Lära och undervisa Matematik från förskoleklass till åk 6

Ledning för att lösa problemen i Övningar för kapitel 5, sid 138-144

Avsikten med de ledtrådar som ges nedan är att peka på möjliga vägar mot lösningar till problemen och att ge tillfälle till reflektion över både processen och de slutsatser som kan dras. Vilka didaktiska och matematiska lärdomar kan man dra? Och är dessa problem, som främst riktar sig mot läsaren, kanske även användbara i undervisningen?

1. Arvet ska delas i tre andelar som ges som bråk. Vad händer om man adderar dessa bråk, och hur förklarar resultatet den vise mannens "trick"?
   Blev arvet rättvist uppdelat eller ej? Försök finna argument för båda ståndpunkterna!

2. Man kan prova sig fram, t.ex. genom att utgå från antalet enkronor. Om man har 10 enkronor så blir det 20 tiokronor och 7 femkronor (totalt 37 mynt). Men summan blir då 245 kr, vilket är för mycket. Minska eller öka antalet enkronor och se vad som händer. Till slut finner man den riktiga kombinationen.
   Man kan även använda en konventionell ekvation, där man t.ex. antar att antalet enkronor är x och sedan uttrycker antalen tiokronor och femkronor med hjälp av detta. Balansera ekvationen på summan i kronor!

3. Prova att decimalutveckla bråket $\frac{1}{7}$. Vad upptäcker man (Jfr sid. 117 i boken)?
   På samma sätt kan man utveckla $2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$ osv. Bildar man ett heltal av den sexsiffriga perioden, så får man samma effekt. Det intressanta är när man kommer till $7 \cdot \frac{1}{7} = \frac{7}{7}$.
   Fundera över varför motsvarande heltal ger enbart nior!

4. Parenteserna kan beräknas var för sig. Man får då en lång bråkmultiplikation. Kanske kan man göra lite listiga förkortningar innan man multiplicerar samman alla bråken?

5. Ett sätt är att göra kvalificerade gissningar i tabellform. Vi kan utgå från Rudolf. Om summan av inkomsterna ska bli hela kronor, så måste hans arbetstid vara jämnt delbar med 20 (varför?).
   Om vi börjar med just 20, så har vi då att mamma Esters och pappa Axels arbetstider sammanlagt ska vara 80 timmar, och att 5 gånger pappas arbetstid plus 1 gånger mammas ska bli 99 kr. Går det att finna arbetstider för dem som passar in på båda villkor samtidigt? Om inte, varför då?
   Sedan går man vidare med att på samma sätt prova 40, som är nästa multipel av 20 osv.
   En lösning finns, men stackars lille Rudolf!

   En annan variant är att använda ekvationer. Om man antar att arbetstiderna för pappa, mamma och Rudolf är x, y resp. z timmar, får man följande ekvationssystem:
   $$\begin{cases} 5x + y + 0{,}05z = 100 \ (\mathit{lönen}) \\ x + y + z = 100 \ (\mathit{antal\ tim}) \end{cases}$$

Observera att systemet har två ekvationer, men tre obekanta. Vi söker enbart heltalslösningar, och det finns bara en enda sådan. Vad kan man göra? Ett sätt är att subtrahera den undre ekvationen från den övre. Man får då efter lite omskrivningar:

$x = \frac{0,95}{4} z$

Vilket är nu det minsta heltal z, som gör att även x blir ett heltal? När detta är funnet är resten av lösningen enkel.

6. Även här finns det olika angreppssätt. Ett är följande: Om kvadraten på summan är 576, vilken är då summan av de båda talen? Med prövning finner man sedan de två, vars kavadrater har summan 290.
   Ett annat är att kalla talen x och y, och sedan lösa ekvationssystemet som bildas:
   $\begin{cases} (x+y)^2 = 576 \\ x^2 + y^2 = 290 \end{cases}$ (det finns flera olika sätt!)

7. Här är nog baklängesräkning det lättaste. Man börjar med de 24 kr som han till sist gav djävulen, och sedan går man igenom transaktionerna tvärtom. Annars går förstås ekvationslösning också bra.

8. Börja med att göra en tabell för siffrorna 0 – 9, och passa sedan in bokstäverna successivt. För att uppgiften ska kunna lösas, får inte två bokstäver betyda samma siffra! Sedan får man försöka fundera ut var det kan finnas minnessiffror. Dessa framgår ju inte av uppställningen.
   Det är ju klart att M = 1, eftersom summan av två ensiffriga tal inte kan bli 20 eller mer, inte ens med minnessiffra 1 tillagd. Eftersom M också finns i MORE, så måste O = 0 och S = 9 för att additionen ska stämma (O i MORE förhindrar att det finns en minnessiffra, och O kan inte vara 1, eftersom den siffran redan är upptagen).
   Det ger att N = E + 1 (minnessiffra måste finnas!), samt att antingen N + R = E + 10 eller N + R + 1 = E + 10, beroende på minnessiffra eller ej. Den ena av dessa måste uteslutas, eftersom den ger att R = 9. Denna siffra är ju redan upptagen. Då blir R klar och man vet om man har en minnessiffra eller ej.
   Slutligen får man placera in E, N och D i sin tabell så att villkoret med minnessiffran uppfylls, och då blir också Y klar. Det finns bara en korrekt lösning!

9. Prova att göra det systematiskt: 1 och 2 går ju inte, men 3 = 1 + 2. Går det med 4?
   5 = 2 + 3, 6 = 1 + 2 + 3, osv. Vissa kan faktiskt skrivas som en sådan summa på mer än ett sätt, t.ex. 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 7 + 8. Men andra går inte alls. Försök finna ett mönster hos dessa!
   För att förklara det hela kan man fundera på udda och jämna tal samt den formel som finns för aritmetiska serier. Den säger att summan är antalet termer gånger summan av den första och sista termen, alltsammans delat med 2. Hur stämmer detta in för de tal som hittats i mönstret ovan?

10. Ett tvåsiffrigt tal som kastas om har samma siffror och adderar man dem så får man samma summa för tiotalen som för entalen. Då måste summan vara delbar med 11, även om man har tiotalövergång.
    Man kan representera ett tvåsiffrigt tal med 10a + b, där a och b är ensiffriga tal. Det omkastade talet blir då 10b + a, och summan av talen efter förenkling 11a + 11b. Om man bryter ut 11, så får man 11(a + b), och påståendet är bevisat.
    För tresiffriga tal kan man sätta 100a + 10b + c, omkastat 100c + 10b + a. Summan blir 101a + 20b + 101c, vilken inte har någon allmän faktor man kan bryta ut (101 är primtal). Försöker man med differensen får man intressanta resultat. Prova några olika, både två- och tresiffriga! Ser du något mönster? Tänk på delbarhet och förklara varför samma regel gäller för två- och tresiffriga tal, och för övrigt för tal med vilket antal siffror som helst!

11. Om vi lägger sluttalet 1000 000 åt sidan så har vi en miljon sexsiffriga tal att summera, om vi också sätter ut nollor i alla positioner (talen 000000, 000001, 000002, … , 999999). man tänka sig sex stycken "boxar" som innehåller entalssiffra, tiotalssiffra osv. till hundratusentalsiffra. Hur många gånger förekommer siffran 1 i var och en av "boxarna", siffran 2, siffran 3 osv.? Vad blir då summan av de en miljon ensiffriga talen i varje "box"? Hela summan, inklusive ettan i 1000 000 blir sedan lätt att beräkna.

12. Gå systematiskt till väga och fundera på hur 4, 6 osv. kan skrivas: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 5 + 5 (men kanske även på ett annat sätt?).
    Fortsätt att systematiskt prova de jämna och udda talen, och snart finner du flera som kan skrivas på två sätt och så småningom tre eller flera sätt!

13. Det finns två grundlösningar till problemet, av vilka den ena tar lite längre tid att genomföra. Vänd först båda timglasen samtidigt. När 4 min-glaset har runnit ut, återstår 3 min i det andra. Om man då vänder 4 min-glaset, så återstår 1 min i det när 7 min-glaset runnit ut. osv. Det gäller att manövrera så att man i ett visst läge antingen har 5 min kvar i 7 min-glaset eller 2 min i 4-min-glaset. Då lägger man i äggen. Sedan är det bara att låta den tiden gå plus en vändning till med det andra glaset (5 + 4 = 9, 2 + 7 = 9).
    Vill man använda algebra kan man anta att man gör x antal vändningar med 7 min-glaset och y med 4 min-glaset. Då ska man finna positiva heltalslösningar antingen till $7x - 4y = 9$ eller till $4y - 7x = 9$. Dessa ger med relativ små tal x ooch y de två grundsvaren på äggkokningsproblemet. Sedan finns det förstås fler lösningar till problemet som bygger på dessa två, men de tar ännu längre tid. Fundera på hur samtliga lösningar kan anges!

14. Eftersom man inte vet antalet siffror i talet, så är det enklast att ta fram siffrorna en och en. Detta kan ske antingen framifrån eller bakifrån i talet.
    Framifrån: Produkten av talet och fyra börjar på 6. Eftersom 4 går 1 gång i 6, så måste talet börja på 1. Men då börjar alltså produkten på 61, och 4 går 15 gånger i 61. Produkten börjar således på 615, och 4 går 153 gånger i det, osv. Man fortsätter så här tills man får siffran 6, och då är talet avslöjat.
    Bakifrån: Om talet slutar på 6, så slutar produkten på 4 ($4 \cdot 6 = 24$). Men då slutar talet

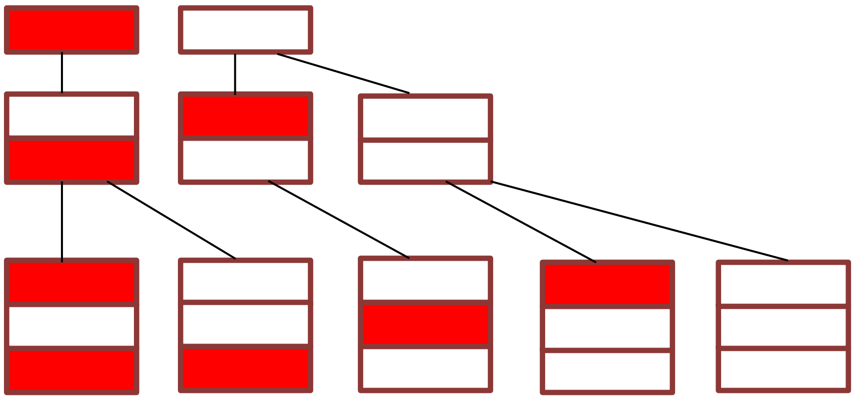
alltså på 46 och produkten på 84 ($46 \cdot 4 = [1]84$). Talet slutar då på 846 och produkten på 384, osv.

15. Talföljderna a. och b. är *aritmetiska*, dvs. de ökar eller minskar med samma tal hela tiden.
I d. följer nämnarna en aritmetisk följd, och därför kallas denna *harmonisk*.
Följden c. är geometrisk, dvs varje tal är föregående multiplicerat med samma tal hela tiden.
I följden e. kan man prova att minska alla talen med ett. Vad ser man då? Finns det något liknande för följden f.?
Ledtråd för g.: Fibonacci.

16. 1 våning:

2 våningar:

3 våningar:



osv. Prova att bygga vidare!

17. En viktig grundprincip i matematik är att man aldrig får dividera med noll. Men på något ställe i "beviset" gör man just det. Försök finna var! Allt som står efter detta ställe är alltså nonsens.

18. ***Tänt var det här!***
Man kan börja med en lite kortare lamprad, förslagsvis bara 20 lampor, och föra ett protokoll över vilka som tänds och släcks. Man då ana ett mönster som man sedan kan kontrollera med lite fler lampor.
Tänk efter vad som krävs för att antalet lampor i slutänden ska vara tända resp. släckta! Hur många gånger måste någon ha knäppt på strömbrytaren i de båda fallen?
Fundera sedan på delbarhet! Strömbrytaren för t.ex. lampa 6 slås om av personerna 1, 2, 3 och 6 (4 ggr), eftersom talet 6 är delbart med just talen (1, 2, 3 och 6). På samma sätt slås strömbrytaren till talet 7 om två gånger (av personerna 1 och 7). I båda fallen kommer lampan till slut att vara släckt. Men för vissa tal kommer den att vara tänd. Vilka?

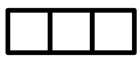
19. ***Vilka faktorer?***
Uppgifterna blir gradvis svårare, men det finns bara en lösning för respektive A-D.
Men till E finns det olika lösningar. Talet $33 = 3 \cdot 11$, och 3 och 11 kan antingen stå för kolumnen eller för raden. Det ger två olika lösningar, och samma sak gäller för några av de andra talen (men inte för 25. Varför?). Vidare måste man fundera på om talet 1 ska tillåtas, för då uppstår ännu fler lösningar. Försök fundera ut hur många olika som kan

finnas i båda fallen!

20. ***Det mystiska rymdskeppet***
Första plattan: I raden med symboler finns det några som står ensamma. De verkar också alla vara olika. Vad är det för typ av tal de representerar? Och de andra talen, som har två eller flera av dessa symboler, hur bildas de av de första? Vilken viktig princip för heltalen kan de visa?
Andra plattan: Det ser ut som om det är likadana symboler som förekommer där. En gissning kan vara att de står för samma tal. Men då måste de stå för någon annan princip (ledning: uppgift 12 ovan).

21. ***Magiska kvadrater***
a och b: Man inser snart att talen mitt emot varandra, på ömse sidor om talet 5 i mitten, måste ha summan 10, dvs. vara "10-kompisar". Det bekräftas av att summan av talen från 1 till 9 är 45, så att varje rad, kolumn och diagonal måste ha summan 15. Det finns 4 udda och 4 jämna tal som ska placeras in, och varje rad, kolumn måste ha antingen ett eller tre udda tal. Det sista är omöjligt, så då måste de udda talen stå på sidorna och de jämna i hörnen. Med det som utgångspunkt kan man placera talen på många sätt. Prova några olika! Vad ser du för likheter och olikheter mellan de olika lösningarna?
c: Antag t.ex. att summan är s och uttryck vad som ska stå i de olika rutorna med hjälp av s, a, b och 7. Ekvationer kan då bildas där a och b försvinner, och summan s blir kvar. Det finns ett samband mellan 7 och summan här som är likartat som det mellan 5 och summan 15 i a. Vad kan det vara?

22. ***Hur många kvadrater, rektanglar och trianglar?***
a. Arbeta systematiskt. Det finns 5 olika storlekar av kvadrater. Hur många av varje kan man räkna till och vad blir då summan? Om man då t.ex. lägger till kvadrater så att man har 6 x 6, vad tillkommer? Formeln är lite krånglig, men går att bena ut.
b. Här kan man börja med ett enklare problem för att komma underfund med principen. Antag t.ex. att vi bara har en rad med tre kvadrater i:



Man kan då bilda 6 olika rektanglar, de tre tidigare kvadraterna plus tre till:

På samma sätt går det med en lodrät rad. Totala antalet rektanglar i en 3 x 3-kvadrat blir på så sätt 6 gånger 6, alltså 36. Prova nu med samma resonemang för en 4 x 4-kvadrat osv.!
c. Förvånansvärt att man får kvadrattal ur en triangel, eller hur?
Arbeta sedan systematiskt med trianglarna av olika storlek! Här är det faktiskt svårt att finna ett gemensamt algebraiskt uttryck (men det går!).

23. Här har bokstavssymbolerna olika betydelser. I en *ekvation* betyder de ett eller flera bestämda tal, och likheten är sann *ibland*. Fast ibland är ekvationen omöjlig, så att den *aldrig* är sann. En *ekvivalens* är *alltid* sann, oavsett vilka tal bokstäverna står för. Här kommer några saker att utgå ifrån:

A. Går det att finna ett bestämt tal n?

B. Kommutativa lagen?

C. Försök sätta in värden för q eller att lösa likheten som en ekvation.

D. Tänk på att olika bokstavssymboler inte alls måste stå för olika tal!

E. Se B.

F. Gäller kommutativa lagen för subtraktion? Men det finns kanske ett bestämt tal t som gör likheten sann i alla fall?

G. Se D.

H. Kan likheten lösas som en ekvation?

I. Försök finna ett tal s som likheten inte gäller för!

J. Finns det mer än en lösning?

K. Det är lätt att avfärda denna likhet som aldrig sann, men det finns kanske något x som duger?

L. Vilket växer fortast, 4p eller (9+p)? För vilket tal är de sedan lika?

M. Försök finna ett tal som olikheten inte gäller för!