

# *Reglerteknikens grunder*

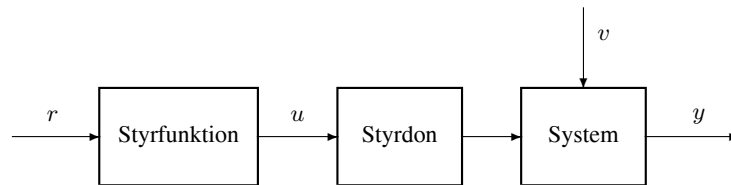
*Formelsamling*

Bengt Lennartson

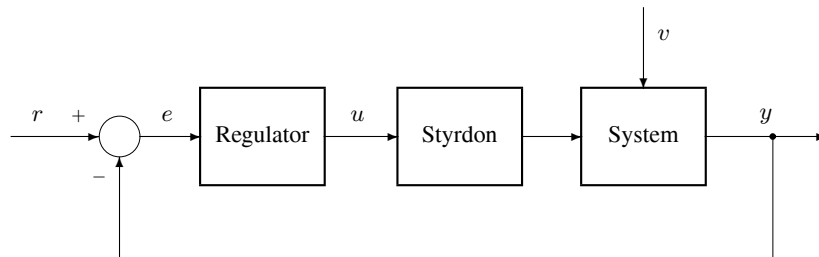


# 1 Introduktion

## Öppen styrning



## Återkopplad reglering



- $y$  = processens utsignal
- $u$  = styrsignal (styrfunktionens utsignal)
- $v$  = processtörning (laststörning)
- $r$  = referenssignal (börvärde)
- $e$  = reglerfel ( $r - y$ )

## 2 Linjära modeller för dynamiska system

Laplacetransformen

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Linjär differentialekvation

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t)$$

Överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Viktfunktion ( $Y(s) = G(s)U(s)$ )

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

Tabell 1: Viktiga egenskaper för Laplacetransformen

---

Superposition	$\mathcal{L}\{a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)\} = a_1 Y_1(s) + a_2 Y_2(s)$
Derivering	$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$ $\mathcal{L}\{y^{(k)}\} = s^k Y(s) - s^{k-1}y(0) - s^{k-2}y^{(1)}(0) - \dots - y^{(k-1)}(0)$
Integration	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}Y(s)$
Begynnelsevärdessatsen	$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$
Slutvärdessatsen	$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$ (Förutsättning: $y(\infty)$ existerar)
Fördröjningssatsen	$\mathcal{L}\{y(t - T)\sigma(t - T)\} = e^{-sT}Y(s)$
Dämpningssatsen	$\mathcal{L}\{e^{-at}y(t)\} = Y(s + a)$
Faltningintegralen	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y_1(\tau)y_2(t - \tau) d\tau\right\} = Y_1(s)Y_2(s)$

---

Tabell 2: Vanligt förekommande Laplacetransformpar

$y(t)$ ( $y(t) = 0 \quad t < 0$ )	$Y(s)$
$\delta(t)$	1
$\sigma(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{m-1}e^{-at}}{(m-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^m}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

### ***Tidsförlopp vid avvikelse från arbetspunkt***

För ett dynamiskt (stabilt) system

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

gäller enligt slutvärdessatsen, då insignalen är konstant  $u(t) = u_0$ , att

$$y(t) \rightarrow y_0 = G(0)u_0$$

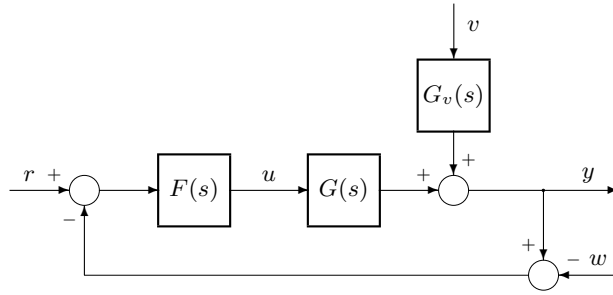
Då insignalen avviker från denna arbetspunkt, d.v.s. då  $u(t) = u_0 + \Delta u(t)$ , blir

$$\Delta Y(s) = G(s)\Delta U(s)$$

och

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t) = G(0)u_0 + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\Delta U(s)\}$$

## Återkopplat system



Reglerfelet

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

*Kretsöverföring*  $L(s)$  = den öppna överföringsfunktion som erhålls då man går ett varv runt i återkopplingsslungan och multiplicerar med  $-1$ . För ovanstående återkopplade system blir därför

$$L(s) = G(s)F(s)$$

*Direktkoppling* = överföringsfunktionen från insignal direkt till utsignal utan hänsyn taget till återkopplingen.

Överföringsfunktion för återkopplat system

$$\frac{\text{direktkoppling}}{1 + \text{kretsöverföring}}$$

I figuren ovan gäller därför att

$$G_{ry}(s) = G_{wy}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \qquad G_{vy}(s) = \frac{G_v(s)}{1 + L(s)}$$

$$G_{ru}(s) = G_{wu}(s) = \frac{F(s)}{1 + L(s)} \qquad G_{vu}(s) = -\frac{G_v(s)F(s)}{1 + L(s)}$$

där  $Y(s) = G_{ry}(s)R(s)$ ,  $Y(s) = G_{wy}(s)W(s)$  etc, d.v.s. indexen motsvarar insignal följt av utsignal.

*Kvarstående felet*, då referenssignalen är ett steg  $R(s) = r_0/s$ , blir för ovanstående återkopplade system

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t) = (1 - G_{ry}(0))r_0 = \frac{r_0}{1 + L(0)}$$

## Regulatorer

P-regulator

$$F(s) = K_p$$

PI-regulator

$$F(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

### 3 Tillståndsmodeller

Linjär tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Poler

$$\det(sI - A) = 0$$

Olinjär tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

#### *Linjärisering*

Arbetspunkt  $(x_0, u_0, y_0)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= f(x_0, u_0) \quad (\text{oftast gäller att } \dot{x}_0 = 0) \\ y_0 &= g(x_0, u_0)\end{aligned}$$

Linjäriserad modell kring arbetspunkten

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}$$

där

$$\Delta x(t) = x(t) - x_0, \quad \Delta u(t) = u(t) - u_0, \quad \Delta y(t) = y(t) - y_0$$

och

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$

De partiella derivatorna har följande elementvisa tolkning

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

**Tillståndstransformation  $\xi = Tx$**

$$\dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{B}u$$

$$y = \bar{C}\xi + Du$$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}$$

**Från överföringsfunktion till tillståndsmodell**

$$G(s) = \frac{b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} + d$$

**Styrbar kanonisk form**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1} \ b_n] x(t) + d u(t)$$

**Observerbar kanonisk form**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] x(t) + d u(t)$$

$$G(s) = \frac{g_1}{s - p_1} + \dots + \frac{g_n}{s - p_n} + d = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{s - p_i} + d$$

**Diagonalform**

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1] x(t) + d u(t)$$



## Tidssvar för linjär tillståndsmodeller

Lösning av tillståndsekvation för godtycklig insignal

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau) d\tau$$

Övergångsmatrisen

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Några regler för övergångsmatrisen

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = I$$

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(\tau)\Phi(t)$$

Tillståndsupdatering vid styckvis konstant insignal  $u(kh + \tau) = u(kh)$ ,  $0 \leq \tau < h$

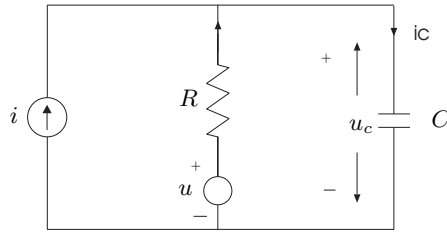
$$x(kh + h) = A_d x(kh) + B_d u(kh)$$

där

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} = \exp\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h\right)$$

## 4 Dynamiska modeller för tekniska system

### Första ordningens flödesprocesser



- Elektrisk krets med flödeskälla  $i$  och intensitetskälla  $u$

$$C \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{R} u_c = i + \frac{1}{R} u$$

- Tank med fritt utflöde (endast flödeskälla  $\Delta q$ )

$$A \frac{\Delta h}{dt} + \frac{q_0}{2h_0} \Delta h = \Delta q$$

- Tank med uppvärmning

$$c\rho V \frac{dT}{dt} + (c\rho q + \lambda)T = P + (c\rho q + \lambda)T_{in}$$

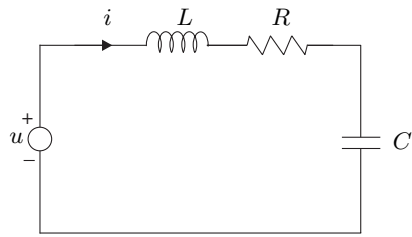
- Blandningstank (endast intensitetskälla  $c_{in}$ )

$$V \frac{dc}{dt} + qc = qc_{in}$$

**Tabell:** Analogier mellan flödesprocesser.

	Elektrisk krets	Tank med fritt utflöde	Tank med uppvärmning	Blandnings-tank
Intensitet	Spänning $u$	Höjd $\Delta h$	Temperatur $T$	Koncentration $c$
Flöde	Ström $i$	Flöde $\Delta q$	Effekt $P$	Partikelflöde $qc$
Upplagring	Kapacitans $C$	Area $A$	$c\rho V$	Volym $V$
Lednings-förmåga	$\frac{1}{\text{Resistans}} \frac{1}{R}$	$\frac{q_0}{2h_0}$	$c\rho q + \lambda$	Flöde $q$
Tidskonstant	$RC$	$2V_0/q_0$	$V/q$ då $\lambda=0$	$V/q$

**Andra ordningens resonanta system**



- Translaterisk rörelse

$$m \frac{dv}{dt} + bv + k \int_0^t v d\tau = F$$

- Rotationsrörelse

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + K \int_0^t \omega d\tau = T$$

- Elektrisk krets

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau = u$$

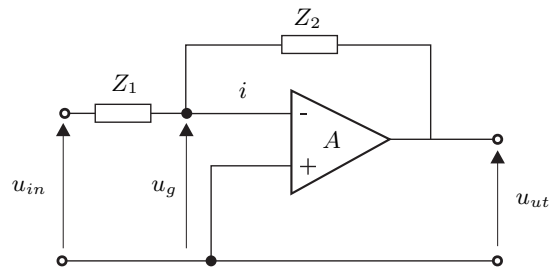
- Fluid

$$\frac{\rho \ell}{A} \frac{dq}{dt} + R_f q + \frac{\rho g}{A_T} \int_0^t q d\tau = p$$

**Tabell:** Analogier mellan resonanta system.

	Translation	Rotation	Elektrisk krets	Fluid
Intensitet	Kraft $F$	Vridande moment $T$	Spänning $u$	Tryck $p$
Flöde	Hastighet $v$	Vinkelhastighet $\omega$	Ström $i$	Flöde $q$
$\int(\text{flöde})dt$	Läge $y$	Vinkel $\theta$	Laddning $q$	Volym $V$
Tröghet	Massa $m$	Tröghetsmoment $J$	Induktans $L$	Induktans $\frac{\rho \ell}{A}$
Dämpning	Dämpning $b$	Dämpning $B$	Resistans $R$	Strypning $R_f$
Elasticitet	Fjädring $k$	Styvhet $K$	$\frac{1}{\text{Kapacitans}} = \frac{1}{C}$	$\frac{1}{\text{Kapacitans}} = \frac{\rho g}{A_T}$

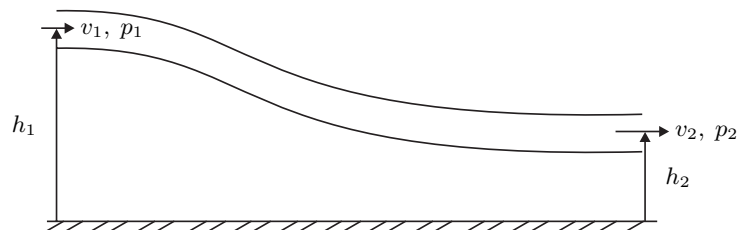
## Återkopplad förstärkare



$$U_{ut}(s) = -A(s)U_g(s)$$

$$\frac{U_{ut}(s)}{U_{in}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \frac{1}{1 + A^{-1}(s)(1 + Z_2(s)/Z_1(s))}$$

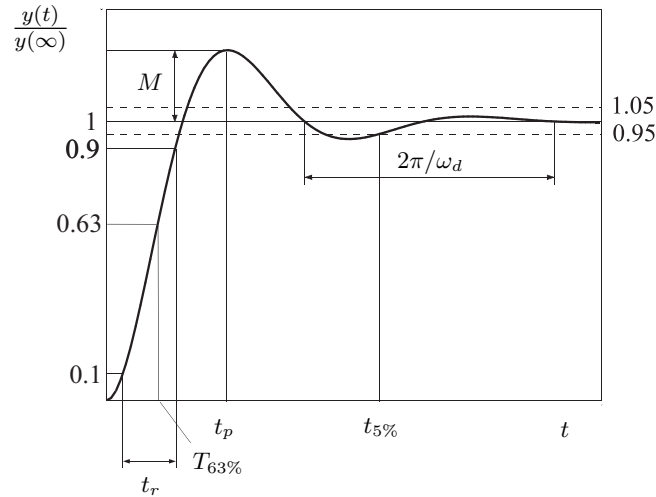
## Bernoullis ekvation



$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

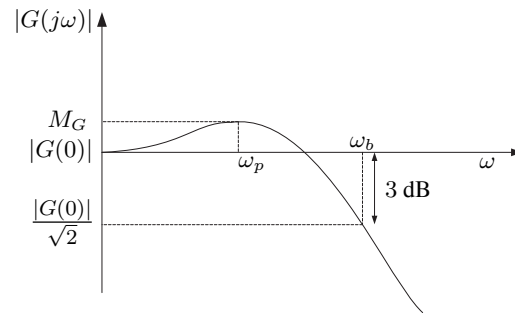
## 5 Tids- och frekvensanalys

### Stegsvar



- *Stigtiden*  $t_r$  (rise time) = tiden det tar för utsignalen  $y(t)$  att gå från 10% till 90% av dess slutvärde.
- *Insvängningstiden*  $t_{5\%}$  = tiden då utsignalen  $y(t)$  har svängt in innanför området  $0.95y(\infty) < y(t) < 1.05y(\infty)$ . Utsignalen får följaktligen ej hamna utanför detta område efter tiden  $t_{5\%}$ .
- *Ekvivalent tidskonstant*  $T_{63\%}$  = tiden då utsignalen  $y(t)$  nått 63% av dess slutvärde
- *Maximal relativ översläng*  $M = \frac{\max(y(t)) - y(\infty)}{y(\infty)}$
- $t_p$  = tiden då  $\max(y(t))$  inträffar
- *Dämpad självsvängningsfrekvens*  $\omega_d = 2\pi/T_p$  där  $T_p$  = periodtiden för den dämpade resonanssvängning som uppträder för system som har komplexkonjugerade poler.

## Amplituddiagram



- *Maxvärde eller resonanstopp*  $M_G = \max_{\omega} |G(j\omega)|$
- *Resonansfrekvens*  $\omega_p$  = den frekvens vid vilken resonanstoppen inträffar.
- *Bandbredd*  $\omega_b$  = den frekvens vid vilken amplituden sjunkit ner en faktor  $1/\sqrt{2}$  jämfört med lågfrekvensförstärkningen  $|G(j0)|$ , d.v.s.

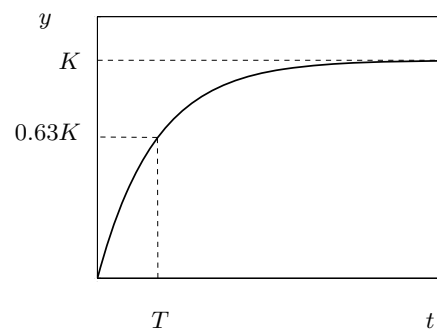
$$\frac{|G(j\omega_b)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

## Första ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

Stegsvar

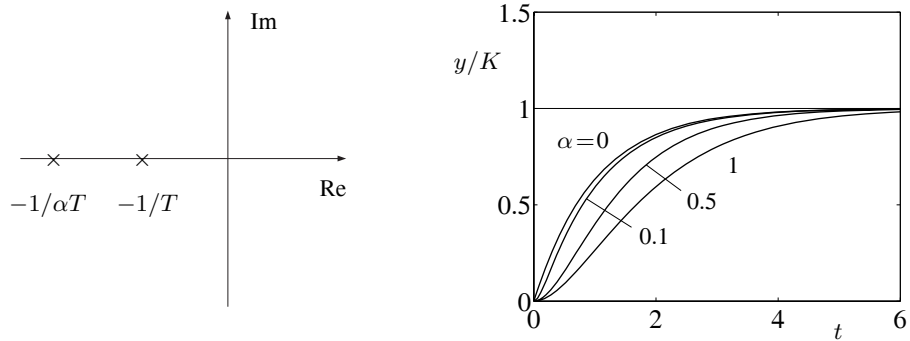
$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$



Stigtid	$t_r = 2.20T$
Insvängningstid	$t_{5\%} = 3.00T$
Ekvivalent tidskonstant	$T_{63\%} = T$
Bandbredd	$\omega_b = 1/T$

**Andra ordningens system med reella poler**

$$G(s) = \frac{K}{(1 + Ts)(1 + \alpha Ts)}$$



Stigtid	$t_r \approx (2.2 + \alpha)T$
Insvängningstid	$t_{5\%} \approx (3.0 + 1.6\alpha)T$
Ekvivalent tidskonstant	$T_{63\%} \approx (1 + 1.1\alpha)T$

## Andra ordningens system med komplexkonjugerade poler

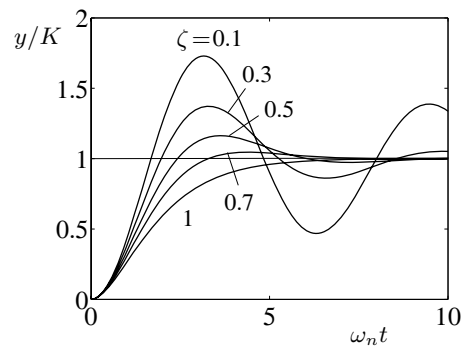
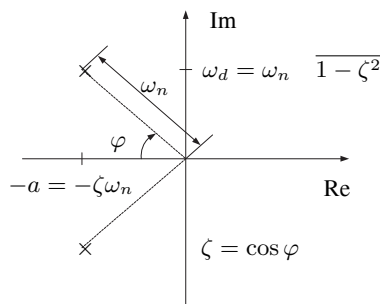
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

Poler

$$s = -a \pm j\omega_d \quad \text{där} \quad \begin{cases} a = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

Stegsvar

$$y(t) = K(1 - e^{-at} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)) \quad \text{där} \quad \varphi = \arccos(\zeta)$$



Stigtid  $t_r \approx (1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2)/\omega_n$

Insvängningstid  $t_{5\%} \approx \frac{3}{a} \quad \zeta \leq 0.9$

Max relativ översläng  $M = e^{-\pi a/\omega_d} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$

Bandbredd  $\omega_b/\omega_n = \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2}}$   
 $\approx 1.85 - 1.2\zeta \quad \text{då} \quad 0.4 \leq \zeta \leq 1$

Resonansfrekvens  $\omega_p = \begin{cases} \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} & 0 \leq \zeta < 1/\sqrt{2} \\ 0 & \zeta \geq 1/\sqrt{2} \end{cases}$

Resonanstopp  $M_G = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} & 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



### Bodediagram

decibel (dB)	=	$20 \log_{10}  G(j\omega) $
oktav	=	frekvenskvot 1:2 eller 2:1
dekad	=	frekvenskvot 1:10 eller 10:1
lutning $[\pm m]$	=	$\pm m \cdot 20$ dB/dekad
brytfrekvens $\omega_i$	=	skärningspunkt för asymptoter

Typiska värden i decibel

$ G $	$ G _{dB}$	$ G $	$ G _{dB}$
1000	60	0.001	-60
100	40	0.01	-40
10	20	0.1	-20
5	14	0.2	-14
4	12	0.25	-12
2	6	0.5	-6
$\sqrt{2}$	3	$1/\sqrt{2}$	-3
$\sqrt{1.25}$	1	$1/\sqrt{1.25}$	-1
1	0		

### Bodediagram för första ordningens process

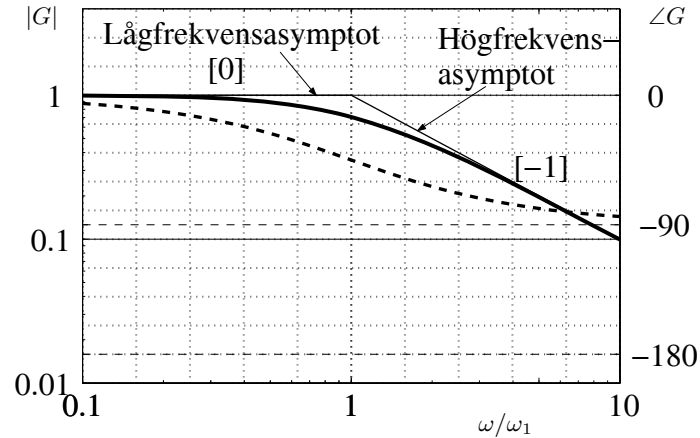
$$G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$$

Korrektion av beloppskurvan jämfört med asymptoten

$\omega$	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	$\omega_1$	$2\omega_1$	$4\omega_1$
Korrektion	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$
Korrektion <sub>dB</sub>	-0.2 dB	-1.0 dB	-3 dB	-1.0 dB	-0.2 dB

Fasvridning

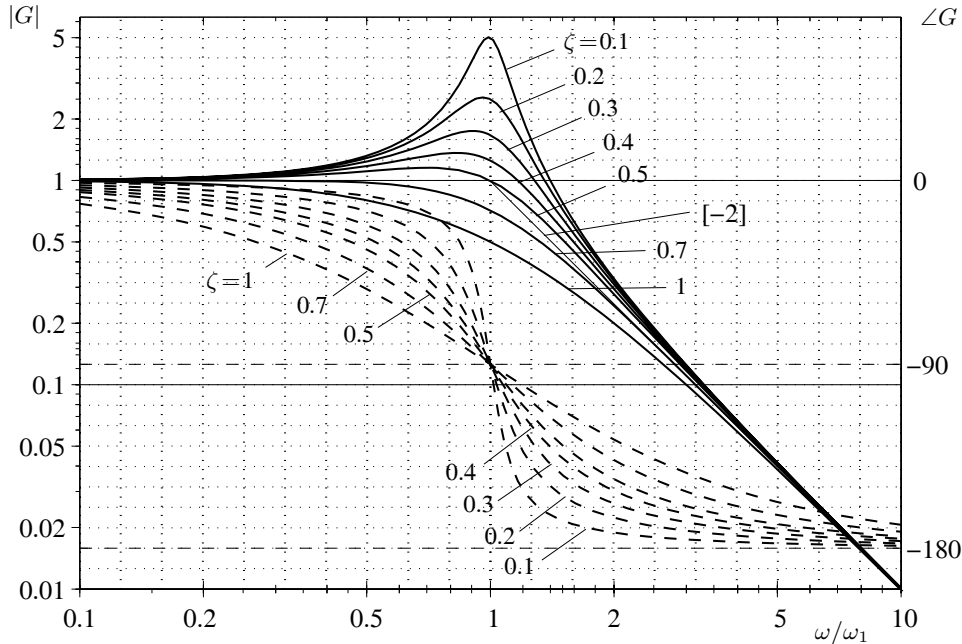
$\omega$	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	$\omega_1$	$2\omega_1$	$4\omega_1$
$\angle G(j\omega)$	$-14^\circ$	$-27^\circ$	$-45^\circ$	$-63^\circ$	$-76^\circ$



**Figur:** Bodediagram, inklusive låg- och högfrekvensasymptoterna, för överföringsfunktionen  $G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$ . Belopp heldragen linje, fasvridning streckad linje. En ruta motsvarar 4 dB och  $20^\circ$ .

**Bodediagram för andra ordningens resonant process**

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$$



**Figur:** Bodediagram inklusive asymptoter för överföringsfunktionen  $G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$ . Belopp heldragen linje, fasvridning streckad linje. En ruta motsvarar 2 dB och  $10^\circ$ .

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2 + 2\zeta j\omega/\omega_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_1)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_1)^2}} \equiv \frac{1}{r}$$

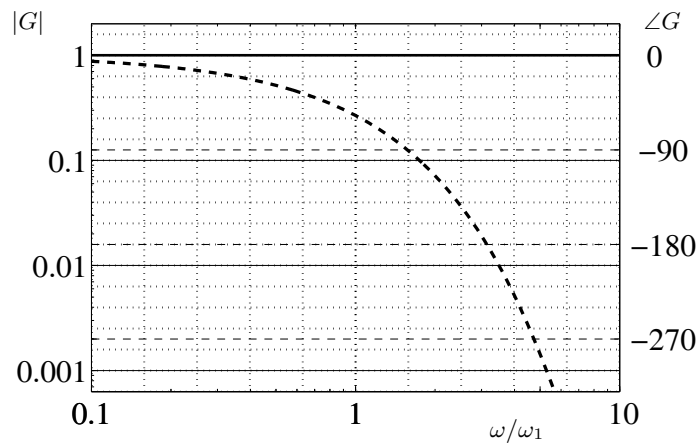
$$\angle G(j\omega) = -\arccos \frac{1 - (\omega/\omega_1)^2}{r}$$

### Bodediagram för döttidsprocess

$$G(s) = e^{-s/\omega_1}$$

$$|G(j\omega)| = 1 \quad \angle G(j\omega) = -\frac{180^\circ\omega}{\pi\omega_1}$$

$\omega$	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	$\omega_1$	$2\omega_1$	$4\omega_1$
$\angle G(j\omega)$	$-14^\circ$	$-29^\circ$	$-57^\circ$	$-115^\circ$	$-229^\circ$



**Figur:** Bodediagram för överföringsfunktionen  $G(s) = e^{-s/\omega_1}$ . Belopp heldragen linje, fasvridning streckad linje. En ruta motsvarar  $20^\circ$ .

### Padéapproximation av $n$ :te ordningen

$$e^{-sT_d} \approx G_n(s)$$

$$G_1(s) = \frac{2 - sT_d}{2 + sT_d}$$

$$G_2(s) = \frac{12 - 6sT_d + (sT_d)^2}{12 + 6sT_d + (sT_d)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{120 - 60sT_d + 12(sT_d)^2 - (sT_d)^3}{120 + 60sT_d + 12(sT_d)^2 + (sT_d)^3}$$

$$G_4(s) = \frac{1680 - 840sT_d + 180(sT_d)^2 - 20(sT_d)^3 + (sT_d)^4}{1680 + 840sT_d + 180(sT_d)^2 + 20(sT_d)^3 + (sT_d)^4}$$

Enligt följande tabell avviker 1:a, 2:a, 3:e och 4:e ordningens Padéapproximation från dödtidsprocessen mindre än en grad för fasvridningar ner till  $-35^\circ$ ,  $-100^\circ$ ,  $-175^\circ$  respektive  $-260^\circ$ .

$\angle e^{-j\omega T_d} = -\omega T_d 180^\circ / \pi$	$-35^\circ$	$-100^\circ$	$-175^\circ$	$-260^\circ$
$\angle G_1(j\omega T_d)$	$-34^\circ$	$-82^\circ$	$-114^\circ$	$-132^\circ$
$\angle G_2(j\omega T_d)$	$-35^\circ$	$-99^\circ$	$-163^\circ$	$-215^\circ$
$\angle G_3(j\omega T_d)$	$-35^\circ$	$-100^\circ$	$-174^\circ$	$-251^\circ$
$\angle G_4(j\omega T_d)$	$-35^\circ$	$-100^\circ$	$-175^\circ$	$-259^\circ$

## 6 Stabilitet och stabilitetsmarginaler

Stabilt system då samtliga rötter till *karaktäristiska ekvationen*

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + a_3s^{n-3} + \dots = 0$$

ligger i vänstra halvplanet. För en överföringsfunktion motsvarar rötterna till karakteristiska ekvationen systemets poler.

### *Routh-Hurwitz' stabilitetskriterium*

Koefficienterna i ovanstående ekvation införs i följande tablå:

$$\begin{array}{l|llll}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \dots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \dots \\
 s^{n-2} & c_0 & c_1 & c_2 \dots & \\
 s^{n-3} & d_0 & d_1 & d_2 \dots & \\
 \cdot & \cdot & & & \\
 \cdot & \cdot & & & \\
 s^0 & & & & 
 \end{array}$$

där

$$c_0 = \frac{a_1a_2 - a_3a_0}{a_1} \quad c_1 = \frac{a_1a_4 - a_5a_0}{a_1} \quad d_0 = \frac{c_0a_3 - c_1a_1}{c_0} \quad \text{etc}$$

Observera mönstret för de korsvisa produkterna:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} & 
 \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} & 
 \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}
 \end{array}$$

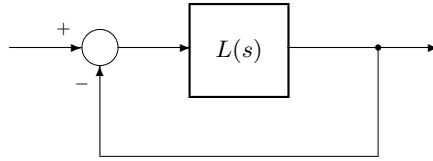
Tomrum längst till höger i tablåen fylls ut med nollor. Koefficienter genereras tills man får  $n + 1$  rader i tablåns första kolumn.

*Stabilitetsvillkor:* (föregivet  $a_0 > 0$ )

Nödvändigt men ej tillräckligt stabilitetsvillkor: Alla koefficienterna i karakteristiska ekvationen är strikt positiva.

Nödvändigt och tillräckligt stabilitetsvillkor: Alla koefficienterna i tablåns första kolumn ( $a_0, a_1, c_0, \dots$ ) är strikt positiva.

### Stabilitet för återkopplade system



Kretsöverföringen  $L(s)$  = överföringsfunktionen då man går ett varv runt i återkopplingslingan och multiplicerar med  $-1$ , se ovanstående figur.

Karakteristisk ekvation för ett återkopplat system med kretsöverföring  $L(s)$

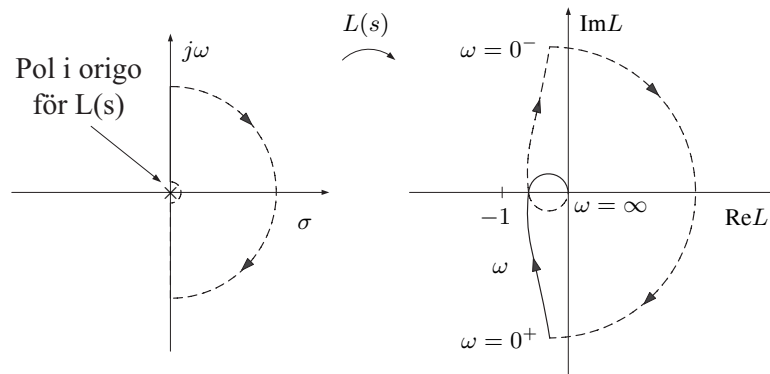
$$1 + L(s)$$

Då  $L(s) = B_L(s)/A_L(s)$  blir karakteristiska ekvationen

$$A_L(s) + B_L(s) = 0$$

### Nyquistkriteriet

Nyquist kontur i  $s$ -planet samt avbildning av Nyquists kontur i  $L(s)$ - planet.



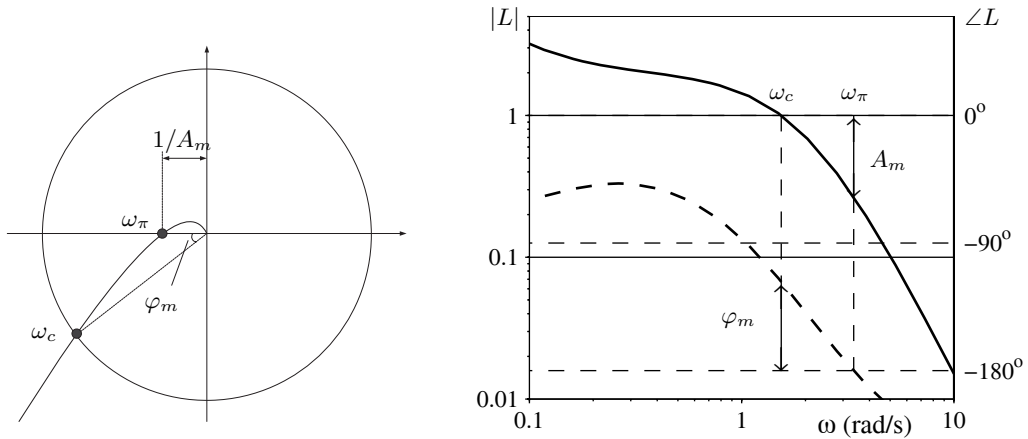
Stabilitetsvillkor:  $Z = P + N = 0$  ger ett stabilt återkopplat system

- $Z$  = antalet nollställen i högra halvplanet för  $1 + L(s)$
- $P$  = antalet poler i högra halvplanet för  $L(s)$
- $N$  = antalet varv i medurs riktning som  $L(s)$ -kurvan omsluter punkten  $(-1, 0)$

### Nyquists förenklade kriterium

Då kretsöverföringen  $L(s)$  inte har några poler i högra halvplanet är det återkopplade systemet stabilt om man går utefter kurvan  $L(j\omega)$  från  $\omega = 0$  till  $\omega = \infty$  och finner att punkten  $(-1, 0)$  hamnar till vänster om kurvan. Plotten  $L(j\omega)$  från  $\omega = 0$  till  $\omega = \infty$  kallas för ett *förenklat Nyquistdiagram*.

### Fas- och amplitudmarginaler



Fasmarginal

$$\varphi_m = \angle L(j\omega_c) - (-180^\circ) > 0 \quad \text{där} \quad |L(j\omega_c)| = 1$$

Amplitudmarginal

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} > 1 \quad \text{där} \quad \angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

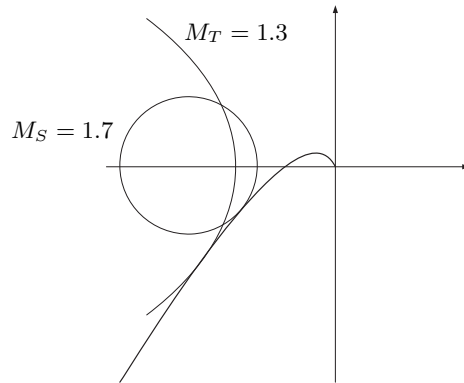
Minimal amplitudmarginal

$$A_{min} = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} < 1 \quad \text{där} \quad \angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

Maximal amplitudmarginal

$$A_{max} = A_m$$

## Maximala känslighetsfunktioner



Känslighetsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Komplementär känslighetsfunktion

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad \text{och} \quad M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)|$$

innebär att kretsöverföringen inte passerar innanför en cirkel med medelpunkt i  $(-1, 0)$  och radie  $1/M_S$ , medan måttet  $M_T$  motsvarar resonanstoppet för  $T(s)$ .

$$\min(M_S, M_T) \geq \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi_m}{2}} \quad M_S \geq \frac{A_m}{A_m - 1}$$

$$\varphi_m \geq 2 \arcsin \frac{1}{2 \min(M_S, M_T)} \quad A_m \geq \frac{M_S}{M_S - 1}$$



### **Relation mellan kretsöverföring och återkopplat system**

Då kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad \text{där} \quad 0 < \zeta \leq 1$$

blir överföringsfunktionen  $G_{ry}(s)$  för motsvarande återkopplade system

$$G_{ry}(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Överkorsningsfrekvensen och motsvarande fasmarginal för  $L(s)$  blir då

$$\begin{aligned} \omega_c &= \omega_n \sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2} \\ \varphi_m &= 90^\circ - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} = \arctan \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \end{aligned}$$

vilket resulterar i följande bandbredd  $\omega_b$ , stigtid  $t_r$  och relativ översväng  $M$  för det återkopplade systemet  $G_{ry}(s)$

$$\omega_b \approx 1.6 \omega_c$$

$$t_r \approx 1.25/\omega_c$$

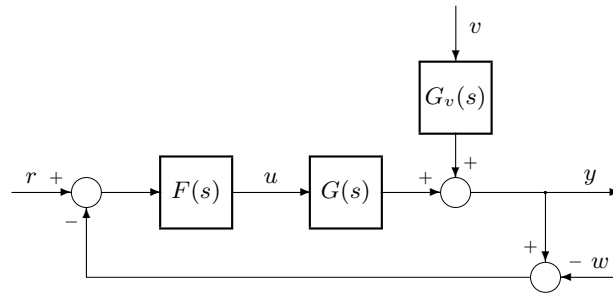
$$M(\%) \approx 70 - \varphi_m$$

För godtyckliga processmodeller gäller inte denna precision, men följande approximationer där endast en värdesiffra ingår är relativt allmängiltiga

$$\omega_b \approx 2 \omega_c$$

$$t_r \approx 1/\omega_c$$

## 7 Principer för dimensionering av regulatorer I: Prestanda



### Känslighetsfunktioner

Kretsöverföring

$$L(s) = G(s)F(s)$$

Känslighetsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = G_{re}(s)$$

Relation mellan öppen styrning och återkopplad reglering

$$Y_{ol}(s) = G_v(s)V(s) \quad Y_{cl}(s) = S(s)G_v(s)V(s)$$

innebär att

$$Y_{cl}(s) = S(s)Y_{ol}(s)$$

Komplementär känslighetsfunktion

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Störkänslighetsfunktion

$$G_v(s)S(s) = \frac{G_v(s)}{1 + L(s)}$$

Styrkänslighetsfunktion

$$F(s)S(s) = \frac{F(s)}{1 + L(s)} = \frac{T(s)}{G(s)}$$

### Återkopplat system

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_{ry}(s)R(s) + G_{vy}(s)V(s) + G_{wy}(s)W(s) \\ &= T(s)R(s) + G_v(s)S(s)V(s) + T(s)W(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= G_{ru}(s)R(s) + G_{vu}(s)V(s) + G_{wu}(s)W(s) \\ &= F(s)S(s)R(s) - F(s)S(s)G_v(s)V(s) + F(s)S(s)W(s) \end{aligned}$$

### **Prestandakriterier**

Antag att regulatorn innehåller integralverkan, d.v.s. att

$$F(s) \approx \frac{K_i}{s} \quad \text{då} \quad s = j\omega \rightarrow 0$$

Prestandakriterium för kompensering av stegstörning  $V(s) = v_0/s$  alternativt lågfrekvent störning

$$J_v = \frac{1}{K_i} = \frac{1}{v_0} \int_0^\infty y(t) dt \frac{G(0)}{G_v(0)} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{j\omega} G_{vy}(j\omega) \frac{G(0)}{G_v(0)}$$

Alternativa generella prestandakriterier vid processtörningar respektive referenssignalvariationer

$$J_{vmax} = \max_{\omega} \frac{1}{\omega} |G_{vy}(j\omega)| = \max_{\omega} \frac{1}{\omega} |G_v(j\omega)S(j\omega)|$$

$$J_{rmax} = \max_{\omega} \frac{1}{\omega} |G_{re}(j\omega)| = \max_{\omega} \frac{1}{\omega} |S(j\omega)|$$

### **Styrsignalkriterier**

Regulatorns högfrekvensbeteende

$$F(s) = \frac{K_\infty s^{p-m} + \dots}{s^p + \dots} \rightarrow \frac{K_\infty}{s^m} \quad \text{då} \quad s = j\omega \rightarrow \infty$$

Styrsignalkriterium vid referenssignalsteg  $R(s) = r_0/s$  för  $m = 0$

$$J_u = K_\infty = \frac{u(0)}{r_0}$$

Alternativt generellt styrsignalkriterium

$$J_{umax} = \max_{\omega} |G_{wu}(j\omega)| = \max_{\omega} |G_{ru}(j\omega)| = \max_{\omega} |F(j\omega)S(j\omega)|$$

Då maximum inträffar när  $\omega \rightarrow \infty$  (gäller endast för  $m = 0$ ) gäller att  $J_{umax} = J_u = K_\infty$ .

Tumregel för ekonomisk gräns på styrsignalaktiviteten

$$J_{umax}G(0) \leq 5-20$$

### **Dimensioneringsstrategi**

Minimera med avseende på regulatorns inställningsparametrar lämpligt prestationsmått

$$J_v, \quad J_{vmax}, \quad J_{rmax} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{\omega_b}$$

med bivillkor på *stabilitetsmarginaler*

$$M_S \leq 1.7, \quad M_T \leq 1.3 \quad \text{alternativt} \quad \varphi_m \geq 45^\circ, \quad A_m \geq 2.5$$

och *styrsignalaktivitet*

$$J_{umax} \leq \frac{c_u}{G(0)} \quad \text{alternativt för } m = 0 \quad J_u \leq \frac{c_u}{G(0)}$$

där konstanten  $c_u = 5-20$ .

### ***Kvarstående fel och den interna modellprincipen***

Kvarstående fel efter signalen  $R(s) = B_r(s)/A_r(s)$  ( $A_r(s)$  har rötter på imaginäraxeln) undviks då polynomet  $A_r(s)$  ingår i kretsöverföringens nämnare, d.v.s. då

$$L(s) = \bar{L}(s)/A_r(s)$$

Kvarstående fel efter processtörningen  $V(s) = B_v(s)/A_v(s)$  ( $A_v(s)$  har rötter på imaginäraxeln) undviks då polynomet  $A_v(s)$  ingår i regulatorns nämnare, d.v.s. då

$$F(s) = \bar{F}(s)/A_v(s)$$

Stegsignaler,  $R(s) = 1/s$  alternativt  $V(s) = 1/s$ , kräver därför integralverkan (faktorn  $1/s$ ) i  $L(s)$  respektive  $F(s)$  för att undvika kvarstående fel.

## 8 Dimensionering av PID-regulatorer

### Dimensionering baserat på önskad fasmarginal

Villkoren

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \text{och} \quad \angle L(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m$$

där önskad överkorsningsfrekvens  $\omega_c$  och fasmarginal  $\varphi_m$  antas givna, ger följande krav på regulatorn

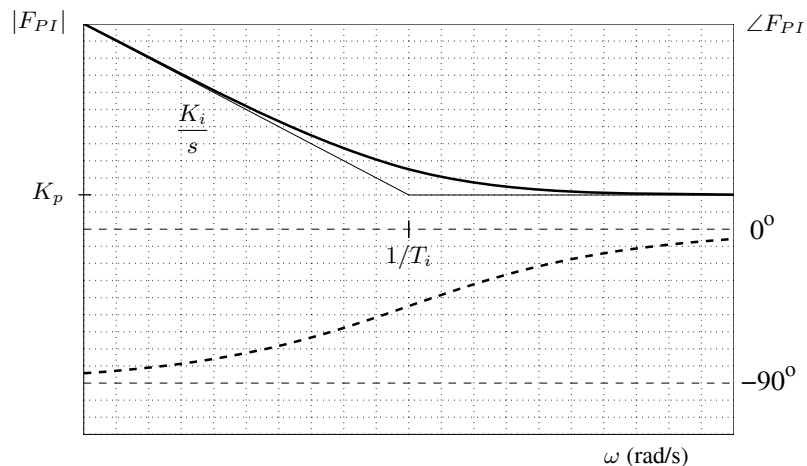
$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}$$

$$\angle F(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c)$$

### PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_i \frac{1 + T_i s}{s} \quad \text{där} \quad K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

Bodediagram för PI-regulatorn



Givet önskad fasmarginal och överkorsningsfrekvens följer att (se också figur på nästa sida)

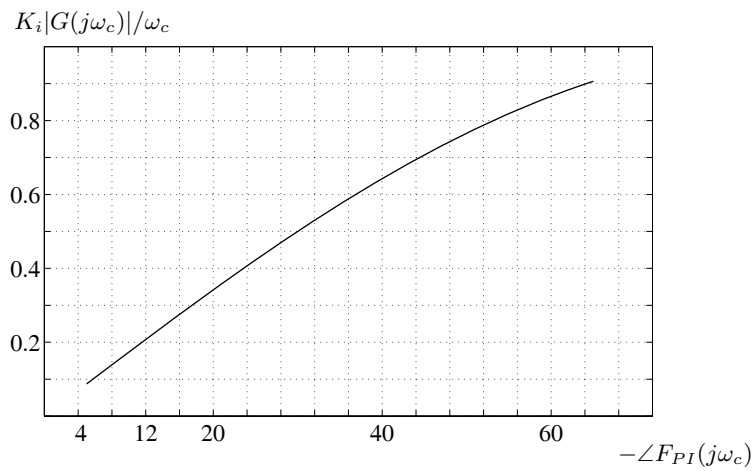
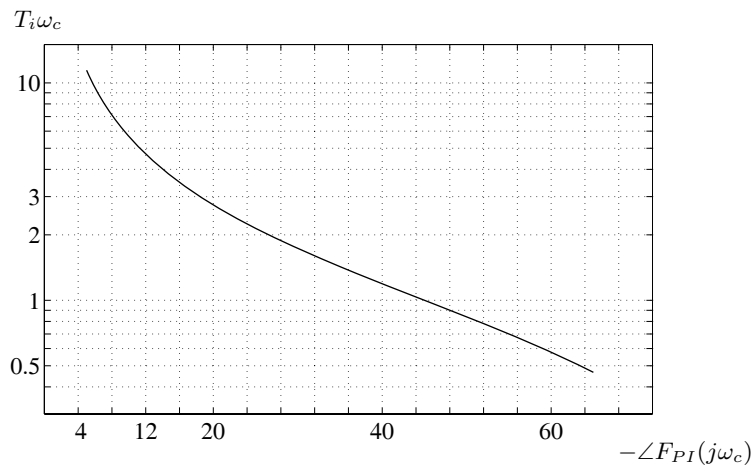
$$T_i = \frac{1}{\omega_c \tan(-\angle F_{PI}(j\omega_c))}$$

$$K_i = \frac{\omega_c}{|G(j\omega_c)| \sqrt{1 + (\omega_c T_i)^2}}$$

Som en första rekommendation vid val av fasmarginal och överkorsningsfrekvens föreslås

$$\varphi_m = 50^\circ \quad \omega_c = 0.4\omega_{G150}$$

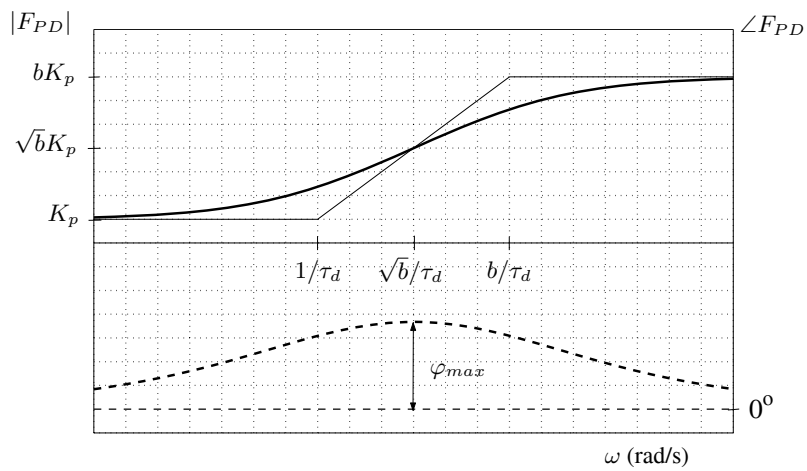
där  $\omega_{G150}$  är den frekvens för vilken processens överföringsfunktion har fasvridningen  $\angle G(j\omega_{G150}) = -150^\circ$ .



**PD-regulator**

$$F_{PD}(s) = K_p \left( 1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b} \quad b > 1$$

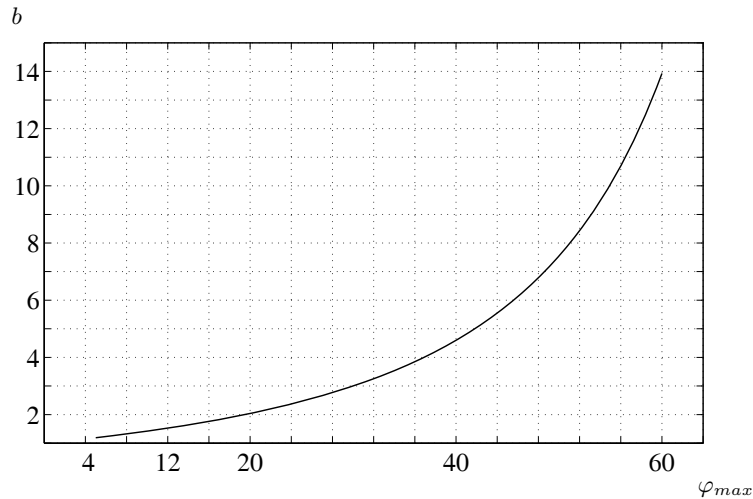
Bodediagram för PD-regulatorn



Då PD-regulatorns maximala faslyft  $\varphi_{max}$  placeras vid önskad överkorsningsfrekvens  $\omega_c$  gäller att

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}}$$

$$\tau_d = \sqrt{b}/\omega_c$$



Förstärkningen  $K_p$  bestäms så att  $|G(j\omega_c)||F_{PD}(j\omega_c)| = |G(j\omega_c)|\sqrt{b}K_p = 1$ , vilket innebär att

$$K_p = \frac{1}{|G(j\omega_c)|\sqrt{b}}$$

### **PID-regulator**

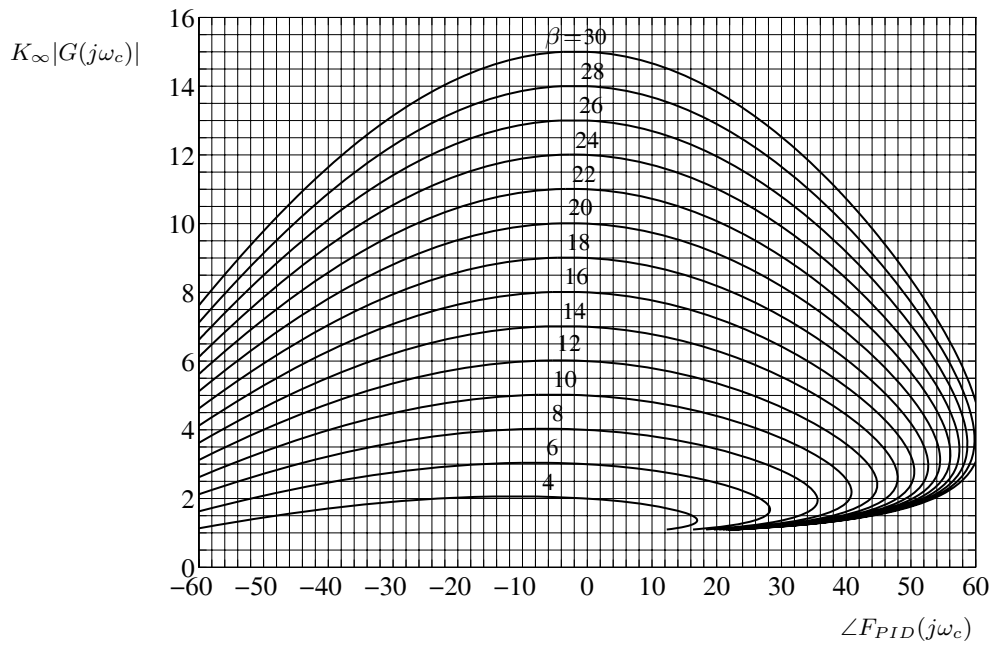
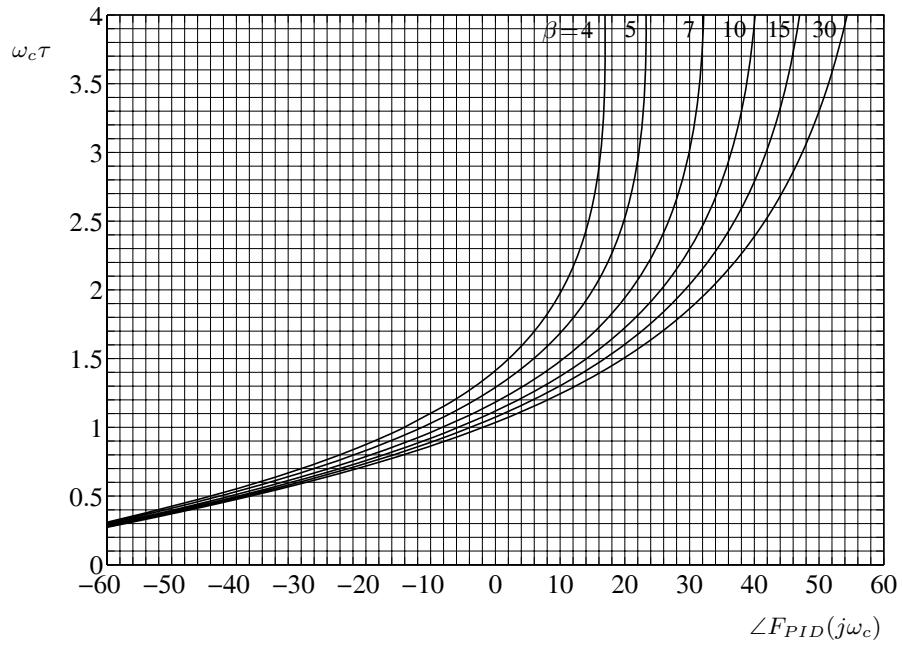
$$F_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

Den första formuleringen används normalt vid realisering, medan den andra utnyttjas vid dimensionering. Följande samband råder

$$T_f = \frac{\tau}{\beta} \quad T_i = 2\zeta\tau - T_f \quad T_d = \frac{\tau^2}{T_i} - T_f \quad K_p = K_i T_i$$

Givet önskad fasmarginal  $\varphi_m$ , överkorsningsfrekvens  $\omega_c$ , parametern  $\beta$  samt  $\zeta = 1$  bestäms  $\tau$  enligt den första figuren på nästa sida, medan den andra ger  $K_\infty$ . Eftersom högfrekvensförstärkningen  $K_\infty = |F_{PID}(\infty)| = K_i \tau \beta$  bestäms till sist  $K_i$ . Som en första rekommendation föreslås

$$\varphi_m = 50^\circ \quad \omega_c = 0.6\omega_{G150} \quad \beta = 10$$





### Inställningsregler för stabila processer med reella poler

Kappatalet

$$\kappa_{180} = \frac{|G(j\omega_{G180})|}{G(0)} \quad \text{där} \quad \angle G(j\omega_{G180}) = -180^\circ$$

Inställningsregler då  $\kappa_{180} \geq 0.1$ . Notera att  $\beta = K_\infty/(\tau K_i)$  för PID-regulatorn.

	$\frac{K_i G(0) }{\omega_{G180}}$	$\frac{1}{\tau \omega_{G180}}$	$\zeta$	$K_\infty G(0)$
PI	$0.33 - 0.15\kappa_{180}$	$0.18 + \kappa_{180}$	—	—
PID	$0.13 + \frac{0.16}{\kappa_{180}} - \frac{0.007}{\kappa_{180}^2}$	$0.4 + 0.75\kappa_{180}$	0.75	$4 + \frac{1}{\kappa_{180}}$

Alternativ bestämning av  $\tau$  via stegsvar vid PID-reglering

$$\tau = T_{63\%}/3$$

Eventuell dödtdid ingår i  $T_{63\%}$ . Detta samband gäller oberoende av  $\kappa_{180}$ , möjligen med en mindre justering nedåt för processer med mycket enkel dynamik ( $\kappa_{180} < 0.1$ ). För en första ordningens process med kort dödtdid föreslås i stället  $\tau = T_{63\%}/5$ .

### Modifierade inställningsregler för processer med enkel dynamik (litet kappatal)

Modifierat kappatal

$$\kappa_{135} = \frac{|G(j\omega_{G135})|}{G(0)} \quad \text{där} \quad \angle G(j\omega_{G135}) = -135^\circ$$

Inställningsregler då  $\kappa_{180} < 0.1$  eller ej existerar. Iakttag att  $\beta = K_\infty/(\tau K_i)$  för PID-regulatorn.

	$\frac{K_i G(0) }{\omega_{G135}}$	$\frac{1}{\tau \omega_{G135}}$	$\zeta$	$K_\infty G(0)$
PI	$0.25 + \frac{0.09}{\kappa_{135}}$	$0.09 + 1.2\kappa_{135}$	—	—
PID	$1.35 + \frac{0.35}{\kappa_{135}} - \frac{0.006}{\kappa_{135}^2}$	$0.44 + 1.4\kappa_{135}$	0.75	$\min(14 + \frac{0.5}{\kappa_{135}}, 25)$

### Ziegler-Nichols parameterval

	$K_p G(j\omega_{G135}) $	$T_i\omega_{G180}$	$\frac{T_i}{T_d}$	$\frac{T_d}{T_f}$
PI	0.45	$1.7\pi$	—	—
PID	0.6	$\pi$	4	10

### Experimentell bestämning av regulatorparametrar

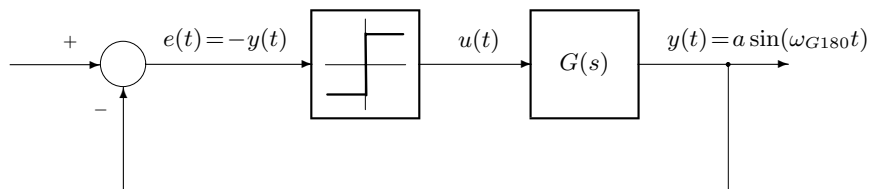
1. PID-regulatorn ställs in som en P-regulator ( $T_i = \infty, T_d = 0$ ).
2. Förstärkningen  $K_p$  höjs tills stabilitetsgränsen uppnås.
3. Med hjälp av den erhållna förstärkningen vid självsvängning,  $K_p = K_0$ , och periodtiden  $T_0$  erhålls

$$|G(j\omega_{G180})| = \frac{1}{K_0} \quad \omega_{G180} = \frac{2\pi}{T_0}$$

4. Processens statiska förstärkning bestäms som  $G(0) = \Delta y / \Delta u$ , där  $\Delta u$  är insignaländringen från en konstant nivå  $u_0$  till en annan nivå  $u_0 + \Delta u$ , och  $\Delta y$  är den resulterande konstanta utsignaländringen efter att eventuella transienter klingat av.

### Självsvängning med hjälp av relä

Återkopplat reglersystem där en reläfunktion med amplituden  $d$  åstadkommer en begränsad självsvängning  $y(t) = a \sin(\omega_{G180}t)$



Genom att fourierserietveckla reläets utsignal (fyrkantvåg), och endast beakta fourierseriens grundkomponent, kan reläet uppfattas som en förstärkning  $K_0 = 4d/(\pi a)$ , vilket ger

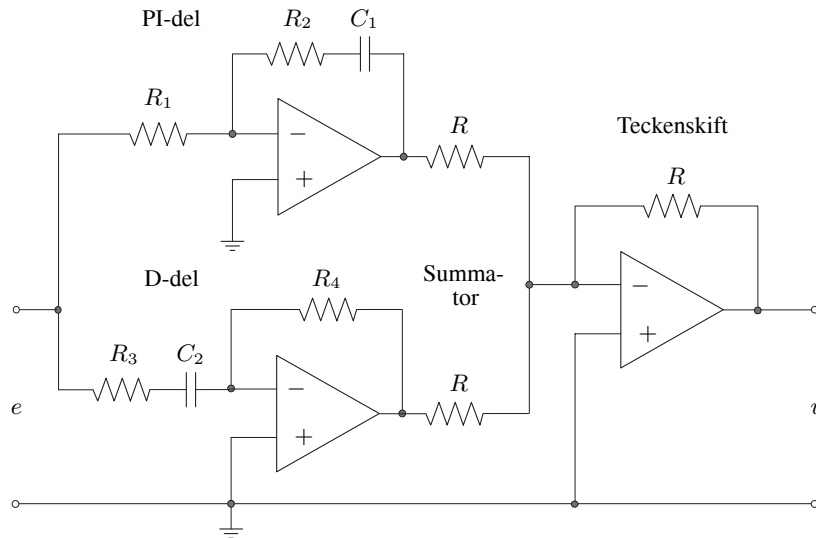
$$|G(j\omega_{G180})| = \frac{\pi a}{4d}$$

**Kontinuerlig PID-regulator baserat på operationsförstärkare**

$$F_{PID}(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + T_f s}$$

$$U(s) = -\frac{R}{R}U_1(s) - \frac{R}{R}U_2(s) = \left( \frac{R_2}{R_1} + \frac{1/R_1 C_1}{s} + \frac{s R_4 C_2}{1 + s R_3 C_2} \right) E(s)$$

Realisering med hjälp av operationsförstärkare, där proportionalförstärkningen  $K_p = R_2/R_1$ , integralförstärkningen  $K_i = 1/R_1 C_1$ , deriveringsförstärkningen  $K_d = R_4 C_2$  och filtertidskonstanten  $T_f = R_3 C_2$ .



## 9 Principer för dimensionering av regulatorer II: Robusthet

### Osäkerhetsmodeller

Additiv osäkerhet

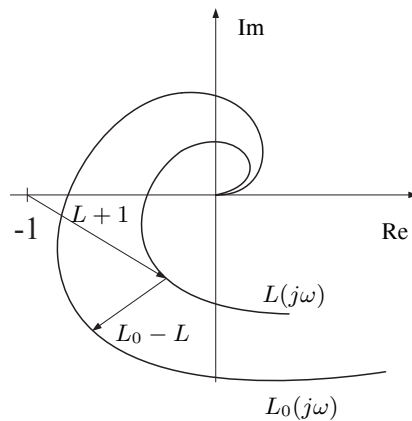
$$\Delta_G^a(s) = G_0(s) - G(s)$$

Multiplikativ osäkerhet

$$\Delta_G(s) = \frac{G_0(s) - G(s)}{G(s)}$$

### Robust stabilitet

Nyquistdiagram där  $L(j\omega)$  är den nominella kretsöverföringen och  $L_0(j\omega)$  den verkliga kretsöverföringen



Ett stabilt återkopplat system garanteras då den multiplikativa osäkerheten  $|\Delta_G(j\omega)|$  uppfyller följande villkor relaterat till den nominella komplementära känslighetsfunktionen  $T(s)$ .

$$|T(j\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(j\omega)|} \quad \forall \omega$$

### Robust prestanda

$$\Delta_T(s) = \frac{T_0(s) - T(s)}{T(s)}$$

Antag enhetsåterföring ( $u = F(r - y)$ ) och multiplicera täljare och nämnare med  $R(s)$ . Resultatet blir

$$\Delta_T(s) = \frac{Y_0(s) - Y(s)}{Y(s)}$$

Robust prestanda innebär att

$$\Delta_T(s) = S_0(s)\Delta_G(s) = \frac{1}{1 + L_0(s)}\Delta_G(s)$$

### ***Fundamentala begränsningar för återkopplade system***

Bodes integralsats då  $L(s)$  ej har poler i högra halvplanet och dess belopp avtar med minst  $1/\omega^2$  då  $\omega \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0$$

Övre gräns för överkorsningsfrekvensen  $\omega_c$  för processer med transportfördröjning  $T_d$

$$\omega_c \leq \frac{1}{T_d}$$

Positivt icke-minimumfasnollställe  $z$  i kretsöverföringen begränsar, med rimliga krav på  $M_S$  (exempelvis  $M_S \leq 1.7$ ), överkorsningsfrekvensen  $\omega_c$  och integralförstärkningen  $K_i$  approximativt till

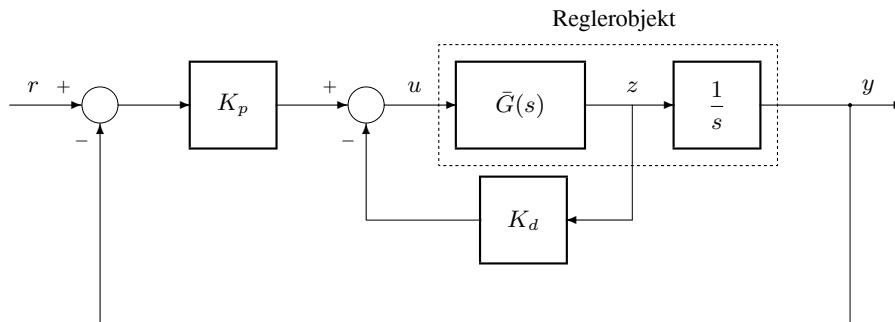
$$\omega_c \lesssim 0.5z \qquad K_i \lesssim \frac{0.5z}{G(0)}$$

En instabil pol  $p$  i kretsöverföringen begränsar, med rimliga krav på framförallt  $M_T$ , överkorsningsfrekvensen  $\omega_c$  approximativt till

$$\omega_c \gtrsim 2p$$

## 10 Alternativa designprinciper och regulatorstrukturer

### Inre återföring



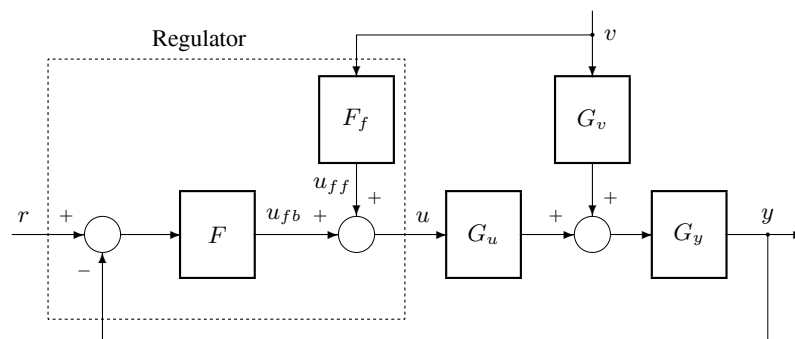
Eftersom vi i denna regulatorstruktur har flera utsignaler ( $y$  och  $z$ ) är inte längre kretsöverföringen ett entydigt begrepp. En uppbyggnad av återkopplings slingan vid utsignalen  $y$  ger kretsöverföringen

$$L_y(s) = \frac{\bar{G}(s)}{1 + \bar{G}(s)K_d} \frac{K_p}{s}$$

medan en uppbyggnad vid styrsignalen  $u$  ger

$$L_u(s) = (K_p + K_d s)\bar{G}(s)/s$$

### Framkoppling



Då man bortser från återkopplingen ( $F_u = 0$ ), gäller att

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_y(s) (G_u(s)U(s) + G_v(s)V(s)) \\ &= G_y(s)G_u(s) \left( U(s) + \frac{G_v(s)}{G_u(s)}V(s) \right) \end{aligned}$$

Framkopplings-styrlagen

$$U(s) = F_f(s)V(s) \quad \text{där} \quad F_f(s) = -\frac{G_v(s)}{G_u(s)}$$

förutsätter att

1. framkopplingslänken  $F_f(s)$  går att realisera, d.v.s. att inversen av  $G_u(s)$  är stabil och att nämnarens gradtal för  $G_u(s)$  är högre eller lika med täljarens gradtal. Det första kravet innebär att nollställena till  $G_u(s)$  måste ligga i vänstra halvplanet (stabila nollställen).
2. överföringsfunktionerna, d.v.s. modellen, stämmer med det verkliga systemet.

### **Dödtidskompensering**

Reglerad process

$$\bar{G}(s)e^{-sT_d}$$

Otto-Smith-regulatorn

$$F(s) = \frac{\bar{F}(s)}{1 + (1 - e^{-sT_d})\bar{G}(s)\bar{F}(s)}$$

resulterar med  $\bar{L}(s) = \bar{G}(s)\bar{F}(s)$  i kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{\bar{L}(s)e^{-sT_d}}{1 + \bar{L}(s)(1 - e^{-sT_d})}$$

### **Inversen av ett system**

Stabil överföringsfunktion, där nollställena med positiv realdel är samlade i polynomet  $B^+(s)$  (därav plustecknet), medan de återstående nollställena representeras av polynomet  $B^-(s)$ , d.v.s.

$$G(s) = \frac{B^+(s)B^-(s)}{A(s)}$$

Polöverskott för  $G(s) = B(s)/A(s)$

$$p_G = \text{grad } A(s) - \text{grad } B(s)$$

Realiserbar approximativ invers

$$G^*(s, m, \tau) = \frac{A(s)}{B^+(-s)B^-(s)A_m(s, \tau)}$$

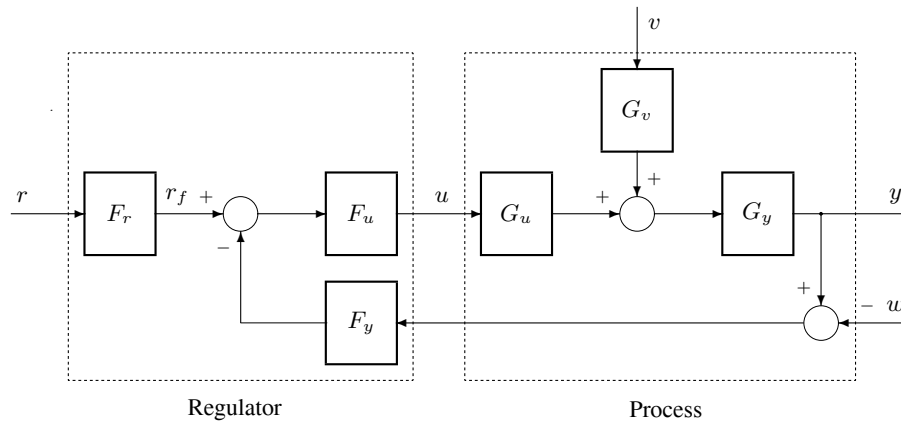
där polynomet

$$A_m(s, \tau) = (1 + \tau s)(1 + \alpha \tau s) \dots (1 + \alpha^{m-1} \tau s)$$

och  $m \geq p_G = \text{grad } A(s) - \text{grad } B(s)$ . Eftersom  $|G(j\omega)G^*(j\omega, m, \tau)| = 1/|A_m(j\omega, \tau)|$ , väljs  $\tau$  (och  $\alpha$ ) så att  $1/|A_m(j\omega, \tau)| \approx 1$  gäller upp till en rimlig bandbredd  $\omega_b$ . För en multipelpol ( $\alpha = 1$ ) av ordning  $m$  är

$$\tau = \frac{1}{\omega_b} \sqrt{2^{1/m} - 1}$$

## Generell processmodell och regulatorstruktur



Kretsöverföring

$$L(s) = G_y(s)G_u(s)F_u(s)F_y(s)$$

Överföringsfunktionerna från den filterade referenssignalen  $r_f$  till  $y$  och  $u$

$$G_{r_f y}(s) = \frac{G_y(s)G_u(s)F_u(s)}{1 + L(s)} \quad G_{r_f u}(s) = \frac{F_u(s)}{1 + L(s)}$$

Referenssignalfiltret väljs som den approximativa inversen till  $G_{r_f y}(s)$ , d.v.s.

$$F_r(s) = G_{r_f y}^*(s, m, \tau)$$

se avsnittet *Approximativ invers* på föregående sida. Här är  $m \geq p_{G_{r_f y}}$  (polöverskottet för  $G_{r_f y}(s)$ ), och  $\tau$  väljs så att önskad bandbredd från  $r$  till  $y$  erhålls. Detta innebär att

$$G_{r y}(s) = F_r(s)G_{r_f y}(s) = G_{r_f y}^*(s, m, \tau)G_{r_f y}(s)$$

vilket innebär att  $G_{r y}(s) \approx 1$  upp till den eftersökta bandbredden.

### Enkel referenssignalhantering vid PID-reglering

$$U(s) = K_p \left( \left( 1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) (b R(s) - Y_m(s)) + \frac{1}{T_i s} (R(s) - Y_m(s)) \right)$$

Då  $b = 1$  återfås vanlig enhetsåterföring, medan  $b = 0$  medför att endast den integrerade referenssignalen påverkar styrsignalen.

### PID-regulator med lågpasfiltrering

PID-regulator med ett andra ordningens filter

$$F_{PID_f}(s) = \frac{K_i}{s} \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{1 + 2\zeta_f s\tau/\beta + (s\tau/\beta)^2}$$

1. Dimensionera först en vanlig PID-regulator  $F_{PID}(s)$ , se sid. 29.
2. Ersätt  $F_{PID}(s)$  med  $F_{PID_f}(s)$  där samtliga parametervärden kopieras och där  $\zeta_f = 0.5$ .
3. Integralförstärkningen  $K_i$  justeras sedan något så att kraven på  $M_S$  och  $M_T$  fortfarande uppfylls.



## 11 Dimensionering av regulatorer på tillståndsform

### Styrbarhet

Styrbarheten för en tillståndsmodell  $(A, B, C, D)$  kan undersökas genom att bilda styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{S} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Tillståndsmodellen är styrbar då

$$\text{rang } \mathcal{S} = n$$

Då antalet insignaler är ett ( $n_u = 1$ ) motsvaras detta krav av att  $\det \mathcal{S} \neq 0$ .

### Observerbarhet

Observerbarheten för en tillståndsmodell  $(A, B, C, D)$  kan undersökas genom att bilda observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Tillståndsmodellen är observerbar då

$$\text{rang } \mathcal{O} = n$$

Då antalet utsignaler är ett ( $n_y = 1$ ) motsvaras detta krav av att  $\det \mathcal{O} \neq 0$ .

### Tillståndsåterkoppling

1. Formulera systemet som ska regleras på tillståndsform. Om möjligt se till att tillståndsvariablerna har en direkt fysikalisk motsvarighet, eftersom man då oftare kan mäta samtliga tillståndsstorheter och därför kan genomföra tillståndsåterkoppling. Alternativt introduceras en observatör, om inte alla tillstånd är mätbara, se nästa avsnitt.
2. Kontrollera systemets styrbarhet, eftersom ett grundläggande krav för att erhålla önskad polplacering är att systemet är styrbart.
3. Bestäm den önskade karakteristiska ekvationen  $\alpha_c(s) = 0$  för det återkopplade systemet. För enklare system väljs förslagsvis väl dämpade komplexkonjugerade polpar. Redan väl placerade poler för systemet kan man också välja att ej flytta på, d.v.s. låta dessa poler ingå i  $\alpha_c(s)$ . Val av poler med hjälp optimering är ett kraftfullt och enkelt alternativ.
4. Identifiera koefficienterna  $\ell_1, \dots, \ell_n$  i radvektorn  $L_u$  så att

$$\det(sI - A + BL_u) = \alpha_c(s)$$

5. Bestäm överföringsfunktionen från  $r$  till  $y$

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL_u)^{-1}BK_r$$

och välj  $K_r$  så att  $G_{ry}(0) = 1$ , d.v.s. så att denna överföringsfunktionens lågfrekvensförstärkning blir ett.

6. Studera lämpliga överföringsfunktioner för det återkopplade systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BL_u)x(t) + BK_r r(t) + B_v v(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ u(t) &= -L_u x(t) + K_r r(t)\end{aligned}$$

i tids- och frekvensplanet för att kontrollera att önskade egenskaper erhålls. Notera också speciellt kretsöverföringen

$$L(s) = L_u(sI - A)^{-1}B$$

och tillhörande känslighetsfunktioner  $S(s)$  och  $T(s)$ .

### **Tillståndsskattning**

En observatör

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_y(y_m(t) - C\hat{x}(t))$$

erhålls enligt följande steg:

1. Kontrollera att systemet givet på tillståndsform  $(A, B, C)$  är observerbart, eftersom det krävs för att åstadkomma en observatör med godtycklig polplacering.
2. Bestäm den önskade karakteristiska ekvationen  $\alpha_o(s) = 0$  för observatören. För enklare system väljs förslagsvis väl dämpade komplexkonjugerade polpar. I kombination med tillståndsåterkoppling (se nästa avsnitt) bör observatörens dynamik vara något snabbare (längre avstånd från imaginäraxeln) än motsvarande dynamik för tillståndsåterkopplingen. Mätstörningar begränsar dock snabbheten hos observatören. Val av poler med hjälp optimering är ett enkelt alternativ, där hänsyn tas till mätstörningens omfattning i förhållande till processtörningens storlek.
3. Identifiera koefficienterna  $k_1, \dots, k_n$  i kolonnvektorn  $K_y$  så att

$$\det(sI - A + K_y C) = \alpha_o(s)$$

4. Studera skattningsfelet

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - K_y C)\tilde{x}(t) + B_v v(t) + K_y w(t)$$

speciellt den transienta insvängningen i tidsplanet då  $\tilde{x}(0) \neq 0$ , samt störningarnas inverkan i frekvensplanet, för att kontrollera att önskade egenskaper erhålls.

### **Tillståndsåterkoppling från skattade tillstånd**

Tillståndsåterkoppling från skattade tillstånd med hjälp av observatör erhålls enligt följande steg:

1. Beräkna tillståndsåterkopplingsvektorn  $L_u$ , och vid autonom observatör även förstärkningen  $K_r$ .
2. Beräkna observatörens förstärkningsvektor  $K_y$ .

3. Regulatorn ges av tillståndsmodellen

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= (A - BL_u - K_y C)\hat{x}(t) + \\ &\quad K_y y_m(t) + (BK_r + K_{r\hat{x}})r(t) \\ u(t) &= -L_u \hat{x}(t) + K_r r(t)\end{aligned}$$

Speciellt noteras regulatorns överföringsfunktion från den mätta utsignalen  $y_m$ , som är

$$U(s) = -F(s)Y_m(s) = -L_u(sI - A + BL_u + K_y C)^{-1}K_y Y_m(s)$$

4. Slutna systemets överföringsfunktion från  $r$  till  $y$  vid autonom observatör ( $K_{r\hat{x}} = 0$ ) blir

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL_u)^{-1}BK_r$$

I övrigt utnyttjas  $F(s)$  för att bestämma kretsöverföringen  $L(s) = G(s)F(s)$ , känslighetsfunktionen  $S(s) = 1/(1 + L(s))$  etc. på samma sätt som vid analys av reglersystem givna på överföringsfunktionsform.

## 12 Tidsdiskreta regulatorer

### Tidsdiskreta modeller

Differensekvation ( $h =$  samplingsintervallets längd)

$$y(kh) + a_1y(kh-h) + \dots + a_ny(kh-nh) = b_0u(kh) + b_1u(kh-h) + \dots + b_nu(kh-nh)$$

Z-transformen för en tidsdiskret signal  $y(kh)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{Z}\{y(kh)\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh)z^{-k}$$

Exponentialsignal

$$\mathcal{Z}\{e^{-akh}\} = \frac{1}{1 - e^{-ah}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-ah}}$$

Tidsförskjutning

$$\mathcal{Z}\{y(kh-lh)\} = z^{-l}Y(z)$$

Överföringsfunktion

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}}$$

Tidsdiskret tillståndsmodell

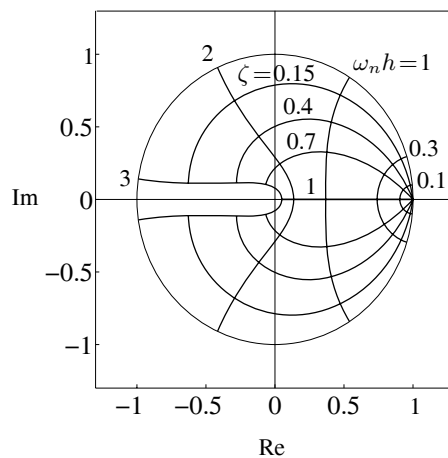
$$\begin{aligned} x(kh+h) &= A_dx(kh) + B_du(kh) \\ y(kh) &= C_dx(kh) + D_du(kh) \end{aligned}$$

Överföringsfunktion för en tidsdiskret tillståndsmodell

$$G_d(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d$$

### Relation mellan tidskontinuerliga och tidsdiskreta poler $z = e^{sh}$

Avbildning av komplexkonjugerat polpar  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$  på z-planet för olika värden på  $\zeta$  och  $\omega_n h$ :



## Diskretisering vid styckvis konstant insignal

Styckvis konstant insignal

$$u(t) = u(kh) \quad kh \leq t < kh + h$$

Integralprocess

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad G_d(z) = \frac{hz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Första ordningens process

$$G(s) = \frac{a}{s+a} \quad G_d(z) = \frac{(1-e^{-ah})z^{-1}}{1-e^{-ah}z^{-1}}$$

Överföringsfunktioner med reella icke-multipla poler kan alltid partialbråksuppdelas så att de får formen av en summa av första ordningens delsystem

$$G(s) = b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s+a_i}$$

som var och en diskretiseras enligt ovan.

En tidsdiskret motsvarighet till den tidskontinuerliga PID-regulatorn

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1+T_f s}$$

ges av överföringsfunktionen

$$F_d(z) = K_p + K_i \frac{hz^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{K_d}{T_f} \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-h/T_f}z^{-1}}$$

En tidskontinuerlig tillståndsmodell  $(A, B, C, D)$  motsvaras av en tidsdiskret tillståndsmodell  $(A_d, B_d, C, D)$ , där

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \exp \left( \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} h \right)$$

## Systemidentifiering

Med parametervektorn

$$\theta^T = [a_1 \quad \dots \quad a_{na} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{nb}]$$

och mätvektorn

$$\varphi^T(kh) = [-y(kh-h) \quad \dots \quad -y(kh-n_a h) \quad u(kh-h) \quad \dots \quad u(kh-n_b h)]$$

kan differensekvationen

$$y(kh) + a_1 y(kh-h) + \dots + a_{na} y(kh-n_a h) = b_1 u(kh-h) + \dots + b_{nb} u(kh-n_b h) + \varepsilon(kh)$$

formuleras som

$$y(kh) = \varphi^T(kh)\theta + \varepsilon(kh)$$

där  $\varepsilon(kh)$  representerar modellfelet som uppstår då denna modell inte lyckas beskriva det verkliga sambandet mellan insignalen  $u$  och utsignalen  $y$  på ett perfekt sätt.

Minsta kvadratmetoden innebär att kriteriet

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(kh)$$

minimeras med avseende på  $\theta$ . Den optimala lösningen  $\hat{\theta}$  ges av *normalekvationen*

$$\left( \sum_{k=1}^N \varphi(kh) \varphi^T(kh) \right) \hat{\theta} = \sum_{k=1}^N \varphi(kh) y(kh)$$

Summan till vänster om  $\hat{\theta}$  är en kvadratisk matris av dimensionen  $(n_a + n_b, n_a + n_b)$ , medan summan till höger är en vektor med  $(n_a + n_b)$  rader.

### Frekvensanalys

Frekvensfunktionen  $G_d(e^{j\omega h})$  erhålls genom att ersätta  $z$  med  $e^{j\omega h}$  i motsvarande överföringsfunktion  $G_d(z)$ . Den tidsdiskreta frekvensfunktionen ( $n = \text{heltal}$ ) är periodisk, eftersom

$$G_d(e^{j(\omega + n \frac{2\pi}{h})h}) = G_d(e^{j\omega h} e^{jn2\pi}) = G_d(e^{j\omega h})$$

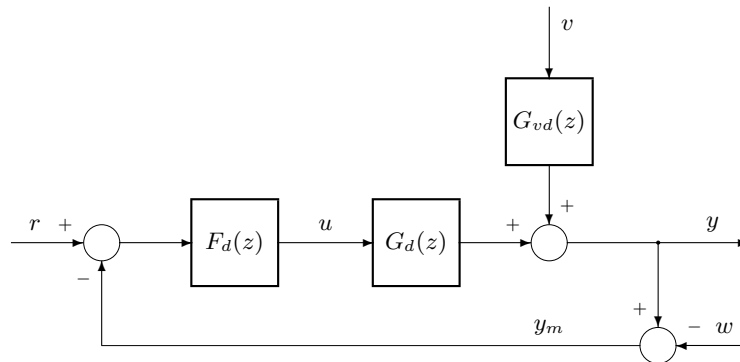
Lågfrekvensasymptoten blir

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_d(e^{j\omega h}) = G_d(1)$$

### Stabilitet

En tidsdiskret överföringsfunktion är stabil då polerna hamnar innanför denna cirkel, d.v.s. då samtliga poler  $z_i$  uppfyller villkoret  $|z_i| < 1$ .

### Tidsdiskret återkopplat system



Process

$$Y(z) = G_d(z)U(z) + G_{vd}(z)V(z)$$

Regulator

$$U(z) = F_d(z)(R(z) + W(z) - Y(z))$$

Kretsöverföring

$$L_d(z) = G_d(z)F_d(z)$$

### Känslighets- och komplementär känslighetsfunktion

$$S_d(z) = \frac{1}{1 + L_d(z)} \quad T_d(z) = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)}$$

De maximala beloppen för  $S_d(e^{j\omega h})$  och  $T_d(e^{j\omega h})$  ger stabilitetsmarginalmått  $M_S$  och  $M_T$ , där det minsta avståndet mellan kretsöverföringen och punkten  $(-1, 0)$  i Nyquistdiagrammet är  $1/M_S$ .

Approximativ försämring av fasmarginen vid tidsdiskret reglering jämfört med tidskontinuerlig reglering

$$\Delta\hat{\varphi}_m = -\frac{180^\circ}{\omega_s/\omega_c}$$

där  $\omega_c$  är amplitudkurvas överkorsningsfrekvens ( $|L(j\omega_c)| = 1$ ) och samplingsfrekvensen  $\omega_s = 2\pi/h$ .

Kompensering av processtörningar

$$G_{vyd}(z) = G_{vd}(z)S_d(z) = \frac{G_{vd}(z)}{1 + L_d(z)}$$

Styrsignalens känslighet för mätstörningar

$$G_{wud}(z) = F_d(z)S_d(z) = \frac{F_d(z)}{1 + L_d(z)}$$

### Val av samplingsintervall

Välj samplingsfrekvensen  $\omega_s = 2\pi/h$  så att

$$\frac{\omega_s}{\omega_b} = \frac{2\pi}{\omega_b h} = N \quad N = 20-50$$

där  $\omega_b$  är det återkopplade systemets bandbredd för den komplementära känslighetsfunktionen  $T_d(e^{j\omega h})$ .

### Polplacering

Process

$$G_d(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na}}$$

Regulator

$$F_d(z) = \frac{D(z)}{C(z)} = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{nd} z^{-nd}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{nc} z^{-nc}}$$

Kretsöverföringen blir då  $L_d(z) = B(z)D(z)/(A(z)C(z))$ . Med antagande om enhetsåterföring fås följande överföringsfunktioner för det återkopplade systemet

$$G_{ryd}(z) = \frac{L_d(z)}{1 + L_d(z)} = \frac{B(z)D(z)}{P(z)} \quad G_{vyd}(z) = \frac{G_d(z)}{1 + L_d(z)} = \frac{B(z)C(z)}{P(z)}$$

där polynomet  $P(z)$  uppfyller *polynomidentiteten*

$$P(z) = A(z)C(z) + B(z)D(z)$$

Önskad polplacering, exempelvis som en multipelpol av ordning  $m$  i  $z = p$ , innebär att

$$P(z) = (1 - pz^{-1})^m$$

Polynomidentiteten bestämmer  $C(z)$  och  $D(z)$ , där gradtalen

$$nc = nb - 1 \quad nd = na - 1$$

Gradtalet räknat i  $z^{-1}$  för polynomet  $P(z)$  får då inte överstiga  $na + nb - 1$ .

Integralverkan fås då

$$C(z) = (1 - z^{-1})C'(z)$$

vilket ger polynomidentiteten

$$P(z) = A'(z)C'(z) + B(z)D(z)$$

där  $A'(z) = A(z)(1 - z^{-1})$ . Gradtalen blir då  $nc' = nb - 1$  och  $nd = na' - 1$ .

### **Aliaseffekten**

En högfrekvent signal med frekvensen  $\omega > \omega_s/2 = \pi/h$  uppfattas efter sampling som en långsammare svängning med frekvensen  $\omega_0 \leq \omega_s/2$ . Mera exakt gäller för  $n = 0, 1, 2, \dots$  att

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega - n\omega_s & n\omega_s \leq \omega \leq (n+1/2)\omega_s \\ (n+1)\omega_s - \omega & (n+1/2)\omega_s \leq \omega \leq (n+1)\omega_s \end{cases}$$

### **Antialias-filter**

Aliasfenomenet undviks då ett antialias-filter filtrerar bort frekvenser  $\omega$  högre än *Nyquistfrekvensen*  $\omega_N = \omega_s/2$ . Ett andra ordningens analogt lågpasfilter med överföringsfunktionen

$$G_{LP}(s, \zeta, \omega_f) = \frac{\omega_f^2}{s^2 + 2\zeta\omega_f s + \omega_f^2}$$

bestäms av dämpningen  $\zeta$  och brytfrekvensen  $\omega_f$ . Antialias-filter med Butterworth-karakteristik av andra, fjärde och sjätte ordningen med bandbredden  $\omega_{bf}$  erhålls med följande seriekopplade kombinationer av andra ordningens lågpasfilter

$$G_f^2(s) = G_{LP}(s, 0.71, \omega_{bf})$$

$$G_f^4(s) = G_{LP}(s, 0.38, \omega_{bf})G_{LP}(s, 0.92, \omega_{bf})$$

$$G_f^6(s) = G_{LP}(s, 0.26, \omega_{bf})G_{LP}(s, 0.71, \omega_{bf})G_{LP}(s, 0.97, \omega_{bf})$$

För ett  $n$ :te ordningens Butterworth-filter ( $n = 2, 4, 6$ ) blir högfrekvensasymptoten

$$|G_f^n(j\omega)| = \left(\frac{\omega_{bf}}{\omega}\right)^n$$



### Styrsignalbegränsning och antiwindup

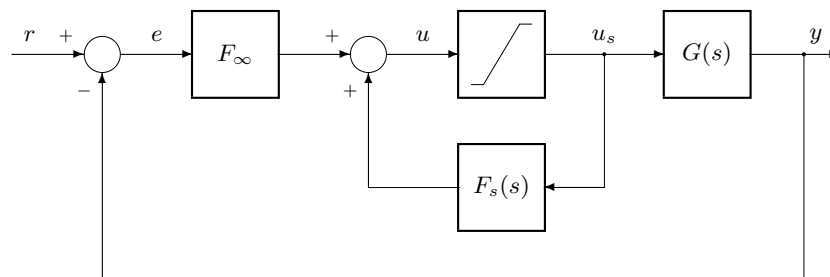
De följande delavsnitten är tillämpbara både för tidskontinuerliga och tidsdiskreta system. Antag en begränsad styrsignal

$$u_s = \begin{cases} u_{max} & u > u_{max} \\ u & u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ u_{min} & u < u_{min} \end{cases}$$

Antag dessutom att regulatorns täljar- och nämnarpolynom har samma gradtal (lika många poler och nollställen). Detta innebär att  $F_\infty = F(\infty) \neq 0$ , där  $F_\infty$  för tidskontinuerliga system motsvarar den tidigare introducerade högfrekvensförstärkningen  $K_\infty$ . Integratoruppvridding (windup) undviks genom att introducera överföringsfunktionen

$$F_s(s) = 1 - \frac{F_\infty}{F(s)}$$

i följande blockschema



Här antas att regulatorn  $F(s)$  har stabila nollställen, vilket innebär att  $F_s(s)$  är stabil.

### Antiwindup-funktion för regulatorer med lågpasfiltrering

För en regulator med lågpasfiltrering introduceras ett stabilt polynom

$$A_m(s) = (s + 1/T_s)^m$$

så att

$$F_\infty(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow \infty} (F(s)s^m)}{A_m(s)} \quad F_s(s) = 1 - \frac{F_\infty(s)}{F(s)}$$

där multipeln  $m$  väljs så att  $F(s)A_m(s)$  får samma nämnar- och täljargradtal. Tidskonstanten  $T_s$  väljs kort i förhållande till dynamiken för det återkopplade systemet.

### Antiwindup-funktion för regulatorer på tillståndsform

För regulatorer på tillståndsform, som bygger på tillståndsåterkoppling från skattade tillstånd  $\hat{x}(t)$ , erhålls naturligt antiwindup genom att i observatören introducera den begränsade styrsignalen  $u_s(t)$ . Regulatorn blir då på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= (A - K_y C)\hat{x}(t) + B u_s(t) + K_y y_m(t) + K_r \hat{x}(t) \\ u(t) &= -L_u \hat{x}(t) + K_r r(t) \end{aligned}$$

### Ryckfri övergång mellan automatisk och manuell mod

Regulatorstruktur med ryckfri övergång mellan manuell och automatisk mod, samt antiwindup-funktion för hantering av styrsignalbegränsningar:

