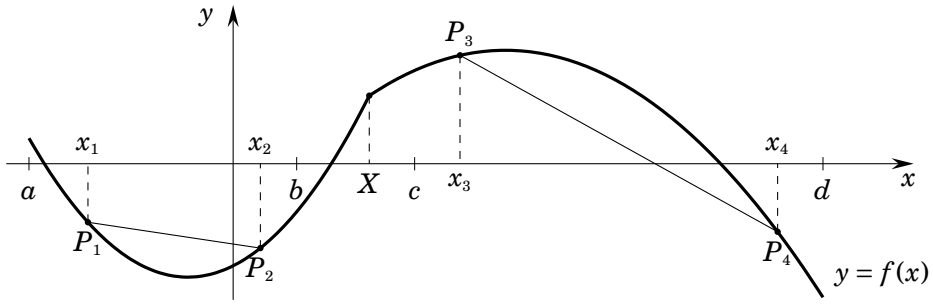
Konvexitet

En funktionsgraf, som inte är en rät linje, böjer ofta av åt ett bestämt håll i ett visst intervall. För en funktion som är deriverbar två gånger kan man med hjälp av andraderivatan ta reda på om grafen buktar uppåt eller nedåt. Vi talar om konkava respektive konvexa funktioner och börjar med att studera nedanstående funktionsgraf.



Figur 1. Funktionsgrafen $y = f(x)$.

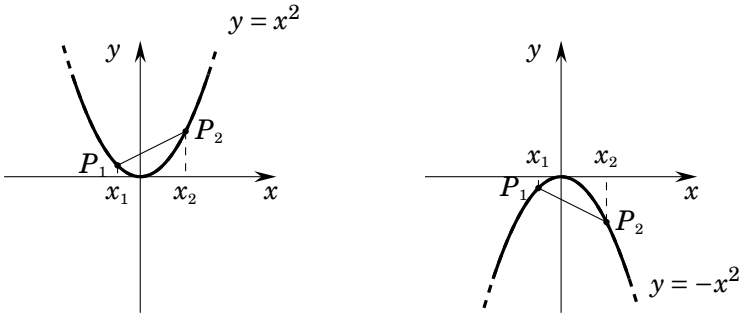
För varje par av x_1 och x_2 med $x_1 < x_2$ i intervallet $[a, b]$ ligger kurvan $y = f(x)$ *under* det räta linjestycket (kordan) mellan punkten $P_1 : \big(x_1, f(x_1)\big)$ och punkten $P_2 : \big(x_2, f(x_2)\big)$. Vi säger att funktionen f är *strängt konvex* i intervallet.

För varje par av x_3 och x_4 med $x_3 < x_4$ i intervallet $[c, d]$ ligger kurvan $y = f(x)$ *över* det räta linjestycket (kordan) mellan punkten $P_3 : \big(x_3, f(x_3)\big)$ och punkten $P_4 : \big(x_4, f(x_4)\big)$. Vi säger att funktionen f är *strängt konkav* i intervallet.

Man inser att en funktion f är strängt konkav om och endast om $-f$ är strängt konvex i ett visst intervall.

Punkten X har egenskapen att det finns ett intervall med X som höger ändpunkt, där f är strängt konvex, och ett intervall med X som vänster ändpunkt, där f är strängt konkav. Vi säger att X är en *inflexionspunkt*. Om ändringen är från strängt konkav till strängt konvex i punkten X, så är X också en inflexionspunkt. Även motsvarande punkt på grafen kan kallas en inflexionspunkt.

Exempel 1. I detta exempel visar vi att funktionen $f(x) = x^2$ är strängt konvex i $\mathbb{R}$ och att funktionen $g(x) = -x^2$ är strängt konkav i $\mathbb{R}$.



Figur 2. Funktionerna $y = f(x)$ och $y = g(x)$.

Vi börjar med att visa att f är strängt konvex. Vi måste då visa att funktionskurvan ligger under kordan (P_1, P_2) i det godtyckliga intervallet (x_1, x_2), där $x_1 < x_2$. Kordans lutning är

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1.$$

En ekvation för kordan är därför

$$y = y_k = x_1^2 + (x_2 + x_1)(x - x_1).$$

Att funktionskurvan $y = y_f = x^2$ ligger under kordan är ekvivalent med att differensen $y_k - y_f$ är positiv för $x_1 < x < x_2$. En beräkning ger

$$\begin{aligned} y_k - y_f &= x_1^2 + (x_2 + x_1)(x - x_1) - x^2 = x_1^2 - x^2 + (x_2 + x_1)(x - x_1) = \\ &= (x_1 + x)(x_1 - x) + (x_2 + x_1)(x - x_1) = -(x_1 + x)(x - x_1) + (x_2 + x_1)(x - x_1) \\ &= (x - x_1)(-x_1 - x + x_2 + x_1) = (x - x_1)(x_2 - x) > 0, \end{aligned}$$

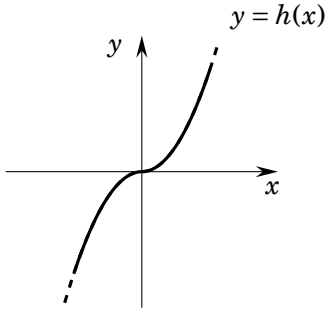
därför att $x_1 < x < x_2$.

Att funktionen $g(x) = -x^2$ är strängt konkav i $\mathbb{R}$ kan visas på motsvarande sätt. Man kan alternativt använda att g är strängt konkav om och endast om $-g = f$ är strängt konvex.

Slutligen ger vi ett exempel på en funktion som har en inflexionspunkt. Sätt

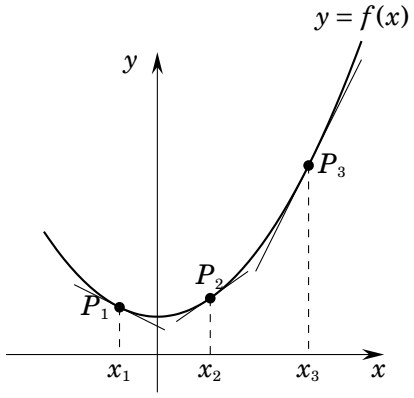
$$h(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & x \geq 0 \\ g(x) = -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Enligt början av exemplet är f strängt konvex i $\mathbb{R}$ och därmed även i intervallet $x \geq 0$. På samma sätt är g strängt konkav i intervallet $x \leq 0$. Det innebär att $x = 0$ är en inflexionspunkt. $\square$



Figur 3. Funktionen $y = h(x)$ har inflexionspunkten $x = 0$.

För en deriverbar, strängt konvex funktion kan man bevisa att tangentens lutning i punkten $(x, f(x))$ ökar, då x växer. Det innebär att $f'(x)$ är en strängt växande funktion. Se figur 4.



Figur 4. För en konvex funktion ökar tangentlutningen med x.

Omvänt kan man bevisa att om $f'(x)$ är en strängt växande funktion i ett intervall, så är f strängt konvex i intervallet.

Motsvarande gäller för en strängt konkav funktion. För en strängt konkav funktion minskar tangentlutningen, då x växer.

Om f är två gånger deriverbar, kommer tecknet för $f''(x)$ att bestämma hur $f'(x)$ växer och avtar. Det beror på att $f''(x)$ är derivatan av $f'(x)$. Vi får direkt följande sats.

Sats 1. Antag att funktionen f är två gånger deriverbar i ett intervall I. Om $f''(x) > 0$ i I, så är f strängt konvex i I. Om $f''(x) < 0$ i I, så är f strängt konkav i I.

Av satsen följer direkt följande sats om inflexionspunkter.

Sats 2. Om f är två gånger deriverbar, och $f''(x)$ har teckenväxlingen $+0-$ eller $-0+$ i en punkt X, så är X en inflexionspunkt.

Satserna används i nästa uppgift.

Uppgift 2. Sätt $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter och inflexionspunkter till f och rita grafen. Ange också största möjliga intervall, där f är strängt konvex respektive strängt konkav.

Lösning: Vi bestämmer $f'(x)$ och $f''(x)$ samt deras nollställen och får

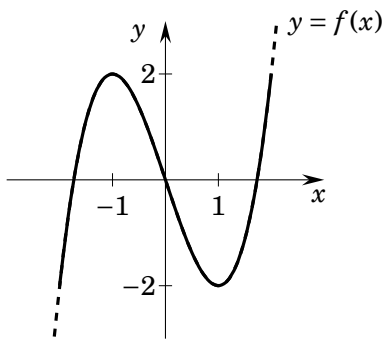
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ eller } x = 1$$
$$f''(x) = 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

I teckenschemat nedan lägger vi till en rad för $f''(x)$ och tar med andraderivatans nollställe i den översta raden.

x		-1		0		1	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

Av teckenschemat drar vi slutsatser och får direkt svaret.

Svar: $x = -1$ är en lokal maximipunkt, $x = 1$ är en lokal minimipunkt. Vidare är $x = 0$ är en inflexionspunkt. Största möjliga intervall, där f är strängt konvex, är $x \le 0$. Största möjliga intervall, där f är strängt konkav, är $x \ge 0$.□



Figur 5. Grafen till $f(x) = x^3 - 3x$.

Övningar

1 Bevisa med hjälp av andraderivatans tecken att funktionen

a) $f_1(x) = e^x$ är konvex i $\mathbb{R}$

b) $f_2(x) = \ln x$ är konkav i $x > 0$

2 Bestäm alla inflexionspunkter för funktionen

a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $f_2(x) = 2\arctan x - x$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{9}\dfrac{x^3}{x+2}$

d) $f_4(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Jämför gärna med övningarna 11.5 och 11.11.

Svar

1 Resultaten ges av följande räkningar:

a) $f_1''(x) = e^x > 0$ i $\mathbb{R}$ **b)** $f_2''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ i $x > 0$

2 **a)** $x = 1$ **b)** $x = 0$ **c)** $x = 0$ **d)** $x = 0$