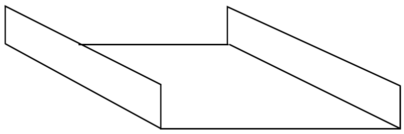
Extra övningsuppgifter 7 — 25/2 1998

12.1 För att transportera vatten ska man bygga en öppen ränna med rektangulärt tvärsnitt. För konstruktionen använder man en kopparplåt med bredden 0.500 m. Plåten måste böjas (med rät vinkel) för att forma rännan. Beräkna höjden och bredden på tvärsnittet så att maximalt med vatten kan transporteras längs rännan.



12.2 En rektangel (som ligger i första kvadranten) har två av sina hörn på grafen till

$$y = 8x - 12 - x^2 .$$

De båda övriga hörnen ligger på x-axeln. Bestäm rektangelns största möjliga area och omkrets.

12.3 Bestäm riktningskoefficienten för den tangent till kurvan

$$y = 2x - 3 - 4x^2 - x^3$$

som har störst lutning.

12.4 Ett 3.0 m högt staket ligger 1.0 m från en hög (vertikal) vägg. Bestäm längden av den kortaste stege som kan lutas mot väggen och sträcka sig över staketet.

12.5 Bestäm alla extrempunkter och extremvärden till funktionen $y = 2^{3x} - 3x + 4$.

12.6 Bestäm max- och minpunkter till funktionerna

(a) $y = xe^{-x^2}$ (b) $y = x\sin(\ln x)$ (c) $y = \arctan(x^2 - 2x)$

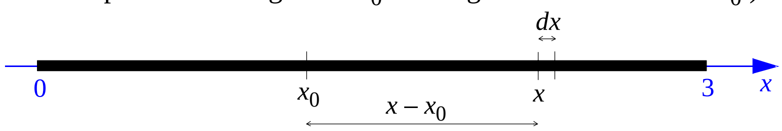
13.1 Ett staket byggs längs kurvan $y = x(10 - x)$ i intervallet $0 \le x \le 10$ (längdenhet meter). Staketpinnarna ställs vinkelrätt upp från xy- planet. Staketpinnarnas höjd ges av formeln

$$h(x, y) = \frac{1}{40}(50 + x - y) \qquad \text{(gäller i varje punkt } (x, y) \text{ på marken)}$$

(a) Bestäm staketets lägsta respektive högsta höjd.
(b) Ange, med en integral, staketets area. (Ta gärna fram ett närmevärde med räknare/dator.)
Ledning till (b): Se övning 13.8 i boken.

13.2 En tre meter lång rak stav, som läggs i intervallet $0 \le x \le 3$ på en tallinje, har densiteten $\rho(x) = 1 - 0{,}2x$ (enhet kg/m). Bestäm stavens massa.

13.3 Vi skall bestämma masscentrum för staven i föregående uppgift. I detta endimensionella fall är masscentrum ett x-värde mellan 0 och 3. Kalla detta x-värde för x_0. Hävarmskraften över en liten del av staven, mellan x och $x + dx$, är lika med massan dm gånger avståndet från x till x_0. (Avståndet räknas positivt till höger om x_0 och negativt till vänster om x_0.)



Uttryckt i differentialer gäller

$$dF = (x - x_0) \cdot dm = (x - x_0) \cdot \rho(x) \cdot dx$$

För masscentrum gäller att de sammanlagda hävarmskrafterna till vänster och till höger om x_0 skall ta ut varandra:

$$\int_0^3 dF = 0$$

Bestäm x_0 för den aktuella staven. *Ledning:* Utveckla integralen. Kom ihåg att x_0 är konstant.

13.4 I två och tre dimensioner kan masscentrum bestämmas enligt samma grundläggande princip som beskrivs i förra uppgiften. För en tvådimensionell (plan) platta gäller att koordinaterna (x_0, y_0) bestäms av villkoren

$$\iint (x - x_0) \cdot \rho(x, y)\, dxdy = 0 \qquad \text{respektive} \qquad \iint (y - y_0) \cdot \rho(x, y)\, dxdy = 0$$

Här betecknar $\rho(x, y)$ plattans densitet (viktenhet/areaenhet). Integralernas gränser bestäms som vanligt av plattans utseende.
(a) Bestäm masscentrum för en homogen triangulär platta (sätt $\rho(x, y) = 1$) med hörn i punkterna (0,0), (0,3) och (5,0).
(b) Bestäm masscentrum för en inhomogen triangulär platta med hörn i punkterna (0,0), (0,3) och (5,0) (längdenhet cm), då densiteten ges av formeln $\rho(x, y) = x$ (g/cm^2).

13.5 Bestäm masscentrum för den homogena platta som begränsas av x-axeln, linjen $x = 4$ och kurvan $y = \sqrt{x}$.

13.6 Beräkna följande integraler genom att byta integrationsordning.

(a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 e^{y^3}\, dy\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_{2y}^6 \frac{\sin x}{x}\, dxdy$

Facit till extra övningsuppgifter 7

12.1 Tvärsnittets höjd är 0.125 m och bredd är 0.250 m

12.2 Största arean är $\frac{32\sqrt{3}}{9}$ (a.e.) och största omkrets är 10 (l.e.)

12.3 $\frac{22}{3}$

12.4 5.4 m

12.5 Minpunkt: $x = -\frac{\ln(\ln 2)}{3\ln 2}$ Minvärde: $\frac{1}{\ln 2}(1 + \ln(\ln 2)) + 4$

12.6 (a) $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (min) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (max)

(b) $x = e^{-\frac{\pi}{4} + n\pi}$ (max om n jämnt, min om n udda) (c) $x = 1$ (min)

13.1 (a) 74 cm resp. 150 cm (b) $\int_0^{10} \frac{1}{40}(50 - 9x + x^2)\sqrt{1 + (10 - 2x)^2}\,dx \approx 54{,}6$ (m^2)

13.2 2,1 kg

13.3 $\frac{9}{7} \approx 1{,}29$

13.4 (a) $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$ (b) $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$

13.5 $(x_0, y_0) = \left(\frac{12}{5}, \frac{3}{4}\right)$

13.6 (a) $\frac{1}{3}(e^8 - 1)$ (b) $\frac{1}{2}(1 - \cos 6)$