Kapitel S

Mer om serier

I detta kapitel skall vi fortsätta att studera *serier*, ett begrepp som introducerades i Kapitel 9.5 i boken, framförallt ska vi bevisa ett antal konvergenskriterier. Mycket kommer att vara bekant från teorin för generaliserade integraler i Kapitel 13.6 i boken, och vi kommer också att utnyttja sambandet mellan serier och sådana integraler från Kapitel 13.7.

S.1 Serier

Vi påminner om att en *serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

definieras utifrån en talföljd $(a_k)_0^{\infty}$. Serien, som formellt är följden av delsummor

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

kallas *konvergent* om denna följd $(s_n)_0^{\infty}$ har ett (ändligt) gränsvärde då $n \to \infty$; detta gränsvärde kallas seriens *summa*. Som vi konstaterade på sidan 202 i boken så måste då termerna $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Vi börjar med att bevisa detta påstående.

Sats S.1. *Om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent så gäller det att*

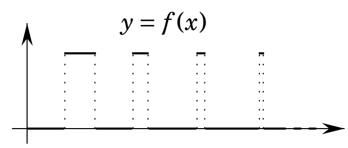
$$a_k \to 0 \qquad \text{då } k \to \infty.$$

Bevis. Antag att seriens summa är A, dvs. att $\lim_{n\to\infty} s_n = A$. Vi har då att

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1} \to A - A = 0 \qquad \text{då } n \to \infty. \qquad \square$$

Exempel S.1. Vi kan nu direkt konstatera att exempelvis serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ är divergent, eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0. \qquad \square$$



En intressant notering är att en motsvarighet till Sats S.1 inte gäller för (generaliserade) integraler; $\int_0^\infty f(x)\,dx$ kan vara konvergent trots att $f(x)$ inte går mot 0 då $x \to \infty$. Vi kan exempelvis låta f vara sådan att området under grafen består av återkommande staplar som smalnar av tillräckligt snabbt för att den sammanlagda arean skall tolkas som ändlig. *Om* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar så måste gränsvärdet dock vara 0.

Omvändningen till Sats S.1 är inte sann; det krävs även att termerna går mot noll tillräckligt fort för att serien skall vara konvergent. Vi har sett i Exempel 13.19 att serien $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ är divergent, trots att termerna $a_k = 1/\sqrt{k}$ går mot 0. Divergensen av denna hänger samman med divergensen av motsvarande generaliserad integral. Vi repeterar resultatet som detta bygger på (Sats 13.14 i boken).

Sats S.2 (Cauchys integralkriterium)**.** *Antag att funktionen $f(x)$ är positiv och avtagande för $x \geq 1$, samt integrerbar på $[1, X]$ för varje $X > 1$. Då är serien och den generaliserade integralen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \qquad \textit{respektive} \qquad \int_1^\infty f(x)\,dx$$

antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Som vi konstaterade i Anmärkning 13.6 kan vi översätta ett antal resultat som gäller för generaliserade integraler så att de i stället gäller för serier. Vi formulerar nu ”serieversionerna” av Sats 13.10 och Sats 13.12 i boken:

Sats S.3. *Antag att* $0 \le a_k \le b_k$ *för alla* $k \ge 0$. *Då gäller:*

$$\text{(1)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \textit{konvergent} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \textit{konvergent},$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \textit{divergent} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \textit{divergent}.$$

Notera att vi kan byta ut villkoret $k \ge 0$ mot $k \ge k_0$, för något heltal k_0.

Sats S.4. *Antag att följderna* $(a_k)_0^{\infty}$ *och* $(b_k)_0^{\infty}$ *är positiva. Om*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = A \neq 0$$

(A ändligt) så är serierna

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \qquad \textit{och} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

I fallet då $(a_k)_0^{\infty}$ och $(b_k)_0^{\infty}$ är avtagande följer resultaten i satserna direkt av Cauchys integralkriterium tillsammans med just Sats 13.10 och Sats 13.12. Vi kan också bevisa Sats S.3 och Sats S.4 (för godtyckliga positiva följder) genom att i stort sett kopiera bevisen för Sats 13.10 respektive Sats 13.12; utför gärna detta som övning.

Vi har för serier också en motsvarighet till del (1) i Sats 13.11:

Sats S.5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \textit{konvergent} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha > 1.$$

Om $\alpha > 0$ så är följden $(1/k^{\alpha})_1^{\infty}$ avtagande, och satsen följer av Cauchys integralkriterium tillsammans med Sats 13.11. För övriga α går inte termerna mot 0, och Sats S.1 ger då att serien är divergent.

Vi återvänder för ett ögonblick till den *geometriska serien* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ på sidan 203 i boken, och påminner om följande resultat:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ är konvergent med summan } \frac{1}{1-x} \text{ precis då } -1 < x < 1.$$

För termerna $a_k = x^k$ i denna serie gäller det att

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{x^k} = x, \qquad \text{och även att} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{k+1}}{x^k} = x, \tag{S.1}$$

i det första fallet då kvoten x är positiv. Det är ibland användbart att jämföra en allmän serie med den geometriska, genom att undersöka uttrycken i (S.1). Vi studerar därför nu två konvergenskriterier där just $\sqrt[k]{a_k}$ respektive a_{k+1}/a_k används.

Sats S.6 (Cauchys rotkriterium)**.** *Antag att $a_k \geq 0$ för alla k, och att gränsvärdet*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$$

existerar (ändligt). Då är serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \textit{konvergent om } A < 1 \textit{ och divergent om } A > 1.$$

Bevis. Antag först att $A < 1$, och välj ett B sådant att $A < B < 1$. Att gränsvärdet existerar innebär att $\sqrt[k]{a_k}$ så småningom kommer godtyckligt nära A; speciellt finns det ett heltal k_0 sådant att $\sqrt[k]{a_k} < B$ då $k > k_0$. Det gäller att

$$0 \leq \sqrt[k]{a_k} < B \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq a_k < B^k,$$

och eftersom $0 < B < 1$ ger att $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ är konvergent så följer det nu av Sats S.3 att även serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent.

I fallet $A > 1$ så får vi att

$$\sqrt[k]{a_k} > 1, \qquad \text{dvs. } a_k > 1, \qquad \text{då } k > k_0$$

för något k_0. I detta fall går alltså inte termerna mot 0, och $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är divergent enligt Sats S.1. □

Sats S.7 (d'Alemberts kvotkriterium)**.** *Antag att $a_k \geq 0$ för alla k, och att gränsvärdet*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$$

existerar (ändligt). Då är serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \textit{konvergent om } A < 1 \textit{ och divergent om } A > 1.$$

Bevis. Vi antar först att $A < 1$, och väljer igen ett B sådant att $A < B < 1$. Nu finns det ett k_0 sådant att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < B, \qquad \text{dvs. } a_{k+1} < Ba_k, \qquad \text{då } k > k_0.$$

Upprepad användning av den andra olikheten ger, för $k > k_0$, att

$$a_k < Ba_{k-1} < B^2 a_{k-2} < \ldots < B^{k-k_0} a_{k_0} = B^k B^{-k_0} a_{k_0} = C \cdot B^k,$$

med konstanten $C = B^{-k_0} a_{k_0}$. Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} C \cdot B^k = C \sum_{k=0}^{\infty} B^k$ är konvergent ger nu Sats S.3 att även $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent.

I fallet $A > 1$ så får vi att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1, \qquad \text{dvs. } a_{k+1} > a_k, \qquad \text{då } k > k_0$$

för något k_0. Speciellt ser vi att termerna inte går mot noll, och divergensen följer av Sats S.1. □

Exempel S.2. Vi undersöker nu konvergensen av $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k$. Eftersom termerna innehåller exponenten k så provar vi om rotkriteriet går att tillämpa. Vi beräknar gränsvärdet

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\, \frac{k}{2k-1} = 1 \cdot \frac{1}{2} < 1.$$

Här har vi använt att

$$\sqrt[k]{k} = e^{\ln k^{1/k}} = e^{\frac{\ln k}{k}} \to e^0 = 1 \qquad \text{då } k \to \infty. \tag{S.2}$$

Serien är alltså konvergent enligt Sats S.6 . □

Kvotkriteriet är lämpligt att använda då termerna innehåller fakulteter av summationsindex:

Exempel S.3. Serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ är konvergent för alla värden på x. Detta följer av Sats S.7 eftersom det för varje fixt x gäller att

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} = \frac{x}{k+1} \to 0 < 1 \quad \text{då } k \to \infty.$$

Om du läst Kapitel 11.3 så vet du nog att serien konvergerar mot e^x. □

Observera att Sats S.6 och Sats S.7 inte ger någon vägledning då gränsvärdet A är lika med 1. För serierna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är respektive gränsvärde 1, både då vi försöker tillämpa rotkriteriet (använd metoden i (S.2) för gränsvärdesberäkningen) och kvotkriteriet, men enligt Sats S.5 är den första av dessa serier divergent medan den andra är konvergent.

De konvergenskriterier vi sett hittills gäller endast för positiva serier, dvs. serier med icke-negativa termer. Precis som för generaliserade integraler så säger vi att serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är *absolutkonvergent* om $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ är konvergent, och vi har också en motsvarighet till Sats 13.13 i boken:

Sats S.8. *Varje absolutkonvergent serie är konvergent.*

Satsen kan bevisas genom att direkt översätta beviset av Sats 13.13, så vi avstår från detta. Vi säger också att en serie är *betingat konvergent* om den är konvergent men ej absolutkonvergent.

Exempel S.4. Vi har i Exempel 11.12 sett att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2. \tag{S.3}$$

Men samtidigt är

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergent enligt Sats S.5. Serien i (S.3) är alltså ett exempel på en betingat konvergent serie. □

Serien i (S.3) är en *alternerande serie*, dvs. en serie där varannan term är positiv och varannan negativ. För en sådan serie är det ett tillräckligt villkor för konvergens att termerna går mot noll, om de samtidigt har avtagande absolutbelopp. Detta är innehållet i följande sats.

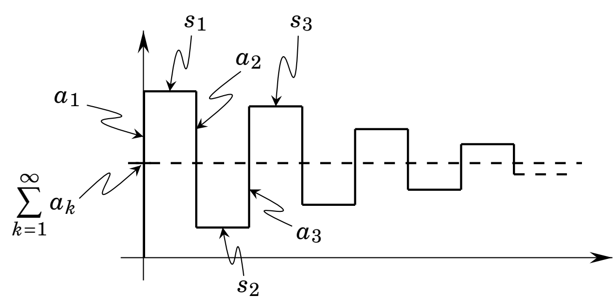
Sats S.9 (Leibniz' kriterium)**.** *Antag att* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *är en alternerande serie. Om*

$$|a_{k+1}| \leq |a_k| \qquad \textit{och} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

så är serien konvergent.

Som tidigare räcker det att olikheten gäller för alla k större än något k_0.

Det är inte svårt att övertyga sig om att resultatet i satsen är sant genom att rita en figur:



Eftersom termerna har alternerande tecken, avtagande absolutbelopp och går mot noll så kommer delsummornas värde att svänga in mot seriens summa. Övertyga dig också, genom att studera figuren, om att följande feluppskattning gäller: Om serien är konvergent med summa A så gäller det för en approximation med den n:te delsumman s_n att

$$|A - s_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Vi ger nu även ett strikt bevis för satsen.

Bevis av Sats S.9. Antag att den första termen a_1 är positiv. Vi inför beteckningen $c_k = |a_k|$, och studerar delsummor med ett jämnt antal termer:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n} =$$
$$= c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2n-1} - c_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \ldots + (c_{2n-1} - c_{2n}).$$

Eftersom termerna har avtagande absolutbelopp så är differensen i varje parentes positiv, och vi ser att följden $(s_{2n})_1^\infty$ är växande. Genom att i stället gruppera termerna enligt

$$s_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \ldots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n}$$

så ser vi att följden är uppåt begränsad av c_1. Då varje växande uppåt begränsad talföljd har[1] ett gränsvärde så existerar $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = A$.

För att studera delsummor s_{2n+1} med ett udda antal termer så skriver vi $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Eftersom termerna går mot 0 får vi även här att

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = A + 0 = A.$$

Sammantaget ger[2] detta att serien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent med summan A. □

Vi avslutar med några korta kommentarer. Som vi nämnt på sidan 330 i boken så kan varje summa ses som arean under en trappfunktion, där varje term a_k motsvaras av en stapel med höjd a_k och bredd 1. Jämförelsen är också rimlig för serier, om vi tillåter oss oändligt många staplar. Att en serie är absolutkonvergent innebär då att summan av alla stapelareor kan tolkas som ändlig. I en betingat konvergent serie är den totala arean oändlig, men de olika stapelareorna, räknade med tecken, ”tar ut varandra” så att resultatet blir ändligt.

Man kan visa att det för en absolutkonvergent serie inte har någon betydelse i vilken ordning man väljer att summera termerna; man får alltid samma summa. För en betingat konvergent serie är det däremot väsentligt i vilken ordning termerna står. Det är till och med så att vi kan omordna termerna i en betingat konvergent serie så att den resulterande serien konvergerar mot en godtyckligt given summa, eller divergerar mot $+\infty$ eller $-\infty$. Detta resultat kallas ibland *Riemanns omordningssats*.

[1] Se Sats R.3 i ”Mer om reella tal och kontinuitet” här i nätmaterialet.

[2] Här måste man egentligen gå tillbaka på gränsvärdesdefinitionen, något vi avstår från.