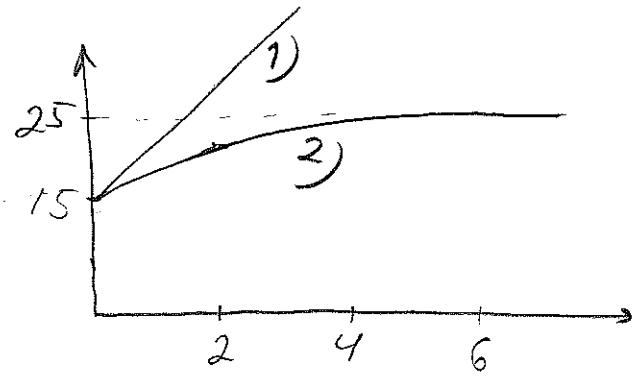
b) Fall 1 $\quad e(t) = 5\sigma(t) \Rightarrow U(s) = F(s)E(s) = \frac{3(s+0.5)}{s}\frac{5}{s}$

$$= \frac{15}{s} + \frac{7.5}{s^2} \Rightarrow u(t) = (15 + 7.5t)\sigma(t)$$

Fall 2 $\quad u_s = 10 \Rightarrow U(s) = \frac{5F(\infty)}{s} + F_s(s)\frac{10}{s} =$

$$= \frac{5\cdot 3}{s} + \frac{0.5\cdot 10}{(s+0.5)s} = \frac{15}{s} + \frac{10}{s} - \frac{10}{s+0.5}$$

$$\Rightarrow u(t) = (25 - 10e^{-0.5t})\sigma(t) \to 25\sigma(t)$$



I fall 1 integreras styrsignalen upp medan styrsignalen är begränsad i fall 2. Om $r(t)$ återgår till säg $r=0$ så tar det lång tid att integrera bort felet i fall 1.

Jmf Fig 12.18 i läroboken.