

Tore Dahlberg

# Formelsamling i hållfasthetslära

*Supplement till:*

Teknisk hållfasthetslära

3:e upplagan, Studentlitteratur 2001

# Formelsamling i hållfasthetslära

Utdrag ur läroboken  
Tore Dahlberg: Teknisk hållfasthetslära

Denna formelsamling utgör en kort sammanfattning av samband som används inom hållfasthetsläran. För vidare studium hänvisas till ovanstående lärobok och de litteraturreferenser som ges i den.

## Innehåll

Materialdata A1

Spänning, töjning, materialsamband A2-A3

Drag/tryck A3

Vridning A4-A5

Plana ytors geometri A6-A7

Yttröghetsmoment A8

Balkar – snittstorheter och spänningar A9-A10

Balkböjning – differentialekvation och randvillkor A10-A11

Balkböjning – elementarfall A12-A14

Stabilitet, axialbelastad balk, Eulerfallen A15-A16

Svängningar A17-A18

Utmattning A19-A22

Fleraxlig spänning A22-A25

Energimetod – Castiglianos sats A26

Spänningskoncentration – dragning A27-A28

Spänningskoncentration – böjning A28-A29

Spänningskoncentration – vridning A30

## Materialdata

Nedanstående data är hämtade ur B Sundström (red): Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, KTH, 1998. Ingen garanti lämnas för deras aktualitet, utan de givna värdena är avsedda *enbart för övningsräkning*. Vid praktisk dimensionering bör materialdata hämtas ur *senast utgivna officiella standard* och *inte* ur nedanstående tabell. Data antas gälla vid rumstemperatur.

Material beteckning	E- modul GPa	$\nu$	$\alpha 10^6$ 1/°C	Brottgräns MPa	Sträckgräns drag/tryck MPa	böjning MPa	vridning MPa
<i>Kolstål</i>							
141312-00 obehandlat	206	0,3	12	360 460	>240	260	140
141450-1 normaliserat	205	0,3		430 510	>250	290	160
141510-00 obehandlat	205	0,3		510 640	>320		
141550-01 normaliserat	205	0,3		490 590	>270	360	190
141650-01 normaliserat	206	0,3	11	590 690	>310	390	220
141650 seghärdat	206	0,3		860	>550	610	
					<u>Resttöjningsgräns <math>R_{p0,2}</math> (<math>\sigma_{0,2}</math>)</u>		
<i>Rostfritt stål</i>							
2337-02 släckglödgat	196	0,29	16,8	>490	>200		
<i>Aluminiumlegeringar</i>							
SS 4120-02 glödgat	70		23	170 215	>65		
SS 4120-24, hårbearbetat och anlöpt	70		23	220 270	>170		
SS 4425-06 varmåldrat	70		23	>340	>270		

## Spänning, töjning, materialsamband

*Definition av normalspänning*

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{eller} \quad \sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta N}{\Delta A} \right)$$

där  $N$  är normalkraft och  $A$  är tvärsarea.

*Definition av normaltöjning*

Små deformationer ( $\delta \ll L_0$ )

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \quad \text{eller} \quad \varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx}$$

Stora deformationer

$$\varepsilon = \ln \left( \frac{L}{L_0} \right)$$

där  $\delta$  är längdändring,  $L_0$  är ursprunglig mätlängd,  $L$  är aktuell längd ( $L = L_0 + \delta$ ) och  $u(x)$  är förskjutning.

*Hookes lag med temperaturterm (enaxligt)*

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T$$

där  $E$  är elasticitetsmodul (materialet är linjärt elastiskt),  $\alpha$  är temperaturutvidgningskoefficient och  $T$  är temperaturändring. Detta är ett av många olika materialsamband.

*Definition av skjuvspänning (medelvärde)*

$$\tau_{\text{medel}} = \frac{T}{A}$$

där  $T$  är tvärkraft och  $A$  är tvärsarea.

*Definition av skjuvtöjning*

$$\gamma = \text{vinkeländring} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

där  $u(x, y)$  och  $v(x, y)$  är förskjutning i  $x$ - respektive  $y$ -riktning.

*Hookes lag vid skjuvning*

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

där  $G$  är skjuvmodul (materialet är linjärt elastiskt). Detta är ett av många olika materialsamband.

Hookes lag med temperaturterm (tvåaxligt)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \{\sigma_x - \nu\sigma_y\} + \alpha T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \{\sigma_y - \nu\sigma_x\} + \alpha T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

med  $E$ ,  $G$  och  $\alpha$  enligt ovan och  $\nu$  är tvärkontraktionstalet (materialet är linjärt elastiskt). Detta är *ett* av många olika material-samband.

Samband mellan  $G$ ,  $E$  och  $\nu$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Viskoelastiska material

Newton-material (en fluid)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$$

Kelvin-material (en solid)

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

Maxwell-material (en fluid)

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

där  $E$  är elasticitetsmodul och  $\eta$  en viskositetskoefficient (som anger hur visköst materialet är).

---

## Drag/tryck

Stångdeformation

Längdändring

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad \text{eller} \quad \delta = \int_0^L \varepsilon(x) dx = \int_0^L \frac{P(x)}{E(x)A(x)} dx$$

där  $P$  är stångkraft,  $L$  är stånglängd,  $E$  är elasticitetsmodul (linjärt elastiskt material) och  $A$  är tvärsnittarean.

Flytlastförhöjning

$$\beta = \frac{P_f - P_s}{P_s} \quad \left( \text{eller} \quad \beta = \frac{M_f - M_s}{M_s} \right)$$

där  $P_s$  (respektive  $M_s$ ) är den last som ger begynnande plasticering och  $P_f$  (respektive  $M_f$ ) är kollapslasten.

---

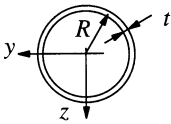
## Vridning

Linjärt elastiskt material med skjuvmodul  $G$  antas. Stånglängd  $L$ .  
Maximal skjuvspänning på grund av vridmoment  $M_v$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_v}{W_v} \quad \text{där } W_v \text{ ges nedan}$$

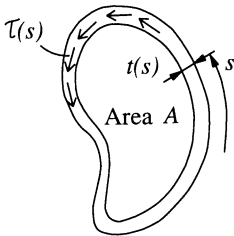
Vridvinkel  $\Theta$  vid vridning av rak stång, vridmoment  $M_v$ :

$$\Theta = \frac{M_v L}{G K_v} \quad \text{eller} \quad \Theta = \int_0^L \frac{M_v(x)}{G(x) K_v(x)} dx \quad \text{där } K_v \text{ ges nedan}$$



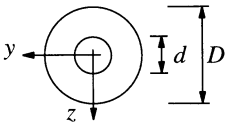
Vridning av tunnväggigt cirkulärt rör, radie  $R$ ,  
godstjocklek  $t$

$$W_v = 2\pi R^2 t \quad K_v = 2\pi R^3 t$$



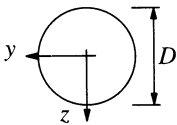
Tunnväggigt rör med godtyckligt tvärsnitt, där  
 $A$  är den av medellinjen inneslutna arean,  $t(s)$  är  
godstjockleken och  $s$  är en koordinat som löper  
längs medellinjen runt röret

$$W_v = 2A t_{\min} \quad K_v = \frac{4A^2}{\int_s \frac{ds}{t(s)}}$$



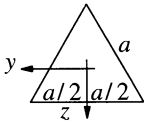
Tjockväggigt cirkulärt rör, ytterdiameter  $D$  och  
innerdiameter  $d$

$$W_v = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} \quad K_v = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$



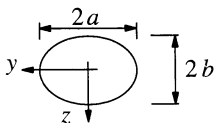
Massiv cirkulär axel, diameter  $D$

$$W_v = \frac{\pi D^3}{16} \quad K_v = \frac{\pi D^4}{32}$$



Liksidigt triangulärt tvärsnitt, sidlängd  $a$

$$W_v = \frac{a^3}{20} \quad K_v = \frac{a^4 \sqrt{3}}{80}$$



Elliptiskt tvärsnitt, storaxel  $2a$  och lillaxel  $2b$

$$W_v = \frac{\pi}{2} a b^2 \quad K_v = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Vridning av  $N$  parallella stavar, längd  $L$ ,

$$\tau_{i,\max} = \frac{M_v}{W_{vi}} \frac{G_i K_{vi}}{\sum_{i=1}^N (G_i K_{vi})} \quad \Theta = \frac{M_v L}{\sum_{i=1}^N (G_i K_{vi})}$$

där  $G_i$ ,  $W_{vi}$  och  $K_{vi}$  gäller för stav  $i$ .

Vridning av massiv stång med rektangulärt tvärsnitt

Tvärmått  $b$  gånger  $a$ , där  $b \geq a$ .

Vridmotståndet  $W_v$  och vridstyvhets tvärsnittsfaktor  $K_v$  kan tecknas

$$W_v = k_{Wv} a^2 b \quad \text{respektive} \quad K_v = k_{Kv} a^3 b$$

Faktorerna  $k_{Wv}$  och  $k_{Kv}$  ges för några olika värden på kvoten  $b/a$  i nedanstående tabell.

Faktorer  $k_{Wv}$  och  $k_{Kv}$  för några olika sidoförhållanden  $b/a$

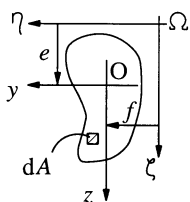
$b/a$	$k_{Wv}$	$k_{Kv}$
1,0	0,208	0,1406
1,2	0,219	0,1661
1,5	0,231	0,1958
2,0	0,246	0,229
2,5	0,258	0,249
3,0	0,267	0,263
4,0	0,282	0,281
5,0	0,291	0,291
10,0	0,312	0,312
$\infty$	0,333	0,333

## Plana ytors geometri

Tvårean  $A$

$$A = \int_A dA$$

Tyngdpunktens läge



Avstånden  $e = \zeta_{ip}$  och  $f = \eta_{ip}$  från godtyckliga hjälppaxlar  $\zeta$  och  $\eta$  till tyngdpunkten ges av

$$e \cdot A = \int_A \zeta dA \quad \text{och} \quad f \cdot A = \int_A \eta dA$$

**Figur** Balktvärsnitt med Oyz-systemets origo i tvärsnittets tyngdpunkt

Statiska ytmoment

$$S_y = \int_{A'} z dA \quad \text{och} \quad S_z = \int_{A'} y dA$$

där  $A'$  är den "avskjuvade" arean.

Definition av yttröghetsmoment (se även sidan A8)

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad \text{och} \quad I_{yz} = \int_A yz dA$$

Parallellförskjutningssatser

För statiska ytmoment

$$S_{\eta} = \int_A (z + e) dA = eA \quad S_{\zeta} = \int_A (y + f) dA = fA$$

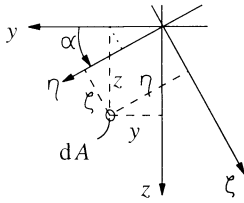
För yttröghets- och deviationsmoment

$$I_{\eta} = \int_A (z + e)^2 dA = I_y + e^2 A \quad I_{\zeta} = \int_A (y + f)^2 dA = I_z + f^2 A$$

$$I_{\eta\zeta} = \int_A (z + e)(y + f) dA = I_{yz} + efA$$



### Vridningssatser



Tröghetsmomenten  $I_y$ ,  $I_z$  och  $I_{yz}$  är kända och tröghetsmomenten  $I_\eta$ ,  $I_\zeta$  och  $I_{\eta\zeta}$  ska bestämmas. Koordinatsystemet  $O\eta\zeta$  har roterats en vinkel  $\alpha$  i förhållande till koordinatsystemet  $Oyz$ .

**Figur** Koordinatsystemet  $O\eta\zeta$  har roterats vinkeln  $\alpha$  i förhållande till  $Oyz$

Man får

$$I_\eta = \int_A \zeta^2 dA = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - 2I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$I_\zeta = \int_A \eta^2 dA = I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + 2I_{yz} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} I_{\eta\zeta} &= \int_A \zeta \eta dA = (I_y - I_z) \sin \alpha \cos \alpha + I_{yz} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \end{aligned}$$

### Huvudtröghetsmoment

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm R \quad \text{där} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Man ser att  $I_1 + I_2 = I_y + I_z$

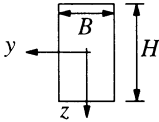
### Huvudtröghetsriktningarna erhålls ur

$$\sin 2\alpha = \frac{-I_{yz}}{R} \quad \text{eller} \quad \cos 2\alpha = \frac{I_y - I_z}{2R}$$

En symmetrilinje är alltid en huvudtröghetsriktning.

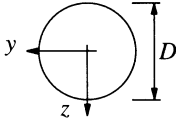
## Yttröghetsmoment

Yttröghetsmoment med avseende på en axel genom tvärsnittets tyngdpunkt för några symmetriska tvärsnitt



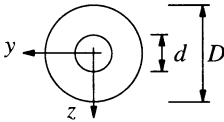
Rektangulärt tvärsnitt, bas  $B$  och höjd  $H$ :

$$I_y = \frac{BH^3}{12} \quad \text{och} \quad I_z = \frac{HB^3}{12}$$



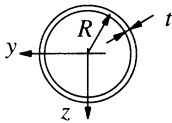
Massivt cirkulärt tvärsnitt, diameter  $D$ :

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$



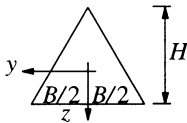
Tjockväggigt cirkulärt rör, ytterdiameter  $D$  och innerdiameter  $d$ :

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$



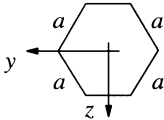
Tunnväggigt cirkulärt rör, radie  $R$  och godstjocklek  $t$ :

$$I_y = I_z = \pi R^3 t$$



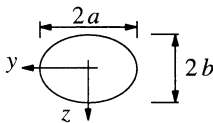
Triangulärt likbent tvärsnitt, bas  $B$  och höjd  $H$ :

$$I_y = \frac{BH^3}{36} \quad \text{och} \quad I_z = \frac{HB^3}{48}$$



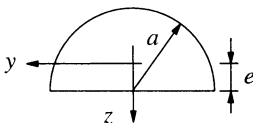
Liksidig 6-hörning, sidlängd  $a$ :

$$I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4$$



Elliptiskt tvärsnitt, storaxel  $2a$  och lillaxel  $2b$ :

$$I_y = \frac{\pi ab^3}{4} \quad \text{och} \quad I_z = \frac{\pi ba^3}{4}$$



Halvcirkel, radie  $a$  (tyngdpunktsavstånd  $e$  från basen)

$$I_y = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) a^4 \cong 0,110 a^4 \quad \text{och} \quad e = \frac{4a}{3\pi}$$

## Balkar – snittstorheter och spänningar

Samband mellan snittstorheterna  $M(x)$  och  $T(x)$  och last  $q(x)$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = T(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x)$$

*Normalspänning*

På grund av normalkraft  $N$  och moment  $M$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mz}{I}$$

På grund av moment  $M$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|}{W_b} \quad \text{där} \quad W_b = \frac{I}{|z|_{\max}}$$

*Skjuvspänning*

På grund av tvärkraft  $T$

$$\tau = \frac{TS_{A'}}{Ib} \quad \text{och} \quad \tau_{\text{p}} = \mu \frac{T}{A}$$

där  $S_{A'}$  är statiskt ytmoment,  $I$  är yttröghetsmoment,  $b$  är längden av den linje som avgränsar area  $A'$  och  $\mu$  är Jouravskifaktorn.

*Jouravskifaktor för några tvärsnitt*

rektangulärt,	1,5
triangulärt,	1,33
cirkulärt,	1,33
tunnväggigt cirkulärt,	2,0
elliptiskt,	1,33
ideal I-profil.	$A/A_{\text{iv}}$

*Skjuvcentrum*

Den punkt (i eller utanför balktvärsnittet) som tvärkraftens verkningslinje skall gå igenom för att balken skall utsättas för ren böjning (och ingen vridning).

### Skev böjning

Om  $y$ - och  $z$ -axlarna inte ligger i huvudtröghetsriktningarna fås skev böjning. Spänningen på grund av  $N$ ,  $M_y$  och  $M_z$  blir

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y(zI_z - yI_{yz}) - M_z(yI_y - zI_{yz})}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

( $I_{yz}$  är deviationsmomentet).

Med  $y'$  och  $z'$  i huvudtröghetsriktningarna 1 och 2 fås

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_1 z'}{I_1} - \frac{M_2 y'}{I_2} \quad (21)$$

(notera minustecknet).

### Flytlastförhöjning

$$\beta = \frac{M_f - M_s}{M_s} \quad \left( \text{eller} \quad \beta = \frac{P_f - P_s}{P_s} \right)$$

där  $M_s$  (respektive  $P_s$ ) är den last som ger begynnande plasticering och  $M_f$  (respektive  $P_f$ ) är kollapslasten.

---

## Balkböjning – differentialekvation och randvillkor

### Elastiska linjens differentialekvation

$$\{EI(x)w''(x)\}' = q(x)$$

Om  $EI$  är konstant erhålls

$$EIw^{IV}(x) = q(x)$$

Lösningen  $w(x) = w_{\text{part}}(x) + w_{\text{hom}}(x)$  erhålls genom fyra integrationer. Den homogena lösningen  $w_{\text{hom}}(x)$  innehåller fyra konstanter. Dessa bestäms med hjälp av fyra randvillkor, där två hämtas vid varje balkände. Randvillkor kan ges på utböjning  $w(x)$ , lutning  $w'(x)$ , moment  $M(x) = -EIw''(x)$  och tvärkraft  $T(x) = -EIw'''(x)$ , se nedan. Man väljer en av  $w$  och  $T$  och en av  $w'$  och  $M$  vid varje balkände.

### Homogena randvillkor



*Fast inspänd balkände*

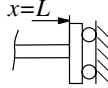
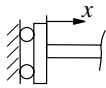
$$w(*) = 0 \quad \text{och} \quad w'(*) = 0$$

där \* är koordinaten för balkens vänsterände respektive dess högerände.



*Fritt upplagd balkände*

$$w(*) = 0 \quad \text{och} \quad -EIw''(*) = 0$$



*Slidlagrad balkände*

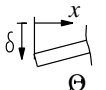
$$w'(*) = 0 \quad \text{och} \quad -EIw'''(*) = 0$$



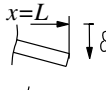
*Fri balkände*

$$-EIw''(*) = 0 \quad \text{och} \quad -EIw'''(*) = 0$$

### Inhomogena randvillkor



(a)

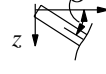


(a) förskjutning  $\delta$  föreskriven,

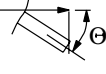
(b) vinkeländring  $\Theta$  föreskriven,

(c) randmoment  $M_0$  föreskrivet och

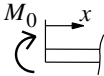
(d) randkraft  $P$  föreskriven ger, respektive



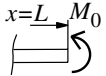
(b)



(a)  $w(*) = \delta$



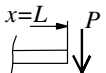
(c)



(b)  $w'(*) = \Theta$



(d)



(c)  $-EIw''(*) = M_0$

(d)  $-EIw'''(*) = P$

### Elastiska linjens differentialekvation för balk på fjädrande underlag

Böjstyvheten  $EI$  är konstant och bäddmodulen är  $k$ .

$$EIw^{IV} + kw(x) = q(x)$$

med lösning

$$w(x) = w_{\text{part}}(x) + w_{\text{hom}}(x)$$

och, med  $\lambda = (k / 4EI)^{1/4}$ ,

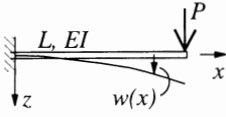
$$w_{\text{hom}}(x) = \{C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x)\} \exp(\lambda x)$$

$$+ \{C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x)\} \exp(-\lambda x)$$

Randvillkor enligt ovan.

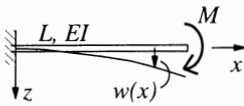
## Balkböjning – elementarfall

### Konsolbalk



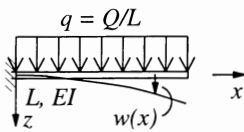
$$w(x) = \frac{PL^3}{6EI} \left( 3 \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} \right)$$

$$w(L) = \frac{PL^3}{3EI} \quad w'(L) = \frac{PL^2}{2EI}$$



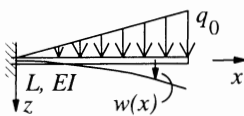
$$w(x) = \frac{ML^2}{2EI} \left( \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$w(L) = \frac{ML^2}{2EI} \quad w'(L) = \frac{ML}{EI}$$



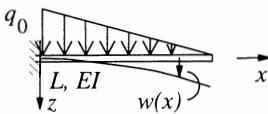
$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI} \left( \frac{x^4}{L^4} - 4 \frac{x^3}{L^3} + 6 \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$w(L) = \frac{qL^4}{8EI} \quad w'(L) = \frac{qL^3}{6EI}$$



$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{120EI} \left( \frac{x^5}{L^5} - 10 \frac{x^3}{L^3} + 20 \frac{x^2}{L^2} \right)$$

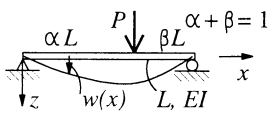
$$w(L) = \frac{11 q_0 L^4}{120EI} \quad w'(L) = \frac{q_0 L^3}{8EI}$$



$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{120EI} \left( -\frac{x^5}{L^5} + 5 \frac{x^4}{L^4} - 10 \frac{x^3}{L^3} + 10 \frac{x^2}{L^2} \right)$$

$$w(L) = \frac{q_0 L^4}{30EI} \quad w'(L) = \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

Fritt upplagd balk

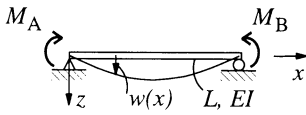


$$w(x) = \frac{PL^3}{6EI} \beta \left( (1 - \beta^2) \frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} \right) \quad \text{f\"or } \frac{x}{L} \leq \alpha$$

$$w(\alpha L) = \frac{PL^3}{3EI} \alpha^2 \beta^2, \quad \text{d\"a } \alpha > \beta \text{ erh\"alls}$$

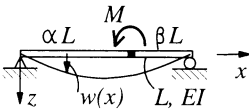
$$w_{\max} = w \left( L \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{3}} \right) = w(\alpha L) \frac{1 + \beta}{3\beta} \sqrt{\frac{1 + \beta}{3\alpha}}$$

$$w'(0) = \frac{PL^2}{6EI} \alpha \beta (1 + \beta) \quad w'(L) = -\frac{PL^2}{6EI} \alpha \beta (1 + \alpha)$$



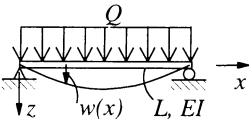
$$w(x) = \frac{L^2}{6EI} \left\{ M_A \left( 2 \frac{x}{L} - 3 \frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) + M_B \left( \frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} \right) \right\}$$

$$w'(0) = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} \quad w'(L) = -\frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI}$$



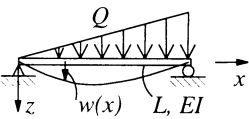
$$w(x) = \frac{ML^2}{6EI} \left( (1 - 3\beta^2) \frac{x}{L} - \frac{x^3}{L^3} \right) \quad \text{f\"or } \frac{x}{L} \leq \alpha$$

$$w'(0) = \frac{ML}{6EI} (1 - 3\beta^2) \quad w'(L) = \frac{ML}{6EI} (1 - 3\alpha^2)$$



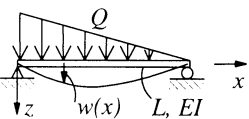
$$w(x) = \frac{QL^3}{24EI} \left( \frac{x^4}{L^4} - 2 \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

$$w(L/2) = \frac{5QL^3}{384EI} \quad w'(0) = -w'(L) = \frac{QL^2}{24EI}$$



$$w(x) = \frac{QL^3}{180EI} \left( 3 \frac{x^5}{L^5} - 10 \frac{x^3}{L^3} + 7 \frac{x}{L} \right)$$

$$w'(0) = \frac{7QL^2}{180EI} \quad w'(L) = -\frac{8QL^2}{180EI}$$

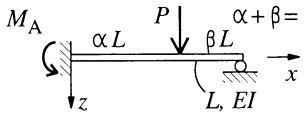


$$w(x) = \frac{QL^3}{180EI} \left( -3 \frac{x^5}{L^5} + 15 \frac{x^4}{L^4} - 20 \frac{x^3}{L^3} + 8 \frac{x}{L} \right)$$

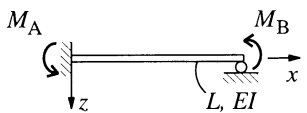
$$w'(0) = \frac{8QL^2}{180EI} \quad w'(L) = -\frac{7QL^2}{180EI}$$

*Fast inspänd, fritt upplagd balk*

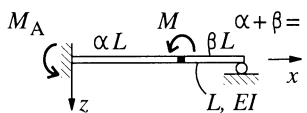
Här ges endast övertaliga stödreaktioner. Då dessa är kända kan återstående stödreaktioner bestämmas med hjälp av jämviktsekvationerna. Utböjningar, vinklar, m m erhålls genom superposition av lösningar för en fritt upplagd balk.



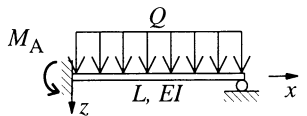
$$M_A = \frac{PL}{2} \beta (1 - \beta^2)$$



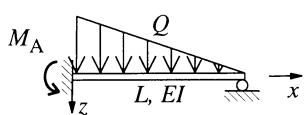
$$M_A = \frac{M_B}{2}$$



$$M_A = \frac{M}{2} (1 - 3\beta^2)$$

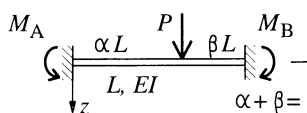


$$M_A = \frac{QL}{8}$$

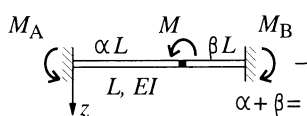


$$M_A = \frac{2QL}{15}$$

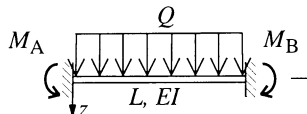
*Fast inspänd, fast inspänd balk*



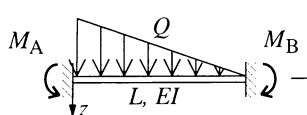
$$M_A = PL \alpha \beta^2 \quad M_B = PL \alpha^2 \beta$$



$$M_A = -M \beta (1 - 3\alpha) \quad M_B = M \alpha (1 - 3\beta)$$



$$M_A = M_B = \frac{QL}{12}$$



$$M_A = \frac{QL}{10} \quad M_B = \frac{QL}{15}$$



## Stabilitet, axialbelastad balk, Eulerfallen

### Jämviktsmetod

Den belastade strukturen ges en liten störning. Om strukturen efter störningen återgår till ursprungligt läge är systemet stabilt. Om deformationen fortsätter är systemet instabilt. Jämvikt (gränsfallet mellan stabilt och instabilt system) ger kritisk last.

### Energimetod

Inför den potentiella energin  $V$ , som definieras

$$V = E_{\text{elast}} - W$$

där  $E_{\text{elast}}$  är den elastiska töjningsenergi som lagras upp i strukturen och  $W$  är det arbete lasten utför då systemet ges en störning  $\alpha$ . Vid jämvikt gäller

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0$$

som ger den kritiska lasten.

Jämvikten är stabil då

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} > 0$$

och instabil då

$$\frac{d^2 V}{d\alpha^2} < 0$$

*Elastiska linjens differentialekvation för balk belastad med en axiell dragkraft  $N$  (OBS ett nytt randvillkor)*

$$EI w^{IV}(x) - N w''(x) = q(x)$$

med lösning (för  $N > 0$ )  $w(x) = w_{\text{part}}(x) + w_{\text{hom}}(x)$  där

$$w_{\text{hom}}(x) = C_1 + C_2 \sqrt{\frac{N}{EI}} x + C_3 \sinh\left(\sqrt{\frac{N}{EI}} x\right) + C_4 \cosh\left(\sqrt{\frac{N}{EI}} x\right)$$

Randvillkor på  $w$ ,  $w'$  och  $M = -EI w''$  blir samma som tidigare.

Observera att randvillkoret på tvärkraften  $T$  nu blir

$$T(*) = -EI w'''(*) + N w'(*)$$

där  $*$  står för randens koordinat.

Elastiska linjens differentialekvation för balk belastad med en axiell tryckkraft  $P$

$$EI w^{IV}(x) + P w''(x) = q(x)$$

med lösning  $w(x) = w_{\text{part}}(x) + w_{\text{hom}}(x)$  där

$$w_{\text{hom}}(x) = C_1 + C_2 \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C_3 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + C_4 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right)$$

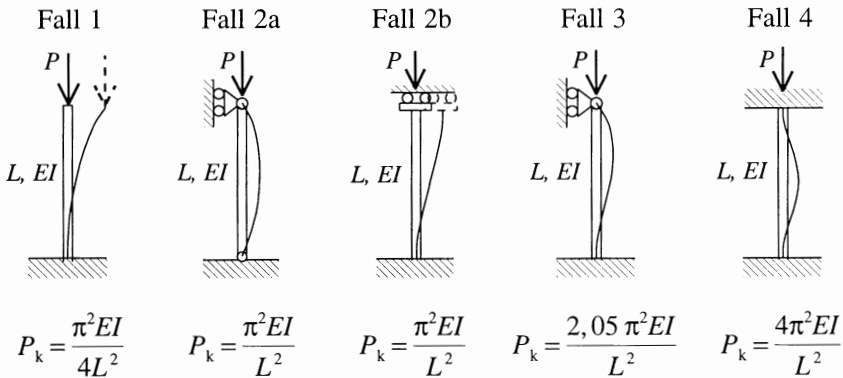
Randvillkoren är desamma som för den dragbelastade balken. Observera dock att  $N = -P$  ska användas i randvillkoret för tvärkraften, d v s

$$T(*) = -EI w'''(*) - P w'(*)$$

där \* står för randens koordinat.

### Elementarfall – Eulerfallen

Knäcklasterna för de fyra vanligaste elementarfallen, de så kallade Eulerfallen, ges. Om en sträva är kort, så att knäcklasten och därmed spänningen i strävan blir hög, kan plasticering (eller brott) vara begränsande för hur stor last man kan lägga på strävan.



## Svängningar

### Diskret system, en frihetsgrad

Rörelseekvationen för ett odämpat system med en frihetsgrad blir

$$M\ddot{x} + kx = F(t)$$

där  $M$  (kg) är systemets massa,  $k$  (N/m) dess styvhet och  $F(t)$  (N) är lasten. Lösningen består av en partikulärlösning och en homogen del, dvs  $x = x_{\text{part}} + x_{\text{hom}}$ . Den homogena lösningen kan skrivas på formen

$$x_{\text{hom}} = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \cos(\omega t - \phi)$$

Konstanterna  $A$  och  $B$  eller  $C$  och  $\phi$  bestäms med hjälp av begynnelsevillkor på  $x$  och  $\dot{x}$ .

Vid fri svängning, dvs då  $F(t) = 0$ , får svängningen vinkel-frekvensen  $\omega = \omega_e = \sqrt{k/M}$ , vilket är systemets *egenvinkelfrekvens* (rad/s), som ger *egenfrekvensen*  $f_e = \omega_e/2\pi$  (Hz) och *egen-svängningstiden*  $T_e = 1/f_e$  (s).

Vid vridsvängning ersätts massan  $M$  (kg) med masströghetsmomentet  $J$  (kgm<sup>2</sup>), koordinaten  $x$  (m) med en vinkel, t ex  $\phi$  (rad),  $k$  (Nm/rad) blir en styvhet i vridning, t ex  $GK_v/L$ , och  $F(t)$  ersätts med ett moment  $M(t)$  (Nm). Man får

$$J\ddot{\phi} + k\phi = M(t)$$

Svängningens *egenvinkelfrekvens* blir  $\omega_e = \sqrt{k/J}$ .

### Kritiskt varvtal

Kritiska varvtalet och *egenvinkelfrekvensen* vid böjsvängning är alltid lika.

### Dämpad svängning

Differentialekvationen vid dämpad svängning blir (för ett system med en frihetsgrad)

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

där  $c$  (Ns/m) är dämpstyvheten. Lösningen består av en homogen del  $x_{\text{hom}}$  och en partikulärdel  $x_{\text{part}}$ . Inför den odämpade *egenvinkel-frekvensen*  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$  och den relativa dämpningen  $\zeta$ , där  $\zeta = c/2\sqrt{kM}$ .

Om  $\zeta < 1$ , d v s vid *underkritisk* dämpning, blir den homogena lösningen

$$x_{\text{hom}}(t) = \exp(-\zeta \omega_0 t) \left\{ A \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) + B \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t) \right\}$$

Om  $\zeta = 1$  (*kritisk* dämpning) blir lösningen

$$x_{\text{hom}}(t) = (A + Bt) \exp(-\zeta \omega_0 t) \quad (\zeta = 1)$$

Om  $\zeta > 1$  (*överkritisk* dämpning) blir lösningen

$$x_{\text{hom}}(t) = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t) \quad \text{där}$$

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Konstanterna  $A$  och  $B$  bestäms ur begynnelsevillkor på  $x$  och  $\dot{x}$ .

### *Kontinuerligt system*

Differentialekvationen för en balks utböjning  $w(x,t)$  vid böj-svängning blir

$$EI w^{IV}(x,t) + m \ddot{w}(x,t) = q(x,t)$$

där  $EI$  ( $\text{Nm}^2$ ) är balkens böjstyvhets och  $m$  ( $\text{kg/m}$ ) dess mass-beläggning.

Ansätts en stationär lösning  $w(x,t) = X(x) \cdot T(t)$  erhålls

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad \text{och} \\ X(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \cos(\mu x) + C_3 \sinh(\mu x) + C_4 \sin(\mu x)$$

där  $\mu^4 = \omega^2 m / EI$ .

Randvillkor ger konstanterna  $C_1$  till  $C_4$  (vid icke-homogent ekvationssystem), eller ett egenvärdesproblem som ger egen-vinkelfrekvenserna (systemdeterminanten sätts till noll).

---

## Utmattning

<i>Beteckningar</i>	<i>Belastning</i>	<i>Växlande</i>	<i>Pulserande</i>
<i>Drag/tryck</i>	$\pm \sigma_u$		$\sigma_{up} \pm \sigma_{up}$
<i>Böjning</i>	$\pm \sigma_{ub}$		$\sigma_{ubp} \pm \sigma_{ubp}$
<i>Vridning</i>	$\pm \tau_{uv}$		$\tau_{uvp} \pm \tau_{uvp}$

### *Materialdata – utmattningsgränser*

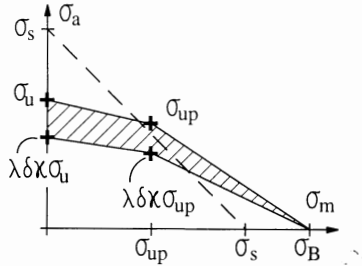
Nedanstående data är hämtade ur B Sundström (red): Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, KTH, 1998. Ingen garanti lämnas för deras aktualitet, utan de givna värdena är avsedda *enbart för övningsräkning*. Vid praktisk dimensionering bör materialdata hämtas ur *senast utgivna officiella standard* och *inte* ur nedanstående tabell. Data antas gälla vid rumstemperatur.

Material- beteckning	Dragning		Böjning		Vridning	
	växlande MPa	pulserande MPa	växlande MPa	pulserande MPa	växlande MPa	pulserande MPa
<i>Kolstål</i>						
141312-00 obehandlat	$\pm 110$	$110 \pm 110$	$\pm 170$	$150 \pm 150$	$\pm 100$	$100 \pm 100$
141450-1 normaliserat	$\pm 140$	$130 \pm 130$	$\pm 190$	$170 \pm 170$	$\pm 120$	$120 \pm 120$
141510-00 obehandlat	$\pm 230$					
141550-01 normaliserat	$\pm 180$	$160 \pm 160$	$\pm 240$	$210 \pm 210$	$\pm 140$	$140 \pm 140$
141650-01 normaliserat	$\pm 200$	$180 \pm 180$	$\pm 270$	$240 \pm 240$	$\pm 150$	$150 \pm 150$
141650 seghärdat			$\pm 460$			
<i>Rostfritt stål</i> 2337-02 släckglödgat	$\sigma_u = \pm 270$ MPa					
<i>Aluminiumlegeringar</i> SS 4120-02 glödgat	$\sigma_{ub} = \pm 110$ MPa,					
SS 4425-06 varmåldrat	$\sigma_u = \pm 120$ MPa					

### Utmattningsgränser vid olika belastningar

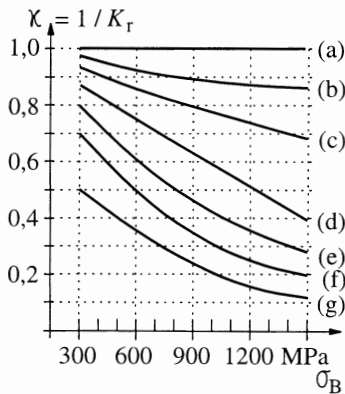
I brist på utmattningsdata kan för stål följande samband ge en uppfattning om storleken på saknade uppgifter:  $\sigma_{up} \cong 0,85 \sigma_u$ ,  $\sigma_u \cong 0,80 \sigma_{ub}$ ,  $\tau_{uv} \cong 0,58 \sigma_{ub}$  och  $\tau_{uvp} \cong \tau_{uv}$ .

### Haigh-diagram



### Tre reduktionsfaktorer för Haighdiagram

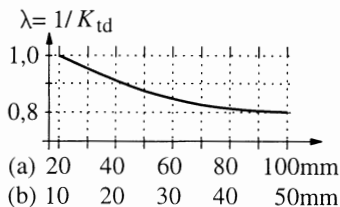
#### Ytfinhet $\kappa$



Faktor  $\kappa$  för ytfinhetens reduktion av utmattningsgränsen.

- (a) Polerad yta,
- (b) slipad,
- (c) grovbearbetad,
- (d) käl (skåra) enligt standardprov,
- (e) valshud,
- (f) korrosion i dricksvatten och
- (g) korrosion i saltvatten.

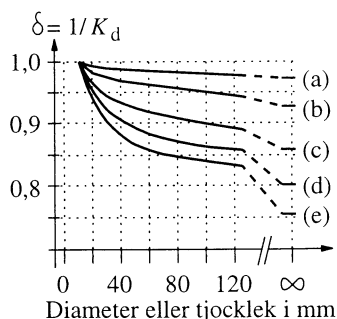
#### Teknologisk volymfaktor $\lambda$



Faktor  $\lambda$  för ämnesstorleken reduktion av utmattningsgränsen.

- (a) Diameter vid rund sektion,
- (b) tjocklek vid rektangulär sektion.

### Geometrisk volymfaktor $\delta$



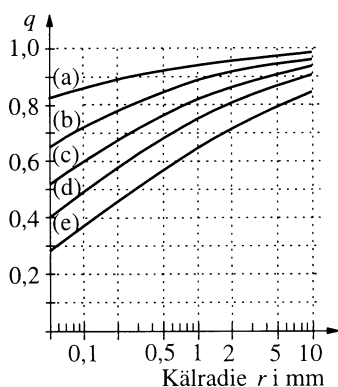
Faktor  $\delta$  för den belastade volymens reduktion av utmattningsgränserna  $\sigma_{ub}$  och  $\tau_{uv}$ . Stål med brottgräns  $\sigma_B =$  (a) 1500, (b) 1000, (c) 600 och (d) 400 MPa och (e) aluminiumlegeringar. Faktorn  $\delta = 1$  då anvisningsfaktor  $K_f > 1$  används.

### Anvisningsfaktor $K_f$ (vid spänningskoncentration)

$$K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

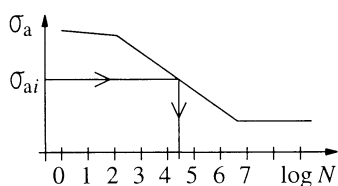
där  $K_t$  är spänningskoncentrationsfaktorn (formfaktorn, se sidorna A27-A30) och  $q$  är kälkänslighetsfaktorn.

### Kälekänslighetsfaktor $q$



Kälekänslighetsfaktorn  $q$  för stål med brottgräns  $\sigma_B =$  (a) 1600, (b) 1300, (c) 1000, (d) 700 och (e) 400 MPa.

### Wöhlerkurva



Wöhlerkurva för livslängdsberäkning. Diagrammet ger <sup>10</sup>logaritmen av livslängden  $N_i$  då belastningens amplitud är  $\sigma_{ai}$ .

### Delskada D

$$D = \frac{n_i}{N_i}$$

där  $n_i$  är antal belastningscykler vid spänningsnivå  $\sigma_i$ , och  $N_i$  är livslängd (antal cykler till brott) vid den spänningsnivån.

### Palmgren-Miners delskadehypotes

Utmattningsbrott inträffar då

$$\sum_{i=1}^I \frac{n_i}{N_i} = 1$$

med  $n_i$  och  $N_i$  enligt ovan, och  $I$  är antal belastningsnivåer.

### Rain-flow count

Regler för räkning av cykler enligt *rain-flow count*-metoden:

1. Rita lastförloppet (lasten som funktion av tiden). Starta med det största maximivärdet eller det minsta minimivärdet.
2. Rita in regndroppar. Låt en droppe börja rinna från varje maximivärde och varje minimivärde.

Dropparna skall stanna om de:

- a. startar från ett maximivärde och passerar ett större (eller lika stort) maximum,
  - b. startar från ett minimivärde och passerar ett mindre (eller lika stort) minimum,
  - c. träffar på en tidigare droppväg.
3. Identifiera slutna slingor (d v s para ihop droppvägar så att slutna slingor bildas).

---

## Fleraxlig spänning

### Ångpanneformlerna

Spänningar i ett tunnväggigt cirkulär cylindriskt tryckkärls vägg:

$$\sigma_t = p \frac{R}{t}, \quad \sigma_x = p \frac{R}{2t} \quad \text{och} \quad \sigma_z \approx 0$$

där  $p$  är inre övertryck,  $R$  är tryckkärllets radie och  $t$  är godstjockleken. Kärlet är tunnväggigt, d v s  $t \ll R$ . Index  $t$  anger tangentiell riktning (d v s  $\sigma_t$  är spänning i ringled),  $x$  anger kärlets längdriktning och  $z$  anger radiell riktning. Formlerna gäller ej nära gavlarna, där spänningskoncentration och böjspänningar kan förekomma.



*Rotationssymmetri i struktur och last (vid plant spänningstillstånd)*

Differentialekvation för den radiella förskjutningen  $u(r)$ :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r$$

där  $\rho$  är densitet och  $\omega$  är rotationshastighet.

Denna ekvation har lösningen

$$u(r) = u_{\text{hom}} + u_{\text{part}} = A_0 r + \frac{B_0}{r} - \frac{1-\nu^2}{8E} \rho \omega^2 r^3$$

Spänningarna blir

$$\sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad \text{och} \quad \sigma_\phi(r) = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

där

$$A = \frac{E A_0}{1-\nu} \quad \text{och} \quad B = \frac{E B_0}{1+\nu}$$

Konstanterna  $A$  och  $B$  (och därmed  $A_0$  och  $B_0$ ) bestäms ur randvillkor. Man måste kunna föreskriva en av  $\sigma_r(*)$  och  $u(*)$  på innerranden och en av  $\sigma_r(*)$  och  $u(*)$  på ytterranden (\* står för randens  $r$ -koordinat).

*Krympförband*

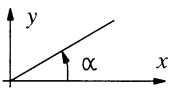
Det radiella greppet  $\delta$  är  $\delta = u_{\text{ytter}}(p) - u_{\text{inner}}(p)$   
 där  $u$  är radiell förskjutning av ytterdel (t ex hylsa) respektive innerdel (t ex axel) som funktion av krymptrycket  $p$ .

*Plant spänningstillstånd och plant töjningstillstånd*

Beroende på om man studerar ett plant spänningstillstånd eller ett plant töjningstillstånd införs för parametrarna  $E^*$ ,  $\nu^*$  och  $\alpha^*$  (i Hookes lag) värden enligt nedanstående tabell:

	$E^*$	$\nu^*$	$\alpha^*$
Plant spänningstillstånd	$E$	$\nu$	$\alpha$
Plant töjningstillstånd	$E / (1 - \nu^2)$	$\nu / (1 - \nu)$	$\alpha(1 + \nu)$

*Spänning i godtycklig riktning  $\alpha$  (vid plant tillstånd)*



$$\sigma(\alpha) = \sigma_x \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) + 2\tau_{xy} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

$$\tau(\alpha) = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin(\alpha) \cos(\alpha) + \tau_{xy} (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))$$

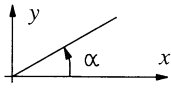
Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar (vid plant tillstånd)

$$\sigma_{1,2} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Riktningen  $\psi_1$  ( $\psi = \text{psi}$ ) mellan  $x$ -axeln (i det fysiska  $xy$ -planet) och den första huvudspänningsriktningen erhålls ur

$$\sin(2\psi_1) = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad \text{eller} \quad \cos(2\psi_1) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

Töjning i godtycklig riktning  $\alpha$  (vid plant tillstånd)



$$\epsilon(\alpha) = \epsilon_x \cos^2(\alpha) + \epsilon_y \sin^2(\alpha) + \gamma_{xy} \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\gamma(\alpha) = (\epsilon_y - \epsilon_x) \sin(2\alpha) + \gamma_{xy} \cos(2\alpha)$$

Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar (vid plant tillstånd)

$$\epsilon_{1,2} = \epsilon_c \pm R = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Riktningen  $\psi_1$  mellan  $x$ -axeln (i det fysiska  $xy$ -planet) och den första huvudtöjningsriktningen erhålls ur

$$\sin(2\psi_1) = \frac{\gamma_{xy}}{2R} \quad \text{eller} \quad \cos(2\psi_1) = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2R}$$

Huvudspänningar och huvudspänningsriktningar (vid tre-axligt tillstånd)

Teckna determinanten  $|\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I}|$  och sätt den till noll. Man får

$$|\mathbf{S} - \sigma \mathbf{I}| = 0$$

där  $\mathbf{S}$  är spänningsmatrisen (innehållande de nio elementen  $\sigma_{ij}$ ) och  $\mathbf{I}$  är enhetsmatrisen. Sambandet ger en tredjegrads ekvation i  $\sigma$ , vars rötter ger de tre huvudspänningarna  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Numrera huvudspänningarna så att  $\sigma_1$  är den största och  $\sigma_3$  den minsta huvudspänningen.

Huvudspänningsriktningarna (riktningscosinerna  $n_{ix}$ ,  $n_{iy}$  och  $n_{iz}$ ) ges av två (av tre) ekvationer i ekvationssystemet

$$(\mathbf{S} - \sigma_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$$

tillsammans med normeringsvillkoret ( $^T$  för transponat)

$$\mathbf{n}_i^T \cdot \mathbf{n}_i = 1$$

Detta ekvationssystem ger  $n_{ix}$ ,  $n_{iy}$  och  $n_{iz}$ , det vill säga enhetsvektorn  $\mathbf{n}_i$ , som anger huvudspänningens  $\sigma_i$  riktning.

### Huvudtöjningar och huvudtöjningsriktningar (vid tre-axligt tillstånd)

Inför töjningsmåtten:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} / 2$$

I analogi med motsvarande problem för spänningar tecknas

$$|\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{I}| = 0$$

där  $\mathbf{E}$  är töjningsmatrisen (innehållande de nio elementen  $\varepsilon_{ij}$ ) och  $\mathbf{I}$  är enhetsmatrisen. Denna tredjegradslikning ger de tre huvudtöjningarna  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Huvudtöjningsriktningarna (riktningscosinerna  $n_{ix}$ ,  $n_{iy}$  och  $n_{iz}$ ) ges av

$$(\mathbf{E} - \varepsilon_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$$

och

$$\mathbf{n}_i^T \cdot \mathbf{n}_i = 1$$

### Hookes lag med temperaturterm (vid tre-axligt tillstånd)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

där  $T$  är en temperaturändring i förhållande till den referens-temperatur som ger temperaturspänningen noll.

### Effektivspänningar

Enligt von Mises:

$$\begin{aligned} \sigma_e^{\text{vM}} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}} \end{aligned}$$

Enligt Tresca:

$$\sigma_e^{\text{T}} = \max [ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| ] = \sigma_{\max}^{\text{hsp}} - \sigma_{\min}^{\text{hsp}}$$

## Energimetod – Castiglianos sats

### Töjningsenergi $u$ per volymsenhet

Elastisk töjningsenergi per volymsenhet vid linjärt elastiskt material och enaxlig spänning:





$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$$

### Total töjningsenergi $U$

Om snittstorheterna  $N$ ,  $M_v$ ,  $M_{b\ddot{o}j}$  och  $T$  liksom tvärsnittsstorheterna  $A$ ,  $I$  och  $K_v$  för en balk (längd  $L$ ) varierar med koordinaten  $x$  erhålls den totala energin i en balk enligt

$$U_{\text{tot}} = \int_0^L \left\{ \frac{N(x)^2}{2EA(x)} + \frac{M_v(x)^2}{2GK_v(x)} + \frac{M_{b\ddot{o}j}(x)^2}{2EI(x)} + \beta \frac{T(x)^2}{2GA(x)} \right\} dx$$

där  $\beta$  är en faktor som beror av tvärsnittets form.

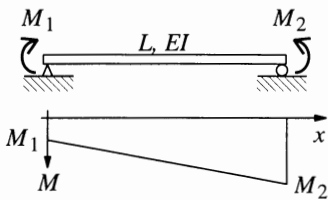
Tvärsnitt	$\beta$	$\mu$
	6/5	3/2
	10/9	4/3
	2	2
	$A/A_{\text{liv}}$	$A/A_{\text{liv}}$

Faktorn  $\beta$  ges av

$$\beta = \frac{A}{I^2} \int_A \left( \frac{S_{A'}}{b} \right)^2 dA$$

I vidstående tabell ges värden på  $\beta$  för några tvärsnitt ( $\mu$  är Jouravski-faktorn, se avsnittet *Balkar – snittstorheter och spänningar*, sidan A9).

### Specialfall



**Figur** Balk med linjärt varierande böjmoment

Om en balk utsätts för enbart böjning och böjmomentet  $M_{b\ddot{o}j}$  varierar linjärt längs balken med randmomenten  $M_1$  och  $M_2$  erhålls

$$M_{b\ddot{o}j}(x) = M_1 + (M_2 - M_1)x/L.$$

Denna momentfördelning ger

$$U_{\text{tot}} = \frac{L}{6EI} \{M_1^2 + M_1 M_2 + M_2^2\}$$

(där mittermen blir negativ om  $M_1$  och  $M_2$  har olika tecken).

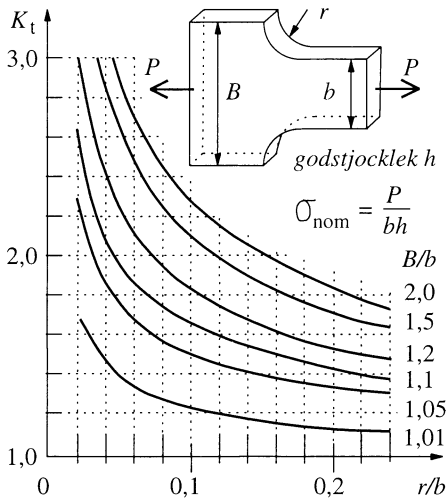
### Castiglianos sats

Castiglianos sats ger förskjutning  $\delta$  i kraften  $P$ :s riktning eller vinkeländringen  $\Theta$  vid momentet  $M$  enligt:

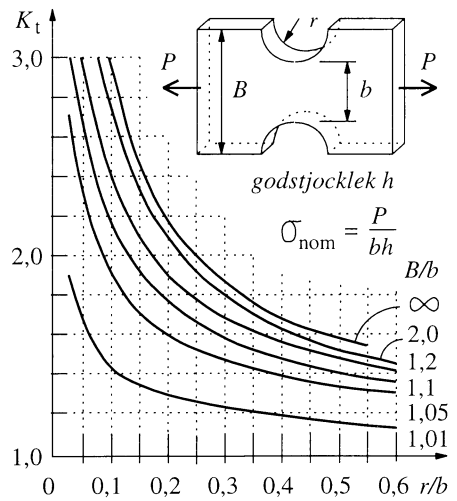
$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} \quad \text{respektive} \quad \Theta = \frac{\partial U}{\partial M}$$

## Spänningskoncentration – dragning

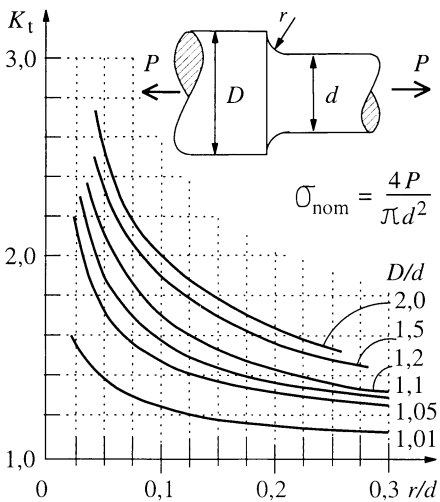
Maximivärdet av normalspänningen vid en anvisning är  $\sigma_{\max} = K_t \sigma_{\text{nom}}$ , där  $K_t$  och  $\sigma_{\text{nom}}$  ges i nedanstående diagram.



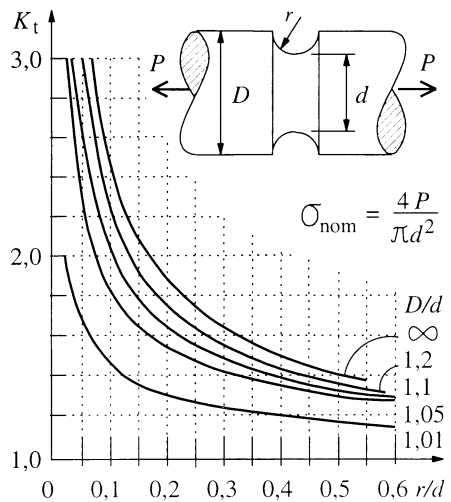
Dragning av plattstav med ansats



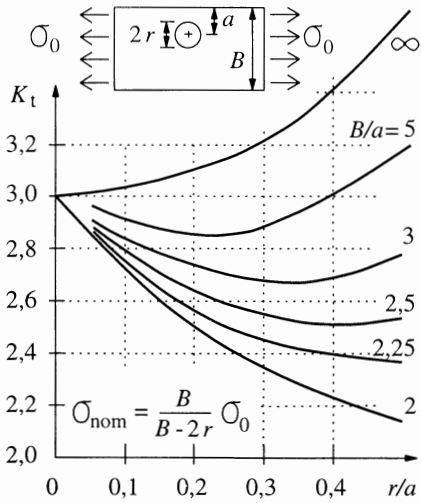
Dragning av plattstav med köl



Dragning av rundstång med ansats



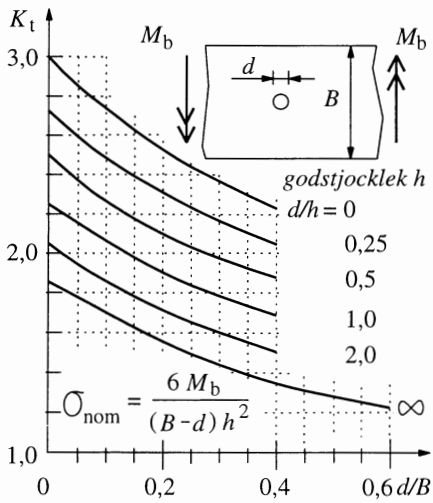
Dragning av rundstång med köl



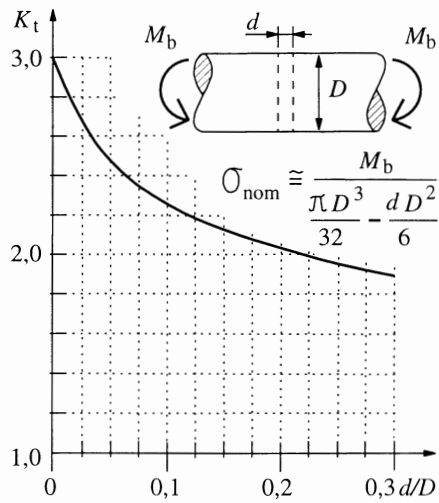
Dragnig av plattstav med hål

### Spänningskoncentration – böjning

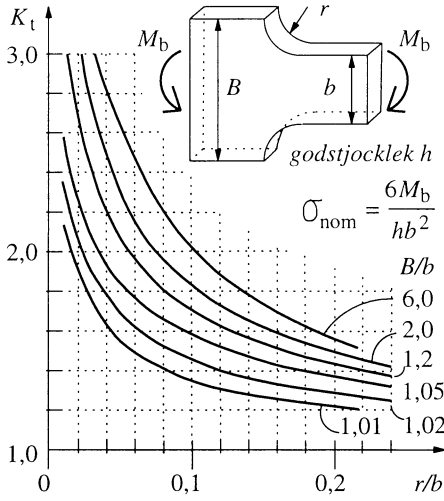
Maximivärdet av normalspänningen vid en anvisning är  $\sigma_{\text{max}} = K_t \sigma_{\text{nom}}$ , där  $K_t$  och  $\sigma_{\text{nom}}$  ges i nedanstående diagram.



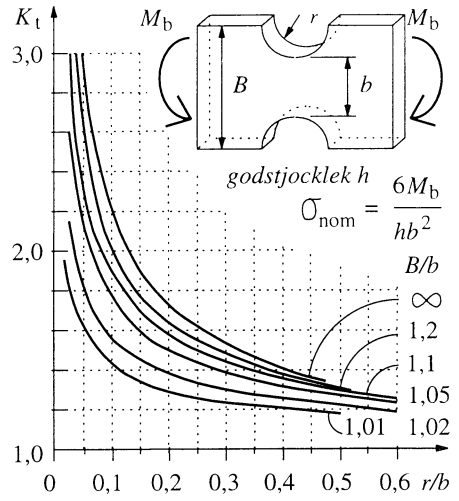
Böjning av plattstav med hål



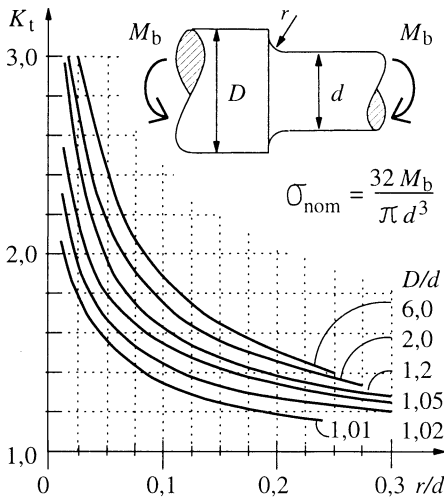
Böjning av rundstång med diametralt hål



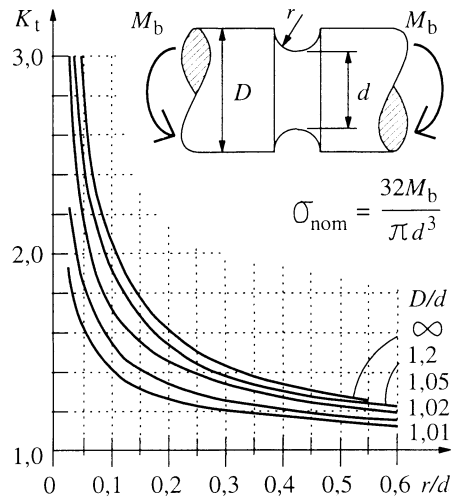
Böjning av plattstav med ansats



Böjning av plattstav med käl



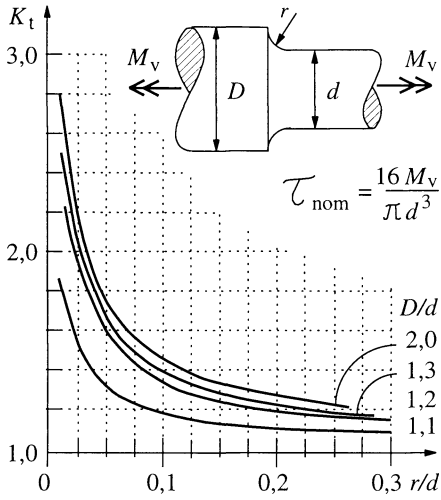
Böjning av rundstång med ansats



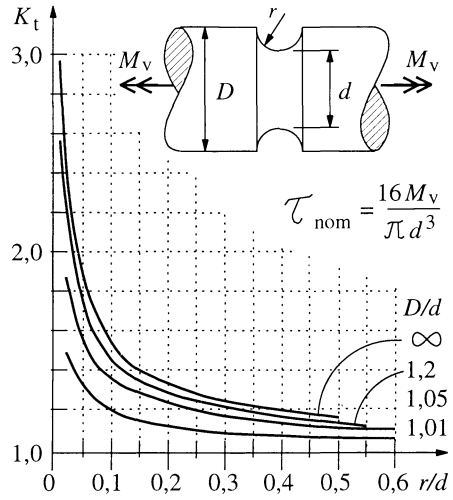
Böjning av rundstång med käl

## Spänningskoncentration – vridning

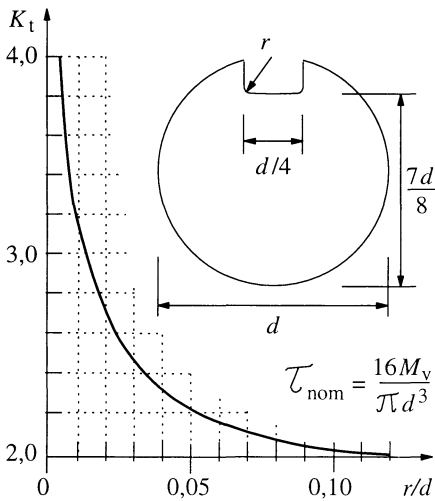
Maximivärdet av skjuvspänningen vid en anvisning är  $\tau_{\max} = K_t \tau_{\text{nom}}$ , där  $K_t$  och  $\tau_{\text{nom}}$  ges i nedanstående diagram.



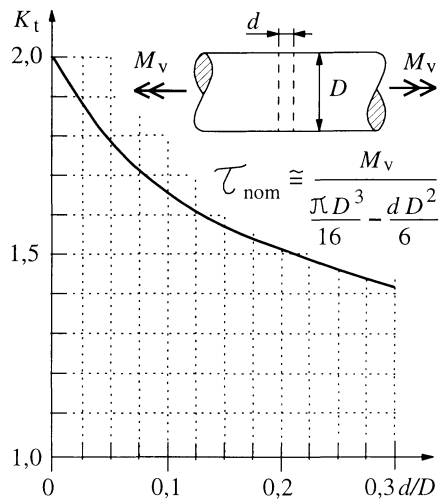
Vridning av rundstång med ansats



Vridning av rundstång med käl



Vridning av axel med kilspår



Vridning av axel med diametralt hål