Kapitel I

Mer om integraler

I detta kapitel bevisar vi de resultat om integraler som i boken lämnats utan bevis. En del av bevisen utnyttjar begreppet likformig kontinuitet från Kapitel K i detta nätmaterial.

I.1 Integraler

Det första resultat vi visar är att varje funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig på en kompakt rektangel också är integrerbar på denna (Sats 7.2 på sidan 222 i boken). Vi kommer då att använda följande begrepp: Det *slutna höljet* av en mängd D, betecknat $\overline{D}$, är mängden som bildas då vi till D lägger till alla dess randpunkter. Med beteckningarna i boken gäller det alltså att $\overline{D} = D \cup \partial D$. Notera speciellt att $\overline{D}$ är en sluten mängd, så om D är begränsad blir $\overline{D}$ kompakt.

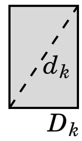
Sats 7.2. *Om funktionen f är kontinuerlig på den kompakta rektangeln D så är f integrerbar på D.*

Bevis. Vi skall visa att det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ, under respektive över f, sådana att skillnaden mellan deras integraler är mindre än ε. Enligt Sats K.5 vet vi att f är likformigt kontinuerlig på D. Speciellt finns det då ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \quad \text{då } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D,\ |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta, \quad \text{(I.1)}$$

där $\mu(D)$ som vanligt betecknar arean av D. (Det kommer att framgå senare varför vi valt $\varepsilon/\mu(D)$ i stället för ε.)

Vi väljer en indelning av D i rektanglar $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sådan att diagonalen d_k i varje delrektangel D_k är mindre än δ. Speciellt gäller det då att avståndet mellan två godtyckliga punkter i D_k är mindre än δ.



Eftersom f är kontinuerlig på de kompakta rektanglarna $\overline{D_k}$ så antas enligt Sats 3.1 ett största värde M_k och ett minsta värde m_k i varje $\overline{D_k}$; antag att M_k antas i punkten (x_{M_k}, y_{M_k}) och m_k i punkten (x_{m_k}, y_{m_k}). Det gäller enligt ovan att $|(x_{M_k}, y_{M_k}) - (x_{m_k}, y_{m_k})| < \delta$, och enligt (I.1) är därför

$$|f(x_{M_k}, y_{M_k}) - f(x_{m_k}, y_{m_k})| < \frac{\varepsilon}{\mu(D)}, \qquad \text{dvs.} \qquad M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{\mu(D)}.$$

Vi definierar nu två trappfunktioner Φ och Ψ enligt följande:

$$\Phi(x,y) = m_k, \;\; \Psi(x,y) = M_k \qquad \text{då} \quad (x,y) \in D_k. \tag{I.2}$$

Det gäller (med lämpliga val av $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$ på randen av varje delrektangel) att $\Phi(x,y) \le f(x,y) \le \Psi(x,y)$ då $(x,y) \in D$, och ser vi tillbaka på hur integralen av en trappfunktion definierades får vi

$$\iint_D \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_D \Phi(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(D_k) - \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(D_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\mu(D_k) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \mu(D_k) = \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \sum_{k=1}^{n} \mu(D_k) = \frac{\varepsilon}{\mu(D)} \mu(D) = \varepsilon.$$

Detta var precis vad vi ville uppnå, så vi konstaterar att satsen är bevisad. □

Härnäst visar vi resultatet som innebär att vi kan använda itererad integration för en kontinuerlig funktion. Vi påminner först om Sats 7.3 på sidan 224.

Sats 7.3. *Antag att funktionen f är integrerbar på rektangeln*

$$D = \{(x,y);\, a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Då gäller det att

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx, \tag{I.3}$$

under förutsättning att enkelintegralerna existerar.

Vi vet att varje funktion som är kontinuerlig på D också är integrerbar på D (Sats 7.2), men för att praktiskt använda satsen så behöver vi också veta att enkelintegralerna i (I.3) existerar. Detta blir nästa sak vi visar.

Bevis. Vi visar att enkelintegralerna i ledet längst till höger i (I.3) existerar; mellanledet i (I.3) behandlas på motsvarande sätt. Eftersom f är kontinuerlig på D så är, för varje x mellan a och b, funktionen $g(y) = f(x,y)$ kontinuerlig på intervallet $[c,d]$. Enligt envariabelteorin är därför g integrerbar på $[c,d]$, så $\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy$ existerar.

För att visa att den yttre enkelintegralen i högerledet av (I.3) existerar så skall vi visa att

$$h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \tag{I.4}$$

är integrerbar på $[a,b]$, något som följer om $h(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$. Det är dock enklare att visa det starkare villkoret att $h(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$, dvs. att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal δ sådant att

$$|h(x_1) - h(x_2)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x_1, x_2 \in [a,b] \text{ sådana att } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Låt nu $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vet enligt Sats K.5 att $f(x,y)$ är likformigt kontinuerlig på D, så det finns ett tal δ sådant att

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{d-c} \quad \text{då } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D,\ |(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| < \delta.$$

Eftersom $|x_1 - x_2| = |(x_1,y) - (x_2,y)|$ för varje y så ger nu villkoret $|x_1 - x_2| < \delta$ för detta δ, med hjälp av triangelolikheten för integraler, för alla $x_1, x_2 \in [a,b]$ att

$$|h(x_1) - h(x_2)| = \left| \int_c^d f(x_1,y)\,dy - \int_c^d f(x_2,y)\,dy \right| = \left| \int_c^d (f(x_1,y) - f(x_2,y))\,dy \right| \le$$

$$\le \int_c^d |f(x_1,y) - f(x_2,y)|\,dy < \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}\,dy = \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon.$$

Vi har därmed visat att $h(x)$ är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$, och därför också kontinuerlig. Detta avslutar beviset av vårt påstående att enkelintegralerna i (I.3) existerar. □

Slutsatsen är alltså att vi kan använda metoden med itererad integration då vi vill integrera en kontinuerlig funktion över en (kompakt) rektangel.

Vi passar nu även på att bevisa den del som saknas i vårt bevis av Sats 7.7; vi har på sidan 261 i boken kvar att visa att

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$, förutsatt att $f(x,y)$ är kontinuerlig på mängden $D = \{(x,y); a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$, där funktionerna ϕ och ψ är kontinuerliga på $[a,b]$.

Bevis. I föregående bevis visade vi att $h(x)$ i (I.4) är kontinuerlig på $[a,b]$. En skillnad jämfört med $F(x)$ ovan är dock att vi i $h(x)$ har konstanter i integrationsgränserna. Vi skall därför göra ett variabelbyte där de nya gränserna i $F(x)$ blir konstanter. Ett exempel på ett sådant byte är

$$y = \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x)), \qquad 0 \le t \le 1,$$

eftersom $t = 0$ ger just $y = \phi(x)$ och $t = 1$ ger $y = \psi(x)$. Vidare gäller det att $dy = (\psi(x) - \phi(x))dt$, så

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^1 f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))(\psi(x) - \phi(x))\,dt.$$

Integranden

$$g(x,t) = f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))(\psi(x) - \phi(x))$$

är en sammansättning av kontinuerliga funktioner och blir därför kontinuerlig på rektangeln $D' = \{(x,t); a \le x \le b, 0 \le t \le 1\}$, så precis som i det föregående beviset får vi slutligen att

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^1 f(x, \phi(x) + t(\psi(x) - \phi(x))(\psi(x) - \phi(x))\,dt$$

är kontinuerlig på $[a,b]$. □

Vi bevisar nu integralkalkylens medelvärdessats, dvs. Sats 7.5 på sidan 228 i boken.

Sats 7.5. *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det kompakta och bågvis sammanhängande området D, och låt $\mu(D)$ beteckna arean av D. Då finns det (minst) en punkt $(\xi,\eta) \in D$ sådan att*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\mu(D).$$

Bevis. Eftersom f är kontinuerlig på D så antar f enligt Sats 3.1 ett minsta värde m respektive ett största värde M i området; det gäller alltså att

$$m \le f(x,y) \le M \qquad \text{för alla } (x,y) \in D.$$

Enligt (7.14) bevaras olikheter vid integration, så vi får

$$m\mu(D) = \iint_D m\,dx\,dy \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D M\,dx\,dy = M\mu(D).$$

Division med $\mu(D)$ ger

$$m \le \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M. \tag{I.5}$$

Kontinuiteten innebär, som en följd av Sats 3.2, att f antar alla värden mellan m och M i D, speciellt antas mellanledet i (I.5). Det existerar därför en punkt $(\xi,\eta) \in D$ sådan att

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy, \quad \text{dvs.} \quad \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\mu(D).$$

Satsen är därmed bevisad. □

Nollmängder

Vi nämner i boken att varje kontinuerlig funktionskurva $y = f(x)$ (på ett kompakt intervall) är en nollmängd, och att detsamma gäller varje kurva som definieras enligt Definition 6.4 på sidan 210. Dessa påståenden kommer nu att bevisas.

Vi påminner först om att en att nollmängd i planet är en mängd som kan övertäckas med en följd av (axelparallella) rektanglar med en godtyckligt liten sammanlagd area. Som vi kommer att se i de två följande bevisen så kan de ovan nämnda kurvorna övertäckas med ett *ändligt* antal rektanglar.

> **Sats I.1.** *Antag att funktionen f av typen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a,b]$. Då är funktionskurvan $y = f(x)$, $a \le x \le b$, en nollmängd.*

Bevis. Vi skall visa att vi för varje $\varepsilon > 0$ kan övertäcka kurvan med rektanglar med sammanlagd area $< \varepsilon$. Även i det endimensionella fallet så är en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd (t.ex. ett kompakt intervall) likformigt kontinuerlig, så det finns i analogi med (I.1) på sidan 1 ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{för alla } x_1, x_2 \in [a,b] \text{ sådana att } |x_1 - x_2| < \delta. \tag{I.6}$$

Vi väljer nu en indelning $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ av $[a,b]$ sådan att längden av det längsta delintervallet är mindre än δ. Det gäller då enligt (I.6) att funktionsvärdena på varje delintervall skiljer sig åt med mindre än $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. För varje delintervall $[x_{k-1}, x_k]$ kan vi därför täcka motsvarande del av funktionskurvan med en rektangel med bas $x_k - x_{k-1}$ och höjd $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Vi får då en övertäckning av kurvan med ändligt många rektanglar, med sammanlagt area

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

vilket avslutar beviset av satsen □

Som vi nämnt på sidan 211 i boken så menar vi i allmänhet, då vi talar om en kurva, en styckvis reguljär kurva. Eftersom en styckvis reguljär kurva består av ett ändligt antal reguljära kurvstycken så räcker det, för att bevisa att denna är en nollmängd, att visa att varje reguljärt kurvstycke (se Definition 6.4 på sidan 210) är en nollmängd. (En union av ett ändligt antal nollmängder är en nollmängd.)

Sats I.2. *Varje reguljärt kurvstycke γ i planet är en nollmängd.*

Bevis. Vi skall visa att det för varje $\varepsilon > 0$ går att övertäcka γ med rektanglar med sammanlagd area $< \varepsilon$. Antag att $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t))$, $t \in [a,b]$, är en reguljär parametrisering av γ. Enligt Definition 6.4 på sidan 210 i boken är $\mathbf{r}$ deriverbar på $[a,b]$ med kontinuerlig derivata, så speciellt gäller det att r_1' och r_2' är kontinuerliga på $[a,b]$. Dessa derivator är därför begränsade på det kompakta intervallet $[a,b]$ (de antar ett största och ett minsta värde); låt K vara ett tal sådant att $|r_1'(t)| < K$ och $|r_2'(t)| < K$ för alla $t \in [a,b]$.

Antag nu att n är ett heltal som uppfyller att

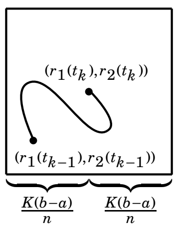
$$n > \frac{4K^2(b-a)^2}{\varepsilon}, \tag{I.7}$$

och låt $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ vara en indelning av $[a,b]$ i n stycken lika långa delintervall, dvs. delintervall med längd $(b-a)/n$. För varje delintervall $[t_{k-1}, t_k]$ gäller det enligt medelvärdessatsen (se Sats 10.7 i boken *Endimensionell analys*) att

$$r_1(t_k) - r_1(t) = r_1'(\xi)(t_k - t) \quad (t < \xi < t_k) \qquad \text{för alla } t \in [t_{k-1}, t_k],$$

och detta leder till att

$$|r_1(t_k) - r_1(t)| = |r_1'(\xi)||(t_k - t)| < K(t_k - t_{k-1}) = K\,\frac{b-a}{n}.$$



Varje funktionsvärde $r_1(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, skiljer sig alltså från $r_1(t_k)$ med mindre än $K(b-a)/n$, vilket innebär att samtliga kurvans x-koordinater $r_1(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, ryms inom ett avstånd $2K(b-a)/n$. Med samma argument ser vi, utgående från $r_2(t_k)$, att detsamma gäller y-koordinaterna $r_2(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Om γ_k betecknar den del av γ som motsvarar parameterintervallet $[t_{k-1}, t_k]$ så följer därför att γ_k kan täckas över med en kvadrat med sida $2K(b-a)/n$, dvs. en kvadrat med area $4K^2(b-a)^2/n^2$. Eftersom γ består av n sådana delar kan nu γ övertäckas med sådana kvadrater med sammanlagd area

$$n \cdot \frac{4K^2(b-a)^2}{n^2} = \frac{4K^2(b-a)^2}{n} < \frac{4K^2(b-a)^2}{4K^2(b-a)^2/\varepsilon} = \varepsilon,$$

där olikheten följer av (I.7). Detta slutför beviset av satsen. $\square$

Vi vet att varje funktion f som är kontinuerlig på en rektangel också är integrerbar, och vi påstår i boken på sidan 229 att detta resultat kan skärpas så att f endast behöver vara kontinuerlig nästan överallt (och begränsad) på rektangeln, dvs. kontinuerlig överallt förutom på en nollmängd. För att undvika alltför många tekniska detaljer då vi visar detta så antar vi dock att en nollmängd är definierad så att den, för varje $\varepsilon > 0$, kan övertäckas med ett *ändligt* antal rektanglar med sammanlagd area ε. (I Definition 7.5 har vi som krav att det skall finnas en *följd* av rektanglar.) Vi har ju precis sett att de kurvor vi kommer att arbeta mest med kan övertäckas med ett ändligt antal.

Sats I.3. *Om funktionen f är kontinuerlig nästan överallt samt begränsad på den kompakta rektangeln D så är f integrerbar på D.*

Bevis. Eftersom f är begränsad på D så finns det ett tal K sådant att $|f(x,y)| < K$, dvs. $-K < f(x,y) < K$, för alla $(x,y) \in D$. Mängden som f ej är kontinuerlig på är en nollmängd, så denna kan för varje $\varepsilon > 0$ övertäckas med ett ändligt antal rektanglar med sammanlagd area mindre än $\varepsilon/4K$; låt unionen av en sådan uppsättning rektanglar betecknas med D'. På varje rektangel i övertäckningen sätter vi nu

$$\Phi(x,y) = -K \qquad \text{och} \qquad \Psi(x,y) = K.$$

Det gäller då speciellt att

$$\begin{aligned}\iint_{D'} \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D'} \Phi(x,y)\,dx\,dy &= K\mu(D') - (-K)\mu(D') = \\ &= 2K\mu(D') < 2K\frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Vi kan utan problem förutsätta att övertäckningen D' är öppen. Mängden $D \setminus D'$ blir då sluten, speciellt kompakt, och eftersom f är kontinuerlig på $D \setminus D'$ så blir f även likformigt kontinuerlig. Med samma princip som i beviset av Sats 7.2 i början av detta kapitel kan vi därför utvidga Φ och Ψ ovan till ”trappfunktioner” på $D \setminus D'$, sådana att

$$\iint_{D\setminus D'} \Psi(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D\setminus D'} \Phi(x,y)\,dx\,dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$

(Här är inte $D \setminus D'$ en rektangel, men vi kan göra en indelning av $D \setminus D'$ i rektanglar av godtyckligt liten area.) Funktionerna Φ och Ψ kan nu ses som trappfunktioner på hela rektangeln D, och vi får till slut

$$\iint_D \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_D \Phi(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint_{D'} \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_{D'} \Phi(x,y)\,dxdy + \iint_{D\setminus D'} \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_{D\setminus D'} \Phi(x,y)\,dxdy <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Detta är, för ett godtyckligt $\varepsilon > 0$, precis definitionen av att f är integrerbar på D, så vi konstaterar att satsen är bevisad. □

Slutligen bevisar vi Sats 7.10, som säger att en följd av Riemannsummor konvergerar mot motsvarande integral. Vi påminner om att en Riemannsumma till en funktion f av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på ett område D är en summa på formen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mu(D_k),$$

där $D_1, D_2, \ldots, D_n$ är en indelning av D, och $(\xi_k,\eta_k) \in D_k$ för varje k.

Sats 7.10. *Antag att f är kontinuerlig på det kompakta området D, och att*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mu(D_k)$$

är Riemannsummor till f på D (för olika indelningar). Då gäller det att

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mu(D_k) \;\to\; \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

när indelningarnas finhet går mot noll.

Vi kommer även i beviset av denna sats att till viss del använda samma metod som i beviset av Sats 7.2.

Bevis. Vi skall visa att det för ett godtyckligt tal $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\mu(D_k) - \iint_D f(x,y)\,dxdy \right| < \varepsilon$$

om bara indelningen av D är tillräckligt fin. Välj därför återigen ett tal $\delta > 0$ som uppfyller (I.1) på sidan 1. Eftersom indelningarnas finhet går mot noll så kommer vi så småningom att ha en indelning med finhet $< \delta$, dvs. diametern av varje område D_k i indelningen kommer att vara mindre än δ. Speciellt kommer då avståndet mellan varje par av punkter i D_k att vara mindre än δ.

För en sådan indelning tar vi fram tal M_k och m_k, samt skapar funktioner Φ och Ψ enligt samma princip som i beviset av Sats 7.2. (Vi får här en typ av trappfunktioner på D, dock i allmänhet ej definierade med hjälp av rektanglar.) Eftersom $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ så gäller det att $m_k \leq f(\xi_k, \eta_k) \leq M_k$ för varje k, och såklart även att

$$m_k \mu(D_k) \leq f(\xi_k, \eta_k)\mu(D_k) \leq M_k \mu(D_k). \tag{I.8}$$

Vi har exempelvis att

$$\iint_{D_k} \Phi(x,y)\,dxdy = \iint_{D_k} m_k\,dxdy = m_k \iint_{D_k} 1\,dxdy = m_k \mu(D_k),$$

och således att

$$\iint_D \Phi(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \Phi(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(D_k).$$

På motsvarande sätt är $\iint_D \Psi(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(D_k)$, så vi kan med hjälp av (I.8) dra slutsatsen att

$$\iint_D \Phi(x,y)\,dxdy \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mu(D_k) \leq \iint_D \Psi(x,y)\,dxdy.$$

Eftersom det samtidigt gäller att

$$\iint_D \Phi(x,y)\,dxdy \leq \iint_D f(x,y)\,dxdy \leq \iint_D \Psi(x,y)\,dxdy$$

så får vi slutligen

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mu(D_k) - \iint_D f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint_D \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_D \Phi(x,y)\,dxdy < \varepsilon,$$

där den sista olikheten följer på samma sätt som i beviset av Sats 7.2. $\square$