Errata

Gäller *Matematik och övningar för mikroekonomi*,
Louise Holm och Osvaldo Salas,
ISBN 978-91-44-12767-5.

På följande sidor är de korrigerade texterna markerade med rött.

Det finns regler som är användbara i algebran; konjugat- och kvadreringsregeln.

Regel	Exempel
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(3x + 2)(3x - 2) = 9x^2 - 4$
$(a + b)(a + b) = a^2 + b^2 + 2ab$	$(3x + 2)(3x + 2) = 9x^2 + 4 + 12x$
$(a - b)(a - b) = a^2 + b^2 - 2ab$	$(3x - 2)(3x - 2) = 9x^2 + 4 - 12x$

Utveckla (skriv utan parenteser)

1.3 a) $2(5 + 3)$ b) $-5(3 + 4)$ c) $(5 + 2)(4 + 3)$

1.4 a) $3(x + 1)$ b) $-a(y + 5)$ c) $(a + 1)(y - 3)$

1.5 a) $(2 + a)(2 - a)$ b) $(a + 15)^2$ c) $(x - 3)^2$

Utveckla (skriv utan parenteser)

1.6 a) $(2 - x)(3 - x) - (x - 1)$ b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)+\left(x+\frac{3}{2}\right)$

c) $(x + 2)(x + 4)$ d) $(x - 3)(1 - x)$

1.2.1 FAKTORUPPDELNING

Nu har du lärt dig att $x(4 + x) = 4x + x^2$. Om vi vänder på likheten får vi $4x + x^2 = x(4 + x)$. Då kan vi säga att vi har brutit ut faktorn x eller att uttrycket har *faktoriserats*.

EXEMPEL

$6xy - 9xy^2 = 3xy\,(2 - 3y)$

Tänk så här: Vad har termerna $6xy$ och $-9xy^2$ gemensamt? Svaret är $3xy$. Vi skriver därför först $3xy$ och därefter en parentes. I denna skriver vi det som ”fattas”. För att det ska bli $6xy$, skriver vi 2. Sen skriver vi det som fattas för att vi ska få $-9xy^2$, dvs. $-3y$.

Faktoruppdela (skriv som produkter)

1.7 a) $3x - 6$ b) $x^2 - x$ c) $15x - 5$

1.8 a) $pq - 2p$ b) $ab - 2b^2$ c) $5 + 100x$

Det inverterade talet till 3 är 1/3 eftersom 3 kan skrivas 3/1. När vi ska multiplicera ett heltal med ett bråk ska heltalet enbart multipliceras med täljaren i bråket och inte med nämnaren.

$$a\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{e}\right)=\frac{ab}{c}+\frac{ad}{e}$$

EXEMPEL

$$2\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{4}+\frac{8}{5}=\frac{6\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{8\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{30}{20}+\frac{32}{20}=\frac{62}{20}=\frac{31}{10}$$

1.11 a) $\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}$

1.12 a) $\frac{2}{25}\Big/\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{9}\Big/3$ c) $\frac{3}{7}\Big/\frac{5}{8}$ d) $\frac{3}{7}\Big/\frac{7}{3}$

1.4 Relationer och funktioner

Syftet med det här avsnittet är att introducera linjära funktioner. Vi börjar med koordinatsystemet och lär oss att rita funktioner först.

En variabel är en enhet som varierar. Ett företags produktion dag för dag under ett år är en variabel. En konstant är en enhet som inte varierar. Avståndet mellan Göteborg och Stockholm är en konstant. En enhet som är konstant har ett specifikt värde.

En funktion anger ett exakt samband mellan två eller flera variabler. Vi kallar vanligtvis den första variabeln för x och den andra för y.

Ett *koordinatsystem* består av två räta linjer. De kallar vi för koordinataxlar. Den vågräta kallas vanligen för x-axeln och den lodräta för y-axeln. Axlarnas skärningspunkt kallas för *origo*. Pilspetsarna anger åt vilket håll vi räknar de positiva värdena. Axlarna delar in koordinatsystemet i fyra *kvadranter*. Varje punkt i koordinatsystemet tilldelas ett *talpar* (x, y).

1.5.3 FORMEL FÖR ANDRAGRADSEKVATIONENS RÖTTER

För andragradsekvationer på formen $ax^2 + bx + c = 0$ där $a \neq 0$ gäller:

$$x = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ekvation (1)}$$

Om $a = 1$ fås den så kallade pq-formeln[1]:

$$x^2 + px + q = 0$$

som har lösningarna:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \text{ekvation (2)}$$

EXEMPEL

Lös andragradsekvationen $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

Lösning:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$	Vi använder ekvation (1) för att finna rötterna.
$x = -\dfrac{(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$	Vi ser att $a = 2$, $b = -3$ och $c = 1$.
$x = -\dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$	Förenkla.
$x = \dfrac{3}{4} \pm \dfrac{1}{4}$	Vi får de två lösningarna: $x_1 = 1$ och $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

1 pq-formeln fås genom att dividera $ax^2 + bx + c = 0$ med a.

EXEMPEL

Lös andragradsekvationen $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Lösning:

$x^2 + 5x + 6 = 0$ — Vi använder ekvation (2) för att finna rötterna.

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

Vi ser att $p = 5$ och $q = 6$.

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Vi förenklar och får de två lösningarna:
$x_1 = -2$ och $x_2 = -3$.

Observera att om vi får ett negativt tal under rottecknet saknar ekvationen reella rötter. Prova att ta roten ur ett negativt tal på din miniräknare. Vad händer?

EXEMPEL

Lös andragradsekvationen $x^2 - 4x + 12 = 0$.

Lösning:

$x^2 - 4x + 12 = 0$ — Vi använder ekvation (2) för att finna rötterna.

$$x = -\frac{(-4)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 12}$$

Vi ser att $p = -4$ och $q = 12$.

$$x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - 12}$$

Förenkla.

$$x = 2 \pm \sqrt{-8}$$

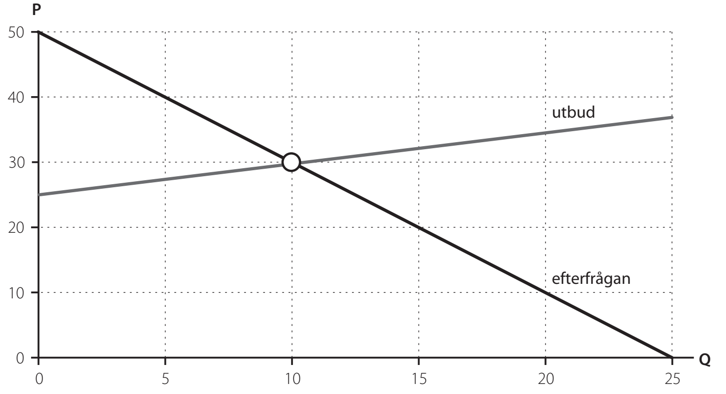
Ekvationen saknar reella rötter.

1.23 Lös ut x

a) $5x^2 - 80 = 0$ b) $x^2 - 25 = 0$ c) $(x - 4)^2 = 36$

1.24

Jämviktspris $P = 30$ och jämviktskvantitet $Q = 10$.



1.25

a) $(x, y) = (2, 5)$
b) $(x, y) = (1, 4)$
c) $(x, y) = (14, 25)$

1.26

a) $(x, y) = (3, 4)$
b) $(x, y) = (-4, -5)$

c) $(x, y) = \left(\frac{11}{23}, -\frac{19}{46}\right)$

1.27

a) $2x$
b) $10x^9$
c) $63x^8$
d) x
e) 0
f) 1
g) $3x^2 - 4$
h) $4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
i) $6x^2 + 8x$

2.13

a) $P = 500$ och $Q = 75$

b) $= 400$ och $Q = 50$

2.14

a) $P = 250$ och $Q = 600$

b) $= 225$ och $Q = 700$

2.15

a) $\varepsilon_P\,(P = 100) \approx 0{,}33$

Efterfrågan är oelastisk. Om priset höjs med 1 procent minskar efterfrågad kvantitet med 0,33 procent.

$\varepsilon_P\,(P = 300) = 3$

Efterfrågan är elastisk. Om priset höjs med 1 procent minskar efterfrågad kvantitet med 3 procent.

b) $\varepsilon_P\,(P = 200) = 1$

Efterfrågan är enhetselastisk vid priset 200.

c) Marginalproduktsfunktionen för arbetskraft visar vad som händer med produktionsmängden om företaget ökar mängden arbetskraft och håller mängden kapital konstant.

$$MP_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 0{,}36 \cdot 4L^{0{,}36-1} \cdot K^{0{,}64} = 1{,}44 \cdot L^{-0{,}64} \cdot K^{0{,}64} = 1{,}44\left(\frac{K}{L}\right)^{0{,}64}$$

4.5 KOSTNADER

Först kompletterar vi tabellen genom att använda följande definitioner:

FC är den del av *TC* som inte varierar med *q*, dvs. 40 eftersom *TC* = *40* då *q* = 0. Därmed kan vi fylla i hela kolumn 4.

VC är den resterande delen av *TC*: *TC* = *VC* + *FC*. Nu kan vi fylla i kolumn 3.

ATC beräknas: *ATC* = *TC*/*q*. Vi fyller i kolumn 5.

AVC beräknas: *AVC* = *VC*/*q*. Vi fyller i kolumn 6.

AFC beräknas: *AFC* = *FC*/*q*. Vi fyller i kolumn 7.

Marginalkostnaden *MC* är den extra kostnad företaget får då de ökar produktionen med en enhet. *MC* beräknas genom att ta förändringen i totalkostnaden delat med förändringen i produktionen. Vi fyller sista kolumnen genom att beräkna $MC = \Delta TC/\Delta q$.

q	*TC*	*VC*	*FC*	*ATC*	*AVC*	*AFC*	*MC*
0	40	0	40	–	–	–	
1	60	20	40	60	20	40	20
2	70	30	40	35	15	20	10
3	82	42	40	27,33	14	13,33	12
4	104	64	40	26	16	10	22
5	140	100	40	28	20	8	36
6	195	155	40	32,5	25,83	6,67	55
7	264	224	40	37,71	32	5,71	69
8	368	328	40	46	41	5	104
9	517	477	40	57,44	53	4,44	149

$q = 1\,000$	*VC*	*FC*
Löner	8 000	
Läder	4 000	
Kemikalier	9 000	
El	7 000	3 000
Marknadsföring		5 000
Räntor och avskrivningar		2 000

Tabellen innehåller kostnader för produktionen av 1 000 damväskor. Den rörliga kostnaden blir 28 (28 000/1 000) kronor per damväska, dvs.

$$TC = 28q + 10\,000$$

b) $$MC = \frac{dTC}{dq} = 28$$

$$ATC = \frac{TC}{q} = 28 + \frac{10\,000}{q}$$

$$AVC = 28$$

4.7 STINAS BADKLÄDER AB

a) Ta fram funktionerna och gör en tabell för värden på *q*, exempelvis q∈ [0,10]. Se diagrammet längre fram i lösningen.

$$AFC = \frac{FC}{q} = \frac{196}{q}$$

$$AVC = \frac{VC}{q} = q^2 - 10q + 50$$

Lösningsalternativ 2

Det andra alternativet är att söka minimipunkten på *AVC*-kurvan. Vi gör detta genom att sätta derivatan på *AVC* lika med noll och lösa ekvationen för q.

$$\frac{dAVC}{dq} = 0$$

$$2q - 10 = 0$$

$$q = 5$$

Därefter stoppar vi in $q = 5$ i *MC* för att ta reda på hur lågt priset kan sjunka på kort sikt innan företaget väljer att stänga ner sin produktion.

$$MC = 3 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 50 = 25$$

Skulle priset sjunka under $P = 25$ kommer företaget inte att bjuda ut några enheter.

c) Företaget kommer att producera där

$$\boxed{P = MC}$$

$$150 = 3q^2 - 20q + 50$$

$$3q^2 - 20q - 100 = 0$$

$$\left(q_1 = -\frac{10}{3}\right)$$

$$q_2 = 10$$

Vi väljer $q_2 = 10$ därför att *MC* skär priset (företagets *MR*) underifrån, vilket är en förutsättning för att villkoret om vinstmaximering ska gälla.

$$\pi = TR - TC = 150 \cdot 10 - (10^3 - 10 \cdot 10^2 + 50 \cdot 10 + 196) = 804$$

5.8

Ett företag säljer sin produkt på en fullständig konkurrensmarknad. Företagets totalkostnadsfunktion är följande:

$$TC = 4q^2 + 16q + 25$$

a) Vid vilket pris inträffar företagets ”break-even-point”?
b) Vad blir avsatt kvantitet och vinst för företaget vid priset 48?

5.9

På en marknad råder fullständig konkurrens med följande utbud och efterfrågan

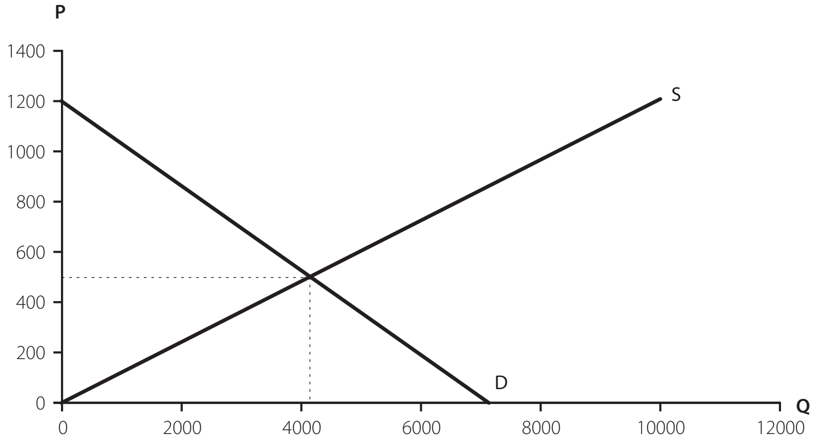
$$Q_D = 12\,400 - 248P$$

$$Q_S = 3\,440 + 312P$$

a) Vilket pris råder på marknaden och hur många enheter bjuds ut?
b) Ett av marknadens företag har totalkostnadsfunktionen

$$TC = q^2 + 2q + 80$$

Hur mycket kommer företaget att bjuda ut om det antas vinstmaximera?



5.7 FLERVALSFRÅGOR

Fråga 1 F
Fråga 2 D
Fråga 3 F
Fråga 4 F

5.8

a) 36
b) 4 och vinst 39

5.9

a) $P = 16$ och $Q = 8\,432$
b) $q = 7$

7.9

Företaget Solrosen är ett vinstmaximerande företag som producerar frön. Vid produktionen används olika kemikalier. Nedanstående tabell visar sambandet, på kort sikt, mellan produktionsresultat (*q*) och insatta enheter av den enda rörliga produktionsfaktorn, kemikalier (*K*). Produkten säljs för 80 kronor kilot.

K (kilo kemikalier)	*Q* (kilo majsfrön)
12	1 000
24	1 720
36	2 680
48	3 400
60	3 880
72	4 120
84	4 120

a) Hur många kilo kemikalier kommer företaget att använda och hur många kilo majsfrön kommer att produceras om företaget vill maximera sin vinst och priset på ett kilo kemikalier är 2 400 kr/kilo?
b) Företaget har fasta kostnader som uppgår till 40 000 kronor. Hur stor vinst kommer företaget att göra?

7.10

Ciderföretaget Glömda Äpplen är ett vinstmaximerande företag. Tabellen visar sambandet, på kort sikt, mellan produktionsresultat (*q*) och insatta arbetsenheter av den enda rörliga produktionsfaktorn, arbetskraft (*L*). Varje liter cider säljs för 120 kronor.

L	q
20	1 000
22	1 010
24	1 018
26	1 024
28	1 028
30	1 030

a) Hur många kommer företaget att anställa och hur många liter cider kommer att produceras om företaget vill maximera sin vinst och om priset på en arbetskraftsenhet är 180 kronor/timme?
b) Företaget har fasta kostnader som uppgår till 40 000 kronor. Hur stor vinst kommer företaget att göra?

7.11

Arbetsmarknaden för databranschen i en region består av flera dataföretag som konkurrerar om arbetskraften. Det råder alltså fullständig konkurrens på arbetsmarknaden. Efterfrågan och utbudet kan tecknas enligt följande

Efterfrågan $w = 210 - 0{,}5L$

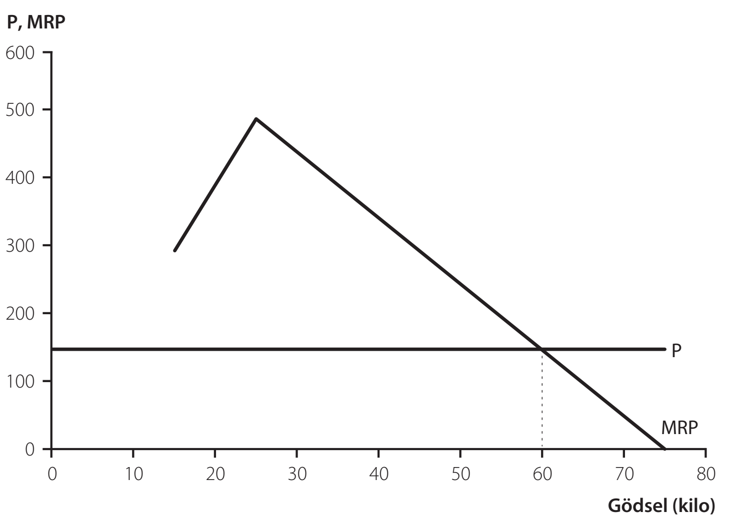
Utbudet $w = 1{,}25L$

a) Ange timlön och anställningsnivå vid jämvikt.
b) Om arbetsgivarna på denna arbetsmarknad sluter sig samman i ett arbetsgivareförbund, dvs skapar ett monopsoni, vad händer med timlönen och anställningsnivån?
c) Antag nu att arbetstagarna bildar en fackförening som förhandlar till sig en löneökning. Om fackföreningen strävar efter att uppnå samma lönenivå som det var i uppgift a), hur stor kan då löneökningen bli? Förklara hur utbudskurvan för arbetskraft kommer att se ut om fackföreningen uppnår både löne- och anställningsmålet?

Gödningsmedlet Natura i kilo (K)	Banan i kilo (q)	MP_K	MRP_K
10	100		
20	250	15	$15 \cdot 20 = 300$
30	500	25	$25 \cdot 20 = 500$
40	700	20	$20 \cdot 20 = 400$
50	850	15	$15 \cdot 20 = 300$
60	950	10	$10 \cdot 20 = 200$
70	1 000	5	$5 \cdot 20 = 100$
80	1 000	0	$0 \cdot 20 = 0$

Företaget vinstmaximerar då priset på produktionsfaktorn Natura ($P_K = 150$) är lika med marginalproduktens värde (MRP_K). I figuren ser vi att vinstmaximering inträffar där priset på Natura (150 kronor) sammanfaller med MRP_K-kurvan.

Företaget kommer att producera 950 kilo banan då vinstmaximering sker där $P_K = MRP_K = 150$. I tabellen ser vi att när MRP_K är lika med 150, används 60 kilo Natura och det produceras 950 kilo banan.



7.9

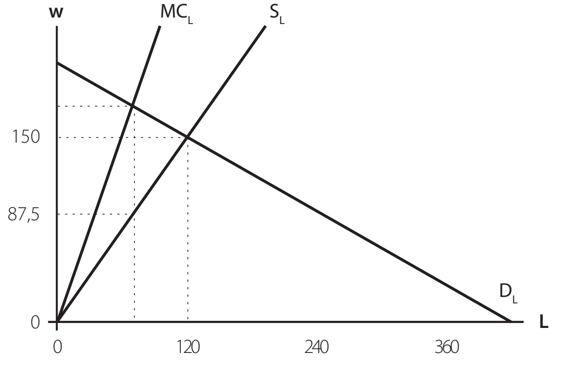
a) 60 kilo kemikalier och 3 880 kilo majsfrön
b) 126 400 kronor

7.10

a) 28 anställda och 1 028 liter
b) 78 320 kr

7.11

a) $w = 150$ och $L = 120$
b) $L = 70$ och $w = 87{,}5$
c) Om fackföreningen tvingar företaget att anställa till minimilönen i a)-uppgiften ($w = 150$), blir löneökningen 62,50 (= 150 – 87,50). Den nya utbudskurvan är den streckade horisontella linjen från $w = 150$ fram till jämvikten $S_L = D_L$. Därefter följes den ursprungliga utbudskurvan (S_L).



Formel för andragradsekvationens rötter
För andragradsekvationer på formen $ax^2 + bx + c = 0$ där $a \neq 0$ gäller:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ekvation (1)}$$

Om $a = 1$ erhålls den så kallade pq-formeln[1],

$x^2 + px + q = 0$

som har lösningarna:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \text{ekvation (2)}$$

Deriveringsregler

Regel 1 $\quad y = f(x) = c \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 0$

Regel 2 $\quad y = f(x) = cx \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = c$

Regel 3 $\quad y = f(x) = cx^n \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$

Regel 4 $\quad y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx} \pm \dfrac{dg(x)}{dx}$

Procent

$$\%\Delta x = \frac{\text{förändringen}}{\text{det ursprungliga}} \cdot 100 = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100$$

Areaberäkningar

Arean av en *rektangel* $\quad A = b \cdot h$

Arean av en *triangel* $\quad A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

1 pq-formeln fås genom att dividera $ax^2 + bx + c = 0$ med a.