Kapitel K

Mer om kontinuitet

I detta kapitel bevisar vi Sats 3.1, som säger att en kontinuerlig funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på ett kompakt område antar ett största och ett minsta värde. Vi studerar dessutom begreppet *likformig kontinuitet*, som vi kommer att behöva för att visa ett par resultat om integraler i Kapitel I i detta nätmaterial.

Som förberedelse härleder vi i det första avsnittet *Bolzano-Weierstrass sats* för funktioner av flera variabler.

K.1 Övre och undre gräns

Vi börjar med att påminna om det viktiga *axiomet om övre gräns* som vi kommer att behöva vid ett par tillfällen. En mer utförlig behandling av detta axiom och dess konsekvenser finner du i kapitlet *Mer om reella tal och kontinuitet* på `www.endim.se`.

Antag att A är en delmängd av de reella talen. Ett tal M som uppfyller att $M \geq x$ för alla $x \in A$ kallas en **övre begränsning** (eller **majorant**) till A. På motsvarande sätt kallas ett tal m som uppfyller att $m \leq x$ för alla $x \in A$ en **undre begränsning** (eller **minorant**) till A. En övre (undre) begränsning till A existerar alltså precis då mängden A är uppåt (nedåt) begränsad. Vad axiomet säger är att det då alltid finns en *minsta* övre begränsning.

Axiom (Axiomet om övre gräns)**.** Varje icke-tom uppåt begränsad mängd av reella tal har en minsta övre begränsning.

Den minsta övre begränsningen till en mängd A kallas **övre gräns** (eller **supremum**) till A och betecknas $\sup A$.

Ur axiomet följer ett motsvarande *axiom om undre gräns*, dvs. att varje icke-tom nedåt begränsad mängd B av reella tal har en största undre begränsning. Denna begränsning kallas **undre gräns** (eller **infimum**) och betecknas $\inf B$. Att varje nedåt begränsad mängd B har en största undre begränsning följer av att mängden $A = \{-x\,; x \in B\}$ är uppåt begränsad, och det gäller här att $\inf B = -\sup A$.

Med hjälp av axiomet om övre gräns kan man bevisa följande användbara sats.

Sats K.1. *Varje växande uppåt begränsad funktion $f(x)$ av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har ett (ändligt) gränsvärde då $x \to \infty$.*

Som en följd får vi att även en funktion f som är avtagande och nedåt begränsad har ett gränsvärde, detta genom att tillämpa satsen på funktionen $-f$, som då blir växande och uppåt begränsad.

En *talföljd* kan ses som en funktion definierad på (en delmängd av) heltalen. Som en direkt konsekvens av Sats K.1 får vi därför följande resultat.

Sats K.2. *Varje växande uppåt begränsad talföljd $(x_k)_0^\infty$ har ett (ändligt) gränsvärde då $k \to \infty$.*

Motsvarande gäller för en avtagande och nedåt begränsad talföljd.

En talföljd som är begränsad, men inte växande/avtagande, behöver inte nödvändigtvis ha något gränsvärde, men vi kan ur varje begränsad oändlig[1] talföljd välja ut en *delföljd* som har ett gränsvärde. Detta är precis innehållet i Bolzano-Weierstrass sats.

Sats K.3 (Bolzano-Weierstrass på $\mathbb{R}$)**.** *Varje oändlig begränsad talföljd $(x_k)_0^\infty$ har en konvergent delföljd.*

Det första resultat vi bevisar är en tvådimensionell motsvarighet till Sats K.3, som då behandlar följder av punkter i $\mathbb{R}^2$.

Sats K.4 (Bolzano-Weierstrass på $\mathbb{R}^2$)**.** *Varje oändlig begränsad följd $((x_k, y_k))_0^\infty$ i $\mathbb{R}^2$ har en konvergent delföljd.*

[1] En talföljd som innehåller ett obegränsat antal element.

Bevis. Vi studerar först följden av tal i den första koordinaten av våra talpar. Denna följd $(x_k)_0^\infty$ är uppenbart begränsad, så enligt Sats K.3 kan vi välja en konvergent delföljd $(x_{k_i})_{i=0}^\infty$; antag att $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = a$. Från följden $((x_{k_i}, y_{k_i}))_{i=0}^\infty$ tar vi nu ut talföljden $(y_{k_i})_{i=0}^\infty$ från den andra koordinaten. Denna är begränsad, så återigen konstaterar vi med hjälp av Sats K.3 att det finns en konvergent delföljd $(y_{k_{i_j}})_{j=0}^\infty$. Eftersom $(x_{k_{i_j}})_{j=0}^\infty$ är en delföljd av $(x_{k_i})_{i=0}^\infty$ så gäller det även att $\lim_{j\to\infty} x_{k_{i_j}} = a$, och om $\lim_{j\to\infty} y_{k_{i_j}} = b$ så blir

$$\lim_{j\to\infty}(x_{k_{i_j}}, y_{k_{i_j}}) = (\lim_{j\to\infty} x_{k_{i_j}}, \lim_{j\to\infty} y_{k_{i_j}}) = (a,b).$$

Vi har här alltså fått en konvergent delföljd till vår ursprungliga följd $((x_k, y_k))_0^\infty$, och satsen är visad. □

Precis som i en dimension så kallas en punkt som följdens punkter kommer godtyckligt nära en **hopningspunkt**. Speciellt gäller det, om hela följden ligger i ett slutet område D, att varje hopningspunkt också tillhör D.

Principen i föregående bevis, att successivt studera en koordinat i taget, kan tillämpas även i högre dimension. Vi inser därför att det går att visa Bolzano-Weierstrass sats för godtycklig dimension: Varje oändlig begränsad följd av punkter i $\mathbb{R}^n$ har en konvergent delföljd.

K.2 Bevis av Sats 3.1

Med resultaten i förra avsnittet till vår hjälp kan vi nu visa Sats 3.1. Vi påminner först om definitionen av kontinuitet: Funktionen f av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sägs vara kontinuerlig i punkten (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b),$$

och vi säger att f är kontinuerlig på ett område D om (restriktionen av) f är kontinuerlig i varje $(a,b) \in D$.

Sats 3.1. *Antag att den reellvärda funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig på den slutna begränsade (dvs. kompakta) mängden D i planet. Då antar funktionen både ett största och ett minsta värde i D.*

Bevis. Vi visar att f antar ett största värde; att ett minsta värde antas bevisas med ett motsvarande resonemang. Till att börja med visar vi att f är uppåt begränsad på D: Om detta inte skulle gälla så kan vi för varje heltal k hitta punkter $(x_k, y_k) \in D$ med $f(x_k, y_k) > k$. Enligt Sats K.4 kan vi då ur följden $((x_k, y_k))_{k=1}^{\infty}$ välja ut en konvergent delföljd $((x_{k_j}, y_{k_j}))_{j=1}^{\infty}$. Om $(x_{k_j}, y_{k_j}) \to (a, b)$ så ger kontinuiteten av f att $f(x_{k_j}, y_{k_j}) \to f(a, b)$. Då det samtidigt gäller att $f(x_{k_j}, y_{k_j}) \to \infty$ (eftersom $f(x_k, y_k) > k$ för varje k) har vi nu fått en motsägelse, så f är uppåt begränsad på D.

Enligt axiomet om övre gräns existerar därför $A = \sup \{f(x, y); (x, y) \in D\}$. Vi väljer nu punkter $(x_n, y_n) \in D$ sådana att

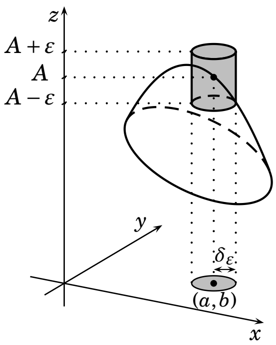
$$A - f(x_n, y_n) < 1/n \qquad \text{för varje } n, \tag{K.1}$$

och ur följden $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ väljer vi ut en konvergent delföljd $((x_{n_j}, x_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$. Om $(x_{n_j}, x_{n_j}) \to (a, b)$ så ger kontinuiteten av f att $f(x_{n_j}, x_{n_j}) \to f(a, b)$, och på grund av (K.1) har vi nödvändigtvis $f(a, b) = A$. (Notera att vi måste ha $(a, b) \in D$, eftersom D är sluten.) Satsen är därmed visad. □

K.3 Likformig kontinuitet

Vi skall nu resonera oss fram till ett kontinuitetsbegrepp, så kallad likformig kontinuitet, som är starkare än det vi hittills använt. Enligt definitionen av gränsvärde (Definition 3.1) så är f av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinuerlig (i vanlig mening) på ett område D om det för varje $(a, b) \in D$ och varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

$$\begin{aligned} &|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon \\ &\qquad \text{för alla } (x, y) \in D \text{ sådana att } 0 < |(x, y) - (a, b)| < \delta_\varepsilon. \end{aligned} \tag{K.2}$$



Detta innebär, som vi sett i boken på sidan 81, att för alla (x, y) inom en cirkel i xy-planet med medelpunkt (a, b) och radie δ_ε så ligger funktionsvärdena $f(x, y)$ på ett avstånd från $f(a, b)$ som är mindre än ε, dvs. funktionsytan ligger innanför cylindern i figuren.

I (K.2) beror δ_ε, förutom av ε, *också* av vilken punkt (a, b) vi väljer. Idén med det kontinuitetsbegrepp vi nu skall införa är att vi för ett givet tal $\varepsilon > 0$ skall kunna välja *ett* δ_ε som fungerar, oberoende av vilken punkt i området vi studerar. Definitionen blir som följer:

Definition K.1 (Likformig kontinuitet)**.** *En reellvärd funktion $f(x,y)$ definierad på ett område D kallas* ***likformigt kontinuerlig*** *på D om det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att*

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$
$$\text{för alla } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D \text{ sådana att } |(x_1,y_1)-(x_2,y_2)| < \delta_\varepsilon.$$

Genom att jämföra med (K.2) så ser vi att varje likformigt kontinuerlig funktion också är kontinuerlig i vår tidigare mening (låt (x_1,y_1) svara mot (x,y) och (x_2,y_2) mot (a,b)). Vi säger därför att likformig kontinuitet är ett *starkare* kontinuitetsbegrepp.

Den intuitiva bilden av likformig kontinuitet är att funktionsytan över området inte blir ”hur brant som helst”. Principen är samma som för funktioner av en variabel, så vi hänvisar till kapitlet *Mer om reella tal och kontinuitet* på `www.endim.se` för illustrerande exempel. (Byt ut $f(x) = 1/x$ i Exempel R.2 mot t.ex. $f(x,y) = 1/x$.)

En funktion som är kontinuerlig behöver inte nödvändigtvis vara likformigt kontinuerlig. Men om funktionen är kontinuerlig på ett *kompakt* område så är den alltid också likformigt kontinuerlig på detta.

Sats K.5. *Antag att funktionen f av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det kompakta området D. Då är f likformigt kontinuerlig på D.*

Bevis. Vi skall konstruera ett motsägelsebevis, och antar därför att f inte är likformigt kontinuerlig på D. Detta innebär att det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att vi för varje δ kan hitta $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$ så att

$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)| < \delta \qquad \text{men} \qquad |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \geq \varepsilon.$$

Låt ε ha denna egenskap. Vi sätter nu $\delta_n = 1/n$, $n = 1,2,3,\ldots$, och väljer, för varje n, punkter $(x1_n, y1_n),(x2_n,y2_n) \in D$ som uppfyller

$$|(x1_n,y1_n)-(x2_n,y2_n)| < \delta_n = \tfrac{1}{n} \qquad \text{men} \qquad |f(x1_n,y1_n) - f(x2_n,y2_n)| \geq \varepsilon.$$

Speciellt gäller det att $|(x1_n,y1_n)-(x2_n,y2_n)| \to 0$ då $n \to \infty$. De båda följderna $((x1_n,y1_n))_1^\infty$ och $((x2_n,y2_n))_1^\infty$ ligger i D och är begränsade, så enligt Bolzano-Weierstrass sats kan vi välja ut konvergenta delföljder $((x1_{n_j},y1_{n_j}))_1^\infty$ respektive $((x2_{n_j},y2_{n_j}))_1^\infty$. Om $(x1_{n_j},y1_{n_j}) \to (\eta_1,\xi_1)$ och $(x2_{n_j},y2_{n_j}) \to (\eta_2,\xi_2)$ så ger kontinuiteten av f att $f(x1_{n_j},y1_{n_j}) \to f(\eta_1,\xi_1)$ och $f(x2_{n_j},y2_{n_j}) \to f(\eta_2,\xi_2)$. Eftersom

$|(x1_{n_j}, y1_{n_j}) - (x2_{n_j}, y2_{n_j})| \to 0$ måste nödvändigtvis $(\eta_1, \xi_1) = (\eta_2, \xi_2)$, och som en följd gäller det att

$$f(x1_{n_j}, y1_{n_j}) - f(x2_{n_j}, y2_{n_j}) \to f(\eta_1, \xi_1) - f(\eta_2, \xi_2) = 0 \qquad \text{då } j \to \infty.$$

Detta motsäger dock att $|f(x1_n, y1_n) - f(x2_n, y2_n)| \geq \varepsilon$ för alla n, så vi konstaterar att antagandet att f inte är likformigt kontinuerlig är felaktigt. Satsen är därmed bevisad. $\square$

Man kan formulera en direkt motsvarighet till Definition K.1 för funktioner av godtycklig typ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Vi får då även resultatet i Sats K.5, med i stort sett identiskt bevis.