MATEMATISK STATISTIK

Extramaterial, kapitel 12: Blandade övningar

KERSTIN VÄNNMAN
ADAM JONSSON

Studentlitteratur

12 Blandade övningar

Detta kapitel består av övningar av varierande svårighetsgrad. Övningarna följer inte kapitelindelningen i boken och är inte heller sorterade efter svårighetsgrad.

12.1 Antag att A och B är händelser sådana att $P(A) = P(B) = 0.99$. Vi vet att om A och B är oberoende så gäller att

$$P(A \cap B) = 0.99 \cdot 0.99 = 0.9801.$$

Visa att om A och B är godtyckliga (inte nödvändigtvis oberoende) händelser med $P(A) = P(B) = 0.99$, så gäller att $P(A \cap B) \geq 0.98$.

12.2 Vid en jämförelse av brinntiden hos marschaller av två olika fabrikat, A och B, har man mätt brinntiden under 6 olika dagar. Varje dag valde man slumpmässigt en marschall av varje fabrikat. De yttre förhållandena såsom vind, luftfuktighet och temperatur varierade mellan de olika dagarna. Resultatet (enhet: minuter) blev följande för A:

217.4	553.5	351.6	422.4	319.8	444.5

För B blev resultatet (enhet: minuter) följande:

192.8	527.6	358.2	392.3	294.7	421.0

Beräkna ett 95 % konfidensintervall för den genomsnittliga skillnaden i brinntid mellan marschaller av typ A och marschaller av typ B, definierad som genomsnittlig brinntid för marschaller av typ A minus genomsnittlig brinntid för marschaller av typ B, under antagandet att en marschalls brinntid på en given dag kan beskrivas med en normalfördelad stokastisk variabel. Motivera tydligt ditt val av metod.

12.3 En biltillverkare säger i sin reklam att den genomsnittliga bränsleförbrukningen för en viss modell är $\mu = 9$ l/100 km vid blandad körning. En motororganisation misstänker att bränsleförbrukningen i själva verket är högre. För att undersöka saken provkörs under en längre tid 28 slumpmässigt utvalda bilar av modellen i fråga. Man finner att medelvärdet av bränsleförbrukningen under den tiden är $\bar{x} = 9.5$. Kan motororganisationen påstå att den har rätt om man är villig att ta 1 % risk att göra fel?

a) Besvara frågan genom att testa en lämplig nollhypotes mot en lämplig mothypotes under antagande att bränsleförbrukningen är normalfördelad med standardavvikelse $\sigma = 1.0$.

b) Beräkna styrkan i $\mu = 10.0$ för testet i a).

12.4 En fabrikant masstillverkar en vara där varje enhet med sannolikhet 0.10 blir defekt. En felfri enhet ger honom en vinst på 60 kr medan en defekt ger honom en förlust på 40 kr. Hur stor är sannolikheten att han på ett parti som består av 2 000 enheter får en vinst som är minst 97 000 kr?

12.5 I en industri har man en automatmaskin som serietillverkar detaljer av ett visst slag. Varje dag tar man ut 30 detaljer slumpmässigt och mäter hos dessa ett visst mått och beräknar medelvärdet. I slutet av varje arbetsvecka (5 arbetsdagar) sammanställer man medelvärdena för veckans olika dagar. Om minst två av medelvärdena kommer utanför intervallet $[29.997, 30.003]$ justeras maskinen. Bestäm sannolikheten att maskinen justeras om de enskilda detaljernas mått är oberoende och normalfördelade med väntevärde 30.00 och standardavvikelse 0.010.

12.6 En bryggmätningsmetod för kapacitans ger mätvärden som kan antas ha väntevärdet lika med den mätta kapaciteten och vara normalfördelade med standardavvikelsen $\sigma = 14$ pF. Hur många mätningar behöver man göra med denna metod, för att man ska kunna bestämma ett 95 % konfidensintervall för den mätta storheten som får en längd på högst 10 pF ?

12.7 En jordbävnings Richter-magnitud ξ har empiriskt befunnits vara approximativt exponentialfördelad, dvs. ξ har frekvens funktionen

$$f(x) = \frac{1}{a}e^{-x/a}, \qquad x \geq 0.$$

Parametern a har för södra Kalifornien uppskattats till 2.35. Den fruktansvärda jordbävningen i Long Beach i södra Kalifornien 1933 hade Richtermagnituden 6.3. Vad är sannolikheten att nästa jordbävning ska bli ännu kraftigare?

12.8 Vid tillverkning av reläer blir felfrekvensen 1 %. För att minska denna före försäljning låter man alla reläer gå igenom en kontroll. Vid denna kasseras felaktiga reläer med sannolikhet 0.90 och felfria med sannolikhet 0.02.

a) Vilken felfrekvens har man bland dem som går till försäljning?

b) Hur stor är felfrekvensen i den kasserade högen?

12.9 För att bestämma precisionen hos ett mätinstrument gjorde man 20 mätningar på en viss storhet varvid man fick $s = 10.2$. Bestäm ett 95 % ensidigt, uppåt begränsat, konfidensintervall för instrumentets standardavvikelse σ. Instrumentet kan antas ge normalfördelade mätvärden.

12.10 I en stokastisk modell finns 5 parametrar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_5$. För vardera parametern bildar man ett konfidensintervall med konfidensgraden 0.99.

a) Visa att konfidensgraden för påståendet att *alla* 5 parametrarna ligger inom sina konfidensområden är minst 0.95 (Minst 95 % simultant konfidensområde för parametrarna.)

b) Bestäm den simultana konfidensgraden om konfidensintervallen bestämts oberoende av varandra.

12.11 Vid ett elektroniklaboratorium behöver man ett antal spänningsdelare bestående av två lika motstånd i serie. En spänningsdelare anses användbar om de två motståndens resistanser skiljer sig med högst 22 ohm, dvs. beloppet av skillnaden i resistans är högst 22 ohm. Man tillverkar 100 spänningsdelare av motstånd som slumpmässigt plockas ur ett stort parti. De uttagna motståndens resistanser anses vara oberoende och $N(470{,}15)$ fördelade. Hur stor är sannolikheten att minst 75 av spänningsdelarna blir användbara.

12.12 Antalet fartyg som anlöper en viss hamn under en dag är Poissonfördelat med väntevärde 2.6. Hamnen har kapacitet att ta emot högst 5 fartyg per dygn utan att extra personal inkallas. Vad är sannolikheten att man under en 14-dagarsperiod behöver inkalla extra personal vid minst 3 dygn? Fartygen får antas anlöpa hamnen oberoende av varandra.

12.13 Två metoder A och B för att bestämma pH-värde i en lösning ska jämföras. Man misstänker att metod B genomgående ger högre värden än A. Detta vill man nu undersöka. På var och en av 9 olika lösningar görs två oberoende pH-bestämningar, en med vardera metoden. Låt ξ_i och η_i beteckna mätvärdet man får med metod A resp metod B. Skillnaderna $\zeta_i = \eta_i - \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, 9$, kan erfarenhetsmässigt antas oberoende och $N(\Delta, 0.4)$-fördelade. För att försöka visa att B ger genomgående högre värde än A väljer man mellan två test. Det ena testet är baserat på

$$\bar{z} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} z$$

där z_i där observerat värde på ζ_i. Det andra testet är baserat på d, där d är observerat värde på antalet skillnader ζ_i, som är större än 0.

a) Formulera en lämplig nollhypotes och en lämplig mothypotes för situationen. Bestäm sedan de två testen så att båda får signifikansnivå 0.09.

b) Man vill använda det test som har den största sannolikheten att ge ett riktigt beslut om $\Delta = 0.34$. Vilket av de två föreslagna testen bör man använda?

12.14 Från vardera av två fabrikanters produktion av betongelement togs ett slumpmässigt stickprov. Man mätte längden av dessa uttagna betongelement och fick följande resultat i cm:

Fabrikat 1:	20.3	19.8	20.7	20.1	19.9 .
Fabrikat 2:	19.9	20.1	19.7	20.3 .	

Observationerna av fabrikat 1 antas komma från $N(\mu_1, \sigma)$ medan de av fabrikat 2 antas komma från $N(\mu_2, \sigma)$. Alla parametrarna är okända. Bilda ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$.

12.15 En viss typ av benbrott har i en svensk normalgrupp en årlig frekvens av 257 på 100 000 personer. I en grupp på 623 epileptiker förekom ett år 5 sådana benbrott. Testa med lämpligt test på 1 % signifikansnivå om frekvensen hos epileptiker är signifikant högre än hos befolkningen i övrigt.

12.16 En tillverkare av trästegar, som tidigare använt lufttorkat trä till stegarnas sidstycken, har från en större trävarufirma fått ett erbjudande att istället köpa ugnstorkat virke. Detta skulle visserligen bli väsentligt billigare, men det ugnstorkade virket har lägre hållfasthet än det lufttorkade. Efter noggrant övervägande bestämmer sig stegfabrikanten för att övergå till ugnstorkat virke, om det vid försök visar sig att skillnaden i hållfasthet signifikant understiger 10 kp/cm^2. De därefter utförda proven gav följande resultat (hållfasthet i kp/cm^2):

Lufttorkat trä (x):	107.9	103.2	106.3	106.0	101.6
	105.0	103.6	103.3	104.6	102.1
Ugnstorkat trä (y):	94.5	99.2	94.0	95.8	96.4
	98.3	92.9	97.6		

Observationerna kan anses vara oberoende och och komma från normalfördelningar med väntevärde μ_1 resp μ_2 (båda okända) samt samma (okända) standardavvikelse σ.

a) Konstruera ett test som testar

$$H_0\colon \mu_1 - \mu_2 = 10 \quad \text{mot} \quad H_1\colon \mu_1 - \mu_2 < 10$$

på 5 % signifikansnivå.

b) Genomför testet.

12.17 I samband med processtyrning av en tillverkningsprocess brukar man ta ut och mäta fem enheter med jämna tidsmellanrum och sedan i ett s.k. styrdiagram pricka in medelvärdet av de fem mätvärdena. Så länge det inprickade värdet håller sig mellan styrgränserna anses processen vara under kontroll, men när en punkt hamnar utanför gränserna tas det som ett tecken på att ”någonting hänt”.

a) Om de fem mätvärdena $x_1, x_2, \ldots, x_5$ kan anses vara observationer från $N(\mu, \sigma)$ med μ och σ känt, från vilken fördelning är då

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i}^{5} x$$

en observation?

b) Om (vilket är vanligt) styrgränserna är $\mu + 3 \cdot \sigma/\sqrt{5}$ och $\mu - 3 \cdot \sigma/\sqrt{5}$, hur stor är sannolikheten för ”falskt alarm”, dvs. sannolikheten för att $\bar{x}$ hamnar utanför gränserna då $\bar{x}$ är observation av den i a) bestämda fördelningen.

c) Bestäm k så att sannolikheten för ”falskt alarm” med kontrollgränserna $\mu - k \cdot \sigma/\sqrt{5}$ och $\mu + k \cdot \sigma/\sqrt{5}$ blir 0.05.

d) Anta nu att väntevärdet μ genom en feljustering plötsligt ändras till $\mu + \sigma$. Hur stor är sannolikheten att detta omedelbart upptäcks genom det första inprickade medelvärdet $\bar{x}$ efter feljusteringen hamnar utanför gränserna $\mu - k \cdot \sigma/\sqrt{5}$ och $\mu + k \cdot \sigma/\sqrt{5}$?

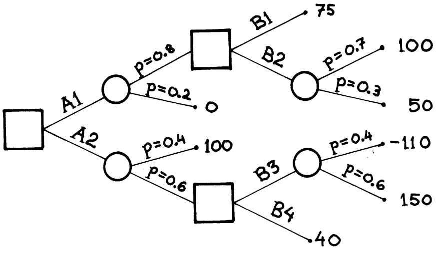
12.18 Låt s^2 vara stickprovsvariansen för ett stickprov av storleken 25 på en stokastisk variabel, som är $N(\mu, \sigma)$-fördelad. För att testa H_0: $\sigma^2 = 1$ mot H_1: $\sigma^2 < 1$ används s^2 som testvariabel. H_0 förkastas om $s^2 < k$, där k väljs så att testet får signifikansnivån 0.05. Bestäm k.

12.19 Antag att ξ_1 och ξ_2 är oberoende observationer från en exponentialfördelning med den okända parametern λ. Låt $\xi(1) = \min(\xi_1, \xi_2)$.

a) Bestäm $P(\xi(1) > x)$, (dvs. sannolikheten att både ξ_1 och ξ_2 är större än x) och med hjälp därav frekvensfunktionen för $\xi(1)$.

b) Bestäm (t.ex. med hjälp av resultatet av a) konstanten c så att $\mu^* = c\xi(1)$ blir en väntevärdesriktig punktskattning av väntevärdet μ.

12.20 I nedanstående s.k. spelträd markerar $A1$, $A2$, $B1$, $B2$, $B3$ och $B4$ en beslutsfattares möjliga drag. I varje grenände markeras vinsten V (enhet:kr).



Vilka drag väljer beslutsfattaren om han

a) vill maximera sin förväntade vinst?

b) med största sannolikhet vill vinna minst 100 kr?

12.21 Fångvaktarens dilemma: Tre fångar A, B och C får av sin fångvaktare reda på att en av dem på måfå har utvalts för att avrättas och de två andra ska friges. Fånge A, som är bevandrad i sannolikhetslärans djungler, inser att sannolikheten för att just han avrättas är $1/3$. Fånge A ber fångvaktaren att i förtroende för honom nämna en av de två andra (B eller C) som ska friges under förevändningen att detta inte skulle lämna honom någon väsentlig information, eftersom han vet att åtminstone en av de två andra ska friges. Fångvaktaren vägrar dock av etisk-moraliska skäl att gå med på detta, då han anser att sannolikheten för att A avrättas då skulle stiga till $1/2$, eftersom A skulle vara en av två fångar, av vilka en ska avrättas. Visa att sannolikheten för att A avrättas fortfarande är $1/3$ även om fångvaktaren skulle gå med på A:s begäran. I händelse av att A ska avrättas antas fångvaktaren lika gärna säga ”B friges” som ”C friges”.

12.22 I ett gatunät, där kvarteren är kvadrater, är A och B motsatta hörn i en kvadrat, som bildas av fyra kvarter. En person startar från A till B samtidigt som en annan person startar från B till A, varvid de går med samma konstanta hastighet. I ett gatuhörn väljer de alltid en sådan riktning, att de inte avlägsnar sig från målet. Om det finns två sådana riktningar, sker valet mellan dessa på måfå, så att sannolikheten för vardera riktningen är 0.5. Sök sannolikheten för att de två personerna möts.

12.23 Vid dåvarande Tekniska Högskolan i Luleå pågick ett projekt där man studerade underbenssvullnaden hos personer med stillasittande arbete. Man hade konstruerat en apparat för noggrann mätning av underbenens volym. Med denna mätte man volymsökningen under dagen av underbenen hos 6 personer dels under normala arbetsdagar, dels under dagar där personerna fick röra sig var 15:e minut, s.k. omväxlingsdagar. Man fick följande värden på volymsökningen (i %)

Försökspersonen	1	2	3	4	5	6
normaldag (x_i)	3.7	4.1	5.5	3.9	3.4	5.3
omväxlingsdag (y_i)	2.0	2.1	2.7	1.8	2.9	2.6

a) Kan man med någon grad av säkerhet påstå att det är skillnad på genomsnittlig volymsökningen vid normaldagar och omväxlingsdagar? Hur stor är i så fall skillnaden? Besvara frågorna genom att bilda ett symmetriskt 99 % konfidensintervall för den systematiska förväntade skillnaden Δ och sedan utgående från detta dra slutsatserna. Observationsvärdena kan antas normalfördelade så att x_i är ett observerat värde från en $N(\mu_i, \sigma_1)$-fördelning och y_i är ett observerat värde från en $N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$-fördelning.

b) Visa att konfidensintervallet som används i a) har den angivna konfidensgraden eller härled intervallet utgående från en lämplig fördelning.

12.24 Antag att man i föregående övning 12.23 inte kan förutsätta att mätvärdena kommer från en normalfördelning. För att då testa H_0: ingen genomsnittlig skillnad på volymsökningen mot H_1: genomsnittlig skillnad föreligger måste man göra ett icke-parametriskt test.

a) Testa på lämpligt sätt H_0 mot H_1 i utgående från mätvärdena i övning 12.23. Använd 1 % signifikansnivå.

b) Hur många försökspersoner måste minst användas för att man överhuvudtaget ska kunna besluta att H_0 ska förkastas på 1 % signifikansnivå om man använder testet i a)?

12.25 En viktig del av sannolikhetsläran i olika tekniska sammanhang (inte minst transportteknik) är köteorin. Som en enkel illustration på det antar vi att vi har ett transportband på vilket enheter anländer till en förpackningsstation. Tiderna mellan ankommande enheter antas vara oberoende och $Exp(\lambda)$. Vidare antar vi att den tid det tar att ta hand om en enhet är $Exp(\mu)$. Om det då bara finns en person vid förpackningsstationen måste λ och μ anpassas så att personen hålls jämt sysselsatt. Man kan visa att om ξ är antalet enheter vid stationen, så gäller efter lång tid att

$$P(\xi = k) = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

där konstanten

$$\rho = \frac{1/\lambda}{1/\mu} = \frac{E(\text{tid mellan ankomster})}{E(\text{tid för förpackning})} < 1.$$

Bestäm hur väntevärdet för tiden mellan ankommande enheter måste vara för att sannolikheten att personen är sysslolös ska bli högst 0.05 om $\mu = 0.1$.

12.26 Vid en tillverkning av en viss typ av pappersark är den önskade tjockleken 0.06 mm. Om den genomsnittliga tjockleken hos papperet överskrider eller underskrider detta värde måste maskinen justeras. För att kontrollera detta tas med jämna mellanrum ut 25 ark vars tjocklek mäts. På basis av dessa mätvärden $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ ska man sedan besluta om maskinerna ska justeras eller ej. Man vill inte justera i onödan eftersom varje justering ger ett visst produktionsbortfall. Man har bestämt att onödig justering får ske i högst 5 % av fallen. Av erfarenhet vet man att pappersarkens tjocklek kan betraktas som normalfördelad med väntevärde μ och standardavvikelse 0.003 mm.

a) När ska man besluta att maskinen ska justeras? Lös problemet genom att bestämma testet av H_0: $\mu = 0.06$ mot H_1: $\mu \neq 0.06$ på 5 % signifikansnivå. Det ska klart framgå när de olika besluten tas. Vad blir beslutet om $\bar{x} = 0.061$?

b) Vad blir sannolikheten att förkasta H_0 om $\mu = 0.059$?

12.27 Ett mått som brukar användas i samband med underhåll för maskiner är tillgängligheten (eller asymptotiska tillgängligheten)

$$A = \frac{E(\xi)}{E(\xi) + E(\eta)}$$

där ξ är tiden till fel för maskinen och η är reparationstiden. Man kan visa att A approximativt anger sannolikheten för att maskinen vid en slumpmässigt vald tidpunkt är i funktion. För en viss maskintyp är ξ exponentialfördelad med $\lambda = 0.01$. Hur stort får väntevärdet för reparationstiden högst vara om $A \geq 0.95$?

12.28 En tillverkningsprocess är sådan att om en tillverkad enhet är korrekt är nästa enhet defekt med sannolikhet 0.1 och om en enhet är defekt är nästa enhet korrekt med sannolikhet 0.8. Om i en följd av tillverkade enheter nr 1 är korrekt, vad är sannolikheten att

a) enhet nr 3 är korrekt?

b) enhet nr 4 är korrekt?

12.29 Vid en undersökning ska man bestämma brottgränsen hos betong för 16 slumpmässigt utvalda provstycken. Resultatet ska redovisas i form av ett tvåsidigt konfidensintervall för ”medianbrottgränsen”. Konfidensgraden ska vara minst 99 %. Konstruera en intervallskattning som uppfyller dessa krav samt beräkna det konfidensintervall som fås då mätresultaten blev (enhet: kilopounds per square inch)

5.6	5.3	4.0	4.4	5.5	5.7	6.0	5.6
7.1	4.7	5.5	5.9	6.4	5.8	6.7	5.0

Mätvärdena kan inte antas vara normalfördelade utan det enda antagande som kan göras är att fördelningen för brottgränsen är kontinuerlig.

12.30 Antag att mätvärdena i övning 12.29 kommer från en $N(\mu, 0.75)$-fördelning. Bestäm under dessa nya förutsättningar det i övning 12.29 efterfrågade 99 % konfidensintervallet.

12.31 Med hjälp av ett slumpmässigt stickprov om 10 värden på $\xi \in N(\mu_1, \sigma)$ erhöll Kalle följande 95 % konfidensintervall för μ_1: $[16.42, 18.28]$. På liknande sätt erhöll Tora med ett slumpmässigt stickprov om 12 värden på $\eta \in N(\mu_2, \sigma)$ följande 95 % konfidensintervall för μ_2: $[15.13, 16.78]$. Hjälp Kickan att konstruera ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ med användning av Kalles och Toras resultat. Standardavvikelsen σ är okänd.

12.32 Den tid (enhet: minut) som behövs för att betjäna en kund som anländer till ett lager kan betraktas som en summa av tre stokastiska variabler som är oberoende och exponentialfördelade med väntevärden 2, 3 respektive 6. Låt ξ vara den sammanlagda tid det tar att betjäna 100 kunder vilkas expeditionstider är oberoende. Beräkna med lämplig approximation det tal a som är sådant att

$$P(\xi \leq a) = 0.90.$$

12.33 ”En kedja är inte starkare än sin svagaste länk”. Påfrestningen (enhet: kN) som en länk tål antar vi vara en stokastisk variabel som är Rayleighfördelad med frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

a) Vad är sannolikheten att en kedja som består av 4 länkar brister om den utsätts för belastningen 500 N = 0.5 kN?

b) Man utsätter 5 kedjor av ovanstående typ för belastningen 0.5 kN. Vad är sannolikheten att exakt 3 kedjor brister? Händelser att olika länkar brister antas vara oberoende.

12.34 En TV-tillverkare köper kondensatorer i partier om 10 000 stycken från en underleverantör. Genomslagsspänningen hos en kondensator i ett parti kan betraktas som en stokastisk variabel som är $N(\mu, 50)$-fördelad. TV-tillverkaren kan inte godta kondensatorer där μ är mindre än 500 V. Underleverantören garanterar att μ är minst 500 V. TV-tillverkaren misstänker att underleverantören har fel och undersöker därför 100 kondensatorer ur varje parti och mäter genomslagsspänningen. För ett parti blev genomsnittsvärdet för de 100 kondensatorerna $\bar{x} = 490$. Kan TV-tillverkaren underkänna partiet om han är villig att ta en risk på 5 % att göra fel?

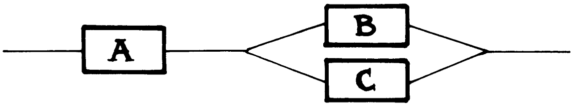
a) Besvara frågan genom att testa en lämplig nollhypotes mot en lämplig mothypotes. Det ska klart framgå vilka hypoteserna är.

b) Hur stor sannolikhet har man att, med det i a) använda testet, underkänna ett parti med $\mu = 485$?

12.35 I en tygaffär står expediterna Tora, Kalle och Pelle. De har olika åsikter om hur man lämpligast mäter upp 2 meter tyg med ett 1/2-metersmått. Tora mäter upp 4 st 1/2-meterslängder efter varandra. Kalle mäter upp 2 st 1/2-meterslängder efter varandra. Sedan tar han denna längd och viker över resten av tygrullen. På så sätt avsätter han en exakt lika lång tygbit till. Pelle mäter upp 1 st 1/2-meterslängd. Sedan tar han denna längd och viker över resten av rullen 3 gånger. På så sätt avsätter han 3 exakt lika långa tygbitar till. Man kan betrakta varje mätning med 1/2-metersmåttet som en stokastisk variabel med väntevärde 0.5 och standardavvikelse 0.01. Olika mätningar kan antas vara oberoende för alla tre expediterna. Vilken metod är lämpligast i den meningen att standardavvikelsen för den uppmätta ”2-metersbiten” (vars förväntade längd är 2 meter) är minst?

Ledning: Toras metod ger en sammanlagd längd som kan ses som summan av fyra (olika) oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Enligt Kalles metod blir längden 2 gånger summan av två (olika) oberoende och likafördelade stokastiska variabler. Pelles metod ger en längd som kan betraktas som 4 gånger en stokastisk variabel.

12.36 För att en pumpstation ska fungera fordras att komponent A fungerar samt att minst en av komponenterna B och C fungerar.



A, B och C har funktionssannolikheter 0.99, 0.90 respektive 0.80 och fungerar oberoende av varandra.

a) Bestäm sannolikheten för att stationen fungerar.

b) Vad blir funktionssannolikheten om vi parallellkopplar en pump D med B och C om D har funktionssannolikhet 0.80?

12.37 Ett bostadsområde om 1000 hushåll planeras. Sannolikheten för att ett hushåll har inget, ett, två eller tre barn under skolåldern kan antas vara 0.50, 0.30, 0.15 respektive 0.05. Hur många förskoleplatser ska planeras om sannolikheten för att alla barn ska kunna få en förskoleplats ska vara 90 % ?

12.38 För 10 patienter, som ingår i en undersökning, har man gjort arbetsprovsmätningar före respektive efter en period av fysisk träning. Man har därvid bestämt W_{170}, som är en väldefinierad fysiologisk variabel. Resultatet av arbetsprovet blev:

Patient nr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Före (x_i)	550	750	1100	950	950	900	650	1000	900	750
Efter (y_i)	620	790	1050	960	975	920	710	1010	870	780

Man anser sig kunna anta att observationsvärdena är normalfördelade, så att x_i är ett observerat värde från en $N(\mu_i, \sigma_1)$-fördelning och y_i är ett observerat värde från en $N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$-fördelning. Beräkna under dessa antaganden ett 95 % konfidensintervall för Δ.

12.39 Resultaten av åtta olika laborationsgruppers bestämning av den universella gravitationskonstanten G med hjälp av en torsionspendel framgår av följande tabell (enhet 10^{-11} Nm^2 /kg^2):

1	2	3	4	5	6	7	8
6.67	6.62	6.71	6.68	6.69	6.67	6.64	6.70

Mätvärdena kan anses komma från en normalfördelning med väntevärde G och okänd standardavvikelse.

a) Beräkna ett symmetriskt konfidensintervall för G med konfidensgraden 95 %.

b) Vad menas med att ett konfidensintervall, som det i a), har 95 % konfidensgrad?

12.40 Man vill bestämma svavelhalten i ett parti brännolja. Det går till så, att man tar ut fyra prover av oljan och analyserar varje prov två gånger, varpå man tar aritmetiska medelvärdet av de åtta analysvärdena. Felen vid provtagningarna är (i någon enhet) $N(0, 0.1)$ och analysfelen är $N(0, 0.2)$ och alla dessa fel är oberoende. Vad är sannolikheten för att absolutbeloppet av felet i slutresultatet blir högst 0.1?

12.41 Vid en viss högskola finns en kurs i tillämpad matematik som består av fyra delkurser. För att erhålla betyget godkänd på en delkurs behövs minst 19.5 poäng på antingen en tenta eller en omtentamen. En student har vid varje tentamenstillfälle en poängsumma som kan antas vara $N(20, 5)$-fördelad. Studenten skriver alla fyra tentorna och där så behövs en (och endast en) omtentamen per delkurs. Beräkna sannolikheten att studenten

a) missar såväl tentan som omtentamen på en delkurs.

b) blir godkänd på hela kursen i tillämpad matematik (dvs. godkänd på samtliga delkurser).

Avdelningen överväger att ändra system för att godkänna en delkurs på följande sätt. Förutom om man har minst 19.5 poäng på antingen en tenta eller en omtentamen erhåller man betyget godkänd på en delkurs om man har minst 16.5 poäng på både tentan och omtentamen på kursen. Vad blir då sannolikheten att studenten

c) missar såväl tentan som omtentamen på en delkurs?

d) blir godkänd på hela kursen i tillämpad matematik?

(Oberoende får förutsättas där så behövs. Tentor och omtentor förutsätts lika svåra.)

12.42 En vägningsmetod är sådan att mätfelet har väntevärdet 0 och variansen σ^2. Man väger med denna metod dels var och en av två guldklimpar och dels båda guldklimparna tillsammans. Låt dessa mätvärden vara ξ_1, ξ_2 och ξ_3.

a) Visa att för varje α, $0 \le \alpha \le 1$, gäller att

$$E\left(\alpha(\xi_1 + \xi_2) + (1 - \alpha)\xi_3\right) = \mu_1 + \mu_2$$

om μ_1 och μ_2 är de båda guldklimparnas verkliga vikter.

b) Bestäm α så att $V\left(\alpha(\xi_1 + \xi_2) + (1 - \alpha)\xi_3\right)$ blir minimal om de tre mätfelen är oberoende.

12.43 I en tillverkningsprocess med felsannolikheten p undersöker man tillverkade enheter, tills man får en defekt enhet. Låt ξ vara antalet undersökta enheter, när man för första gången får en defekt enhet, denna enhet medräknad. Antag även att felen förekommer oberoende av varandra. Bestäm sannolikhetsfördelningen för ξ.

12.44 Låt A, B och C vara tre händelser sådana att $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$ och $P(C) = 0.1$.

a) Visa att $0.5 \le P(A \cup B \cup C) \le 0.8$.

b) Antag nu speciellt att A, B och C är oberoende. Hur stor blir i så fall $P(A \cup B \cup C)$?

12.45 Den dagligen upplösta syrekoncentrationen vid en plats A strax nedanför ett industriutsläpp har mätts under 10 dagar med följande resultat (enhet: mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2

Antag att mätvärdena kommer från en $N(\mu, 0.4)$-fördelning. Härled ett symmetriskt 99 % konfidensintervall för μ.

12.46 Visa att för godtyckliga händelser $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gäller

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Denna olikhet kallas Booles olikhet.

12.47 Låt A och B vara oberoende händelser. Visa att

a) A^c och B är oberoende händelser,

b) A^c och B^c är oberoende händelser.

12.48 Till en fabrik har inkommit två stora kemikaliepartier. Man har tagit n_1 prover från det första och n_2 från det andra och bestämt halten av ett visst ämne i proverna. Mätvärdena $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ är observationer på ξ som är $N(\mu_1, \sigma)$ och $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ är observationer på η som är $N(\mu_2, \sigma)$. Här är μ_1, μ_2 och σ okända tal.

a) Härled ett konfidensintervall för medelhalten $\dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$.

b) Beräkna ett 90 % konfidensintervall för medelhalten då

$$\begin{array}{lll} \bar{x} = 24.2 & s_x = 1.6 & n_1 = 5 \\ \bar{y} = 28.5 & s_y = 2.3 & n_2 = 10 \end{array}$$

12.49 Antag att livslängderna $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ för n elektroniska komponenter är oberoende och exponentialfördelade med parameter λ. Bestäm sannolikhetsfördelningen för livslängden hos ett system av dessa komponenter under förutsättning att komponenterna

a) seriekopplats, b) parallellkopplats.

12.50 Man har två metall-legeringar M_1 och M_2 med smältpunkterna μ_1 och μ_2. Man gör en ny legering M_3 som består av 20 % M_1, och 80 % M_2. Om smältpunkten μ_3 för M_3 vet man av fysikaliska skäl att det är helt otänkbart att $\mu_3 > (\mu_1 + 4\mu_2)/5$. Man är intresserad av att visa att $\mu_3 < (\mu_1 + 4\mu_2)/5$ och gör därför 10 smältpunktsbestämningar på vardera av M_1, M_2 och M_3. Varje bestämning störs av ett mätfel som är $N(e, 0.3)$, där det systematiska felet e är okänt. Mätfelen vid de olika bestämningarna antas vara oberoende.

a) Formulera problemet som ett hypotesprövningsproblem. Ange nollhypotes, mothypotes, testvariabel och förkastelseområde. Varför gör det inget att e är okänt?

b) Antag att i själva verket $\mu_1 = 437.8$, $\mu_2 = 486.7$, $\mu_3 = 476.7$. Hur stor är sannolikheten att man upptäcker att $\mu_3 < (\mu_1 + 4\mu_2)/5$ om man utför det ovan angivna testet på nivån 0.05?

12.51 Tidsavståndet mellan två pulser från ett GM-rör som utsätts för strålning från ett visst radioaktivt preparat är exponentialfördelat med väntevärde 2 sekunder. För att studera förloppet kopplar man till GM-röret dels en pulsräknare, dels en dator som för varje puls beräknar och skriver ut tidsavståndet sedan föregående puls. Datorbearbetningen av varje puls tar 0.1 sekunder. Om en ny puls kommer medan bearbetningen av den föregående pågår så avbryts den första beräkningen och det tidsavståndet går förlorat. Man avser att studera 1000 pulser. Hur stor är sannolikheten att mer än 960 tidsavstånd skrivs ut?

12.52 En termometer antas ge en felvisning som är $N(\mu, \sigma)$-fördelad, dvs. när man mäter en viss temperatur θ får man ett mätvärde som är $N(\theta + \mu, \sigma)$-fördelat. Vid mätning av temperaturen hos isvatten och vattenånga, med de kända temperaturerna 0 respektive 100, fick man följande mätvärden

$$0.21, 0.03, 0.14, \ -0.02 \quad \text{respektive} \quad 100.08, 99.92, 100.12$$

a) Beräkna lämpliga punktskattningar av μ och σ.

b) Beräkna ett 95 % symmetriskt konfidensintervall för μ. (Alla mätvärdena bör utnyttjas.)

A Svar

12.2 $[6.33, 34.53]$, konf. grad 95 %.

12.3

a) $H_0 : \mu = 9.0 \quad H_1 : \mu > 9.0$.
H_0 förkastas på 1 % signifikansnivå ty $\bar{x} > 9.44$, dvs. motororganisationen kan påstå att den har rätt med 1 % felrisk.

b) $S(10.0) = 0.998$

12.4 0.987

12.5 0.08

12.6 $n \geq 31$

12.7 0.0685

12.8

a) $\frac{10}{9712} = 0.001$ b) $\frac{90}{288} = 0.31$

12.9 $[0, 4.38]$. konfidensgrad 95 %.

12.10

b) $0.99^5 = 0.951$

12.11 0.19 eller 0.14 (utan halvkorrektion), 0.16 (med halvkorrektion).

12.12 0.03

12.13

a) $H_0 : \Delta = 0 \quad H_1 : \Delta > 0$
Test I: Förkasta H_0 om $\bar{z} > 0.179$
Test II: Förkasta H_0 om $d > 6$

b) Test I bör användas ty $S(0.34) = 0.89$ för test I medan $S(0.34) = 0.74$ för test II.

12.14 $[-0.35, 0.67]$. konf. grad 95 %.

12.15 $H_0 : p = 257/100000 \quad H_1 : p > 257/100000$
H_0 kan ej förkastas på 1 % signifikansnivå då $P(\,\xi \geq 5 \mid H_0 \text{ sann}\,) > 0.01$

12.16

a) Förkasta H_0 om

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - 10}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < -t_{0.05}(n_1+n_2-2)$$

där

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

b) H_0 kan ej förkastas på 5 % signifikansnivå.

12.17

a) $N(\mu, \sigma/\sqrt{5})$ b) 0.27 %

c) $k = 1.96$

d) $1 - \Phi(3 - \sqrt{5}) + \Phi(-3 - \sqrt{5}) =$
$= 0.22$

12.18 $k = 0.6$

12.19

a) $P(\xi(1) > x) = e^{-2\lambda x}$,
$f(x) = 2\lambda e^{-2\lambda x}, x > 0.$

b) $c = 2$

12.20

a) $A1 - B2, E(V) = 68$

b) $A2 - B3, P(V \geq 100) = 0.76$

12.22 $\frac{3}{8} = 0.375$

12.23

a) $[-3.4, -0.5]$, eftersom intervallet inte innehåller 0 kan man med 99 % säkerhet påstå att det är skillnad på volymsökningen vid normaldagar och omväxlingsdagar.

12.24

a) H_0 kan inte förkastas på 1 % signifikansnivå om man använder teckentestet ty $P(\ \xi = 0 \mid H_0 \text{ sann }) > 0.005$.

b) minst 8

12.25 Mellan 9.5 och 10 tidsenheter.

12.26

a) Om $0.0588 < \bar{x} < 0.0612$ så förkastas inte H_0 och maskinen justeras inte.

Om $\bar{x} < 0.0588$ eller $\bar{x} > 0.0612$ så förkastas H_0 och maskinen justeras.

Om $\bar{x} = 0.061$ så kanH_0 inte förkastas på 5 % signifikansnivå.

b) $S(0.059) = 0.37$.

12.27 5.26 tidsenheter.

12.28

a) 0.89 b) 0.889

12.29 $[4.7, 6.4]$, konf. grad 99.5 %.

12.30 $[5.09, 6.06]$, konf. grad 99 %.

12.31 $[0.23, 2.56]$, konf. grad 95 %.

12.32 $a \approx 1190$

12.33

a) $1 - e^{-\frac{1}{8}} = 0.12$ b) 0.013

12.34

a) $H_0 : \mu = 500 \quad H_1 : \mu < 500$

H_0 kan förkastas på 5 % signifikansnivå ty $\bar{x} < 491.78$. TV-tillverkaren kan alltså underkänna partiet på 5 % signifikansnivå.

b) 0.91

12.35 Toras metod ty den ger den minsta standardavvikelsen $\sigma = 0.02$.

12.36

a) 0.9702 b) 0.98604

12.37 786

12.38 $[-7.9, 44.9]$, konf. grad 95 %.

12.39

a) $[6.648, 6.698]$, konf. grad 95 %.

b) Ett konfidensintervall har konfidensgrad 95 % om det är konstruerat med en metod som med sannolikhet 0.95 ger ett korrekt på stående.

12.40 0.75

12.41

a) 0.21
b) 0.39
c) 0.16
d) 0.49

12.42

b) $\alpha = \frac{1}{3}$

12.43 $P(\xi = x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, 3, \ldots$.

12.44

b) 0.64

12.45 $[1.70, 2.36]$, konf. grad 99 %.

12.48

a)

$$\frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) \cdot \\ \cdot s\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

där

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

b) $[25.33, 27.37]$, konf. grad 90 %.

12.49

a) $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda n x}$, $x \geq 0$,
$f(x) = \lambda n \mathrm{e}^{-\lambda n x}$, $x \geq 0$

b) $F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})^n$, $x \geq 0$,
$f(x) = \lambda n(1 - e^{\lambda x})^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \geq 0$

12.50

a) Låt x_i, y_i och z_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, beteckna mätvärdena vid bestämningarna av M_2, M_2 respektive M_3. Då är x_i, y_i, z_i observerade värden från $N(\mu_1 + e, 0.3)$,$N(\mu_2 + e, 0.3)$ respektive $N(\mu_3 + e, 0.3)$. Testa $H_0 : \mu_3 - (\mu_1 + 4\mu_2)/5 = 0$ mot $H_1 : \mu_3 - (\mu_1 + 4\mu_2)/5 < 0$. Förkasta H_0 om

$$\frac{\bar{z} - \frac{(\bar{x}+4\bar{y})}{5}}{\sqrt{\frac{0.09}{10} + \frac{1}{25}\left(\frac{0.09}{10} + \frac{16 \cdot 0.09}{10}\right)}} < -\lambda_\alpha$$

på signifikansnivån α.

b) 0.56

12.51 0.1

12.52

a) $\mu^*_{\text{obs}} = 0.069$, $\sigma^*_{\text{obs}} = 0.099$

b) $[-0.024, 0.161]$, konf. grad 95 %.