Kapitel B

Bevis av Sats 5.3

I detta kapitel bevisar vi Sats 5.3 på sidan 157 i boken; det resultat som knyter ihop en stationär punkts karaktär med motsvarande kvadratiska forms karaktär.

Vi påminner först om att vi ur Taylorutvecklingen

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \\ + \tfrac{1}{2}\big(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\big) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k),$$

plockade ut den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2.$$

Om (a,b) är en stationär punkt, dvs. om $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, så gäller det alltså att

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \tfrac{1}{2}Q(h,k) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k). \qquad \text{(B.1)}$$

I boken argumenterade vi för att resttermen $(h^2+k^2)^{3/2}B(h,k)$ är så liten då (h,k) är litet att det blir den kvadratiska formen som bestämmer tecknet på differensen $f(a+h,b+k)-f(a,b)$, och därmed hur funktionsvärdena nära punkten (a,b) är relaterade till värdet $f(a,b)$.

Vi skall nu presentera ett strikt bevis för att den kvadratiska formens uppförande bestämmer en stationär punkts karaktär, och börjar med följande resultat.

Hjälpsats B.1. *Antag att den kvadratiska formen $Q(h,k)$ är positivt definit. Då finns det ett tal $c>0$ sådant att*

$$Q(h,k) \geq c(h^2+k^2) \qquad \text{(B.2)}$$

för alla (h,k).

Bevis. Då $(h,k) = (0,0)$ så är både $Q(h,k)$ och $c(h^2+k^2)$ lika med noll, och (B.2) är uppfylld. Vi kan därför i fortsättningen anta att $(h,k) \neq (0,0)$.

Den kvadratiska formen $Q(h,k)$ är en polynomfunktion i de två variablerna h och k, och är således kontinuerlig. Enligt Sats 3.1 antar därför $Q(h,k)$ ett största och ett minsta värde på varje kompakt mängd. Vi studerar nu enhetscirkeln, betecknad D. Denna mängd är kompakt, så $Q(h,k)$ antar ett minsta värde c på D. Eftersom $Q(h,k)$ är positivt definit, dvs. $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$, så måste $c > 0$. För alla (h,k) på enhetscirkeln, dvs. alla (h,k) med $\sqrt{h^2+k^2} = 1$, gäller det alltså att

$$Q(h,k) \geq c > 0. \tag{B.3}$$

En godtycklig punkt (h,k) ligger på avståndet $\sqrt{h^2+k^2}$ från origo, så med $t = 1/\sqrt{h^2+k^2}$ gäller det att punkten

$$(th,tk) = t(h,k) = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(h,k)$$

ligger på enhetscirkeln. Vi noterar dessutom att

$$\begin{aligned} Q(th,tk) &= f''_{xx}(a,b)(th)^2 + 2f''_{xy}(a,b)th\,tk + f''_{yy}(a,b)(tk)^2 = \\ &= t^2(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2) = t^2 Q(h,k). \end{aligned} \tag{B.4}$$

Enligt (B.3) gäller det därför att

$$t^2 Q(h,k) = Q(th,tk) \geq c,$$

eller omskrivet,

$$Q(h,k) \geq c(h^2+k^2).$$

Detta slutför beviset av hjälpsatsen. □

Vi är nu redo att bevisa huvudresultatet.

Sats 5.3. *Antag att (a,b) är en stationär punkt till f, och att $Q(h,k)$ är den kvadratiska formen av f i (a,b). Då gäller följande:*

Om $Q(h,k)$ är positivt definit så har f ett lokalt minimum i (a,b).

Om $Q(h,k)$ är negativt definit så har f ett lokalt maximum i (a,b).

Om $Q(h,k)$ är indefinit så har f en sadelpunkt i (a,b).

I fallet då $Q(h,k)$ är semidefinit så kan vi inte dra någon slutsats om punktens karaktär.

Bevis. Vi börjar med fallet att $Q(h,k)$ är positivt definit. Då finns det enligt hjälpsatsen ett tal $c > 0$ sådant att $Q(h,k) \geq c(h^2 + k^2)$, och med hjälp av Taylorutvecklingen (B.1) får vi

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= \tfrac{1}{2}Q(h,k) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k) \geq \\ &\geq \tfrac{1}{2}c(h^2+k^2) + (h^2+k^2)^{3/2}B(h,k) = (h^2+k^2)\big(\tfrac{1}{2}c + \sqrt{h^2+k^2}B(h,k)\big). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Eftersom $B(h,k)$ är begränsad nära $(0,0)$ så gäller det för tillräckligt små (h,k) att

$$\left|\sqrt{h^2+k^2}B(h,k)\right| < \tfrac{1}{2}c,$$

och således att $\frac{1}{2}c + \sqrt{h^2+k^2}B(h,k) > 0$. Från (B.5) drar vi därför slutsatsen att $f(a+h,b+k) - f(a,b) > 0$ för små $(h,k) \neq (0,0)$, dvs. att $f(a,b) < f(a+h,b+k)$. Men detta innebär precis att f har ett strängt lokalt minimum i (a,b), så vi är klara med vårt första fall.

I fallet då den kvadratiska formen till f är negativt definit så studerar vi funktionen $g = -f$ med omvänt tecken. Eftersom exempelvis $g'_x(a,b) = -f'_x(a,b)$ och $f''_{xx}(a,b) = -g''_{xx}(a,b)$ så ser vi att punkten (a,b) är en stationär punkt även till g, och vi inser att en negativt kvadratisk form till f i (a,b) ger en positiv kvadratisk form till g. Enligt föregående fall gäller det därför att g har ett strängt lokalt minimum i (a,b), och detta innebär i sin tur att f har ett strängt lokalt maximum i (a,b).

För en indefinit form $Q(h,k)$ så finns det en punkt (h_1,k_1) sådan att $Q(h_1,k_1) > 0$, och en punkt (h_2,k_2) sådan att $Q(h_2,k_2) < 0$. Vi studerar nu punkterna (th_1,tk_1) och (th_2,tk_2) för en parameter t. Vi har exempelvis att

$$\begin{aligned} f(a+th_1,b+tk_1) - f(a,b) &= \tfrac{1}{2}Q(th_1,tk_1) + \big((th_1)^2+(tk_1)^2\big)^{3/2}B(th_1,tk_1) = \\ &= \tfrac{1}{2}t^2Q(h_1,k_1) + t^3(h_1^2+k_1^2)^{3/2}B(th_1,tk_1) = \\ &= t^2\big(\tfrac{1}{2}Q(h_1,k_1) + t(h_1^2+k_1^2)^{3/2}B(th_1,tk_1)\big), \end{aligned} \tag{B.6}$$

där vi återigen använt (B.4). För alla tillräckligt små värden på t gäller det att

$$\left|t(h_1^2+k_1^2)^{3/2}B(th_1,tk_1)\right| < \left|\tfrac{1}{2}Q(h_1,k_1)\right|, \tag{B.7}$$

och eftersom $Q(h_1,k_1) > 0$ så ger (B.6) att $f(a+th_1,b+tk_1) - f(a,b) > 0$, dvs. att $f(a+th_1,b+tk_1) > f(a,b)$. Även för punkten (h_2,k_2) gäller för tillräckligt små t en motsvarighet till (B.7), och eftersom $Q(h_2,k_2) < 0$ så ser vi nu från (B.6) att $f(a+th_2,b+tk_2) - f(a,b) < 0$, eller $f(a+th_2,b+tk_2) < f(a,b)$. Sammanfattningsvis så kan vi alltså godtyckligt nära punkten (a,b) hitta punkter med funktionsvärden både större och mindre än $f(a,b)$. Detta visar att (a,b) är en sadelpunkt.

Vi visar avslutningsvis att man inte kan dra någon slutsats i fallet då $Q(h,k)$ är semidefinit genom att studera två exempel: Funktionerna $f(x,y) = x^2 + y^4$ och $g(x,y) = x^2 - y^4$ har båda origo som stationär punkt, och den kvadratiska formen är där i båda fallen $Q(h,k) = h^2$, vilken är positivt semidefinit. Eftersom $f(0,0) = 0$ men $f(x,y) > 0$ då $(x,y) \neq (0,0)$ så har f ett strängt lokalt maximum i origo. Samtidigt gäller det att $g(x,y) > 0$ i alla punkter $(x,0)$ utanför origo, och $g(x,y) < 0$ i alla punkter $(0,y)$ utanför origo, så origo är en sadelpunkt för g. Den stationära punkten origo har alltså olika karaktär för våra två funktioner, vilket avslutar beviset av satsen. $\square$

Vi ser också av beviset att vi kan skärpa de två första påståendena i satsen, och säga att f har ett *strängt* lokalt minimum i (a,b), respektive ett *strängt* lokalt maximum.