Kapitel R

Mer om reella tal och kontinuitet

I detta kapitel formulerar vi ett av de reella talens grundläggande axiom, *axiomet om övre gräns*, och studerar några konsekvenser av detta. Med dess hjälp kommer vi att kunna visa de satser om kontinuerliga funktioner som vi i boken lämnat utan bevis. Vi definierar vidare ett starkare kontinuitetsbegrepp, *likformig kontinuitet*, vilket gör att vi kan fylla i några luckor i bokens framställning av integraler.

R.1 Övre och undre gräns

Vi börjar med att definiera några begrepp som vi kommer att behöva.

Definition R.1 (Övre och undre begränsning)**.** *Låt A vara en delmängd av de reella talen. Ett tal M som uppfyller*

$$M \geq x \qquad \text{för alla } x \in A$$

kallas en ***övre begränsning*** *(eller* ***majorant****) till A. Ett tal m som uppfyller*

$$m \leq x \qquad \text{för alla } x \in A$$

kallas en ***undre begränsning*** *(eller* ***minorant****) till A.*

Observera att en övre eller undre begränsning inte behöver existera; t.ex. mängden $\mathbb{R}$ har varken eller. Notera även att en övre (undre) begränsning till A existerar precis då A är uppåt (nedåt) begränsad.

Följande axiom är en viktig grundsten för analysen.

Axiom (Axiomet om övre gräns)**.** Varje icke-tom uppåt begränsad mängd av reella tal har en *minsta* övre begränsning.

Den minsta övre begränsningen till en mängd A kallas **övre gräns** (eller **supremum**) till A och betecknas $\sup A$.

Ur axiomet följer ett motsvarande *axiom om undre gräns*, dvs. att varje icke-tom nedåt begränsad mängd B av reella tal har en största undre begränsning. Denna kallas **undre gräns** (eller **infimum**) och betecknas $\inf B$. Att varje nedåt begränsad mängd B har en största undre begränsning följer av att mängden $A = \{-x\,;x \in B\}$ är uppåt begränsad, och det gäller här att $\inf B = -\sup A$.

Exempel R.1. För mängderna

$$A = [0,1], \qquad B = [0,1[\qquad \text{och} \qquad C = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots\}$$

gäller det att $\sup A = \sup B = \sup C = 1$, och att $\inf A = \inf B = \inf C = 0$. □

Axiomet om övre gräns verkar rimligt om vi som brukligt identifierar de reella talen med punkterna på en rät linje. Axiomet innebär lite slarvigt uttryckt att det inte finns något ”hål” i den reella tallinjen. Motsvarande gäller t.ex. inte för mängden av rationella tal; vi har ju irrationella tal bland de rationella. För de rationella talen gäller inte heller något motsvarande axiom om övre gräns.

Det är möjligt att, i stället för att hänvisa till en rät linje, göra en mer grundläggande uppbyggnad av de reella talen. Axiomet om övre gräns blir då inget axiom, utan ett resultat som kan bevisas utifrån de mer grundläggande axiom vi i så fall utgår från.

Vi kan nu bevisa följande sats, som vi formulerat och använt vid ett par tillfällen i boken.

Sats R.1. *Varje växande uppåt begränsad funktion $f(x)$ har ett (ändligt) gränsvärde då $x \to \infty$.*

Bevis. Att f är uppåt begränsad är samma som att värdemängden V_f har en övre begränsning, så enligt axiomet om övre gräns existerar

$$M = \sup V_f.$$

Vi skall visa att $\lim_{x\to\infty} f(x) = M$, dvs. att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett ω_ε så att

$$|f(x) - M| < \varepsilon \qquad \text{för alla } x \in D_f \text{ sådana att } x > \omega_\varepsilon. \tag{R.1}$$

Eftersom M är den minsta övre begränsningen till V_f måste det finnas ett tal $x_0 \in D_f$ sådant att $f(x_0) > M - \varepsilon$, för annars hade $M - \varepsilon$ varit en mindre övre begränsning. Då f är växande gäller det nu att

$$f(x) \geq f(x_0) > M - \varepsilon \qquad \text{för alla } x > x_0 \;\; (x \in D_f).$$

Eftersom $M = \sup V_f$ gäller det samtidigt att $f(x) \leq M < M + \varepsilon$ för alla $x \in D_f$. Då vi nu har att

$$M - \varepsilon < f(x) < M + \varepsilon \qquad \text{för alla } x > x_0$$

så är (R.1) uppfylld (med $\omega_\varepsilon = x_0$), och satsen är visad. □

Som en följd får vi att även en funktion f som är avtagande och nedåt begränsad har ett gränsvärde, detta genom att tillämpa satsen på funktionen $-f$, som då blir växande och uppåt begränsad.

Med Sats R.1 tillsammans med resultatet i följande sats kan vi nu dra slutsatsen att varje växande funktion har ett gränsvärde, egentligt eller oegentligt.

Sats R.2. *Antag att funktionen f är växande och ej uppåt begränsad. Då gäller det att*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Bevis. Låt K vara ett godtyckligt tal. Eftersom f saknar övre begränsning måste det finnas ett tal $x_0 \in D_f$ sådant att $f(x_0) > K$. Då f är växande gäller det nu att

$$f(x) \geq f(x_0) > K \qquad \text{för alla } x > x_0 \;\; (x \in D_f),$$

vilket precis betyder att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. □

Vi påminner om att en *talföljd* kan ses som en funktion definierad på (en delmängd av) heltalen. Som en direkt konsekvens av Sats R.1 får vi därför följande resultat.

Sats R.3. *Varje växande uppåt begränsad talföljd $(x_k)_0^\infty$ har ett (ändligt) gränsvärde då $k \to \infty$.*

Motsvarande gäller för en avtagande och nedåt begränsad talföljd.

Genom att studera till exempel följden $(x_k)_0^\infty = (-1)^k$ så inser vi att en begränsad (dvs. både uppåt och nedåt begränsad) talföljd inte nödvändigtvis har ett gränsvärde. Det är dock intressant att notera att vi ur varje begränsad oändlig[1] talföljd kan välja ut en *delföljd* som har ett gränsvärde. Detta är innehållet i en användbar sats som kallas *Bolzano-Weierstrass sats*.

Sats R.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Varje oändlig begränsad talföljd $(x_k)_0^\infty$ har en konvergent delföljd.*

Bevis. Eftersom talföljden är begränsad kan vi välja ett kompakt intervall $[a_1, b_1]$ så att alla element i följden ligger i intervallet. Vi väljer ett element x_{n_1} i följden. Låt c_1 vara mittpunkten av intervallet $[a_1, b_1]$ och studera intervallen $[a_1, c_1]$ och $[c_1, b_1]$. Minst ett av dessa två intervall måste innehålla oändligt många element. Om detta gäller det första intervallet så sätter vi $a_2 = a_1$ och $b_2 = c_1$, annars sätter vi $a_2 = c_1$ och $b_2 = b_1$. Vi har nu alltså ett nytt intervall $[a_2, b_2]$ som innehåller oändligt många av följdens element, och vi kan välja ett heltal $n_2 > n_1$ så att $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$. Låt c_2 vara mittpunkten av $[a_2, b_2]$. Minst ett av intervallen $[a_2, c_2]$ och $[c_2, b_2]$ innehåller oändligt många element; enligt samma princip som tidigare döper vi om ändpunkterna så att detta gäller $[a_3, b_3]$ och väljer ett element x_{n_3} $(n_3 > n_2)$ i intervallet.

Genom att fortsätta på detta sätt får vi en svit

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$$

av intervall, med tillhörande element $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Eftersom vi i varje steg halverar intervallängden gäller det att $b_k - a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Talföljden $(a_k)_1^\infty$ är växande och uppåt begränsad (av exempelvis b_1), så enligt Sats R.1 existerar $\lim_{k\to\infty} a_k = A$. Då $b_k - a_k \to 0$ ser vi att även $\lim_{k\to\infty} b_k = A$. Eftersom $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ för varje k ger nu instängning (Sats 9.5 i boken) att $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A$, så $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ är en konvergent delföljd till vår ursprungliga följd. □

Om vi har en oändlig begränsad talföljd så måste det alltså finnas (minst) en **hopningspunkt** som följdens punkter kommer godtyckligt nära. Exempelvis har följden $(x_k)_0^\infty = (-1)^k + \frac{1}{k}$ hopningspunkterna -1 och 1 (vilket också gäller följden $(x_k)_0^\infty = (-1)^k$ ovan).

[1] En talföljd som innehåller ett obegränsat antal element.

R.2 Satser om kontinuerliga funktioner

Med resultaten i förra avsnittet till hjälp kan vi nu visa de satser från Kapitel 9.3 i boken som vi lämnat utan bevis.

Vi påminner först om definitionen av kontinuitet: Funktionen f sägs vara kontinuerlig i punkten a om

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

och vi säger att f är kontinuerlig på intervallet I om (restriktionen av) f är kontinuerlig i varje $a \in I$. Vi börjar med att visa satsen om mellanliggande värden, dvs. Sats 9.8 i boken; därefter följer ett bevis av Sats 9.9.

Sats R.5 (Satsen om mellanliggande värden)**.** *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a,b]$, och att $f(a) \neq f(b)$. Då antar f varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ (minst) en gång i detta intervall.*

Bevis. Låt K vara ett värde mellan $f(a)$ och $f(b)$. Vi skall använda en metod som liknar den i föregående bevis, och successivt halvera $[a,b]$ för att stänga in en punkt där K måste antas.

Vi antar att $f(a) < f(b)$; fallet $f(a) > f(b)$ behandlas på motsvarande sätt. Låt c vara mittpunkten av intervallet $[a,b]$. Om $f(c) = K$ så är vi färdiga och satsen är bevisad. I fallet $f(c) > K$ sätter vi $a_1 = a$ och $b_1 = c$, och om $f(c) < K$ så låter vi $a_1 = c$ och $b_1 = b$. Vi har nu ett nytt intervall $[a_1,b_1]$ där det gäller att $f(a_1) < K < f(b_1)$. På samma sätt låter vi c_1 vara mittpunkten av $[a_1,b_1]$. Om $f(c_1) = K$ är vi klara, annars låter vi c_1 vara en av ändpunkterna i ett nytt intervall $[a_2,b_2]$ (den andre ändpunkten är antingen a_1 eller b_1) där det gäller att $f(a_2) < K < f(b_2)$.

Genom att fortsätta på detta vis får vi antingen $f(c_k) = K$ för något k, eller en svit

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \dots$$

av halverade intervall, med

$$f(a_k) < K < f(b_k) \qquad \text{för alla } k. \tag{R.2}$$

Precis om i beviset av Sats R.4 så existerar $\lim_{k\to\infty} a_k = A$, och eftersom återigen $b_k - a_k \to 0$ gäller det även att $\lim_{k\to\infty} b_k = A$. Kontinuiteten av f ger nu att

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(A).$$

Olikheten i (R.2) innebär då nödvändigtvis att $f(A) = K$, och eftersom $a \le A \le b$ så är satsen visad. $\square$

Sats R.6. *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a,b]$. Då antar f ett största och ett minsta värde i detta intervall.*

Bevis. Vi visar att f antar ett största värde; att ett minsta värde antas bevisas med ett motsvarade resonemang. Till att börja med visar vi att f är uppåt begränsad på $[a,b]$. Om detta inte skulle gälla så kan vi för varje heltal k hitta $x_k \in [a,b]$ med $f(x_k) > k$. Enligt Sats R.4 kan vi ur följden $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ välja ut en konvergent delföljd $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$. Om $x_{k_j} \to \xi$ så ger kontinuiteten av f att $f(x_{k_j}) \to f(\xi)$. Då det samtidigt gäller att $f(x_{k_j}) \to \infty$ (eftersom $f(x_k) > k$ för varje k) har vi nu fått en motsägelse, så f är uppåt begränsad på $[a,b]$.

Enligt axiomet om övre gräns existerar därför $A = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Vi väljer nu punkter $x_n \in [a,b]$ sådana att

$$A - f(x_n) < 1/n \qquad \text{för varje } n, \tag{R.3}$$

och ur följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ väljer vi ut en konvergent delföljd $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. Om $x_{n_j} \to \xi$ så ger kontinuiteten av f att $f(x_{n_j}) \to f(\xi)$, och på grund av (R.3) har vi nödvändigtvis $f(\xi) = A$. Satsen är därmed visad. □

Vi skall nu bevisa Sats 9.11 (Sats R.7 nedan), som säger att inversen till en kontinuerlig funktion också är kontinuerlig. Det är lämpligt att först visa ett par hjälpsatser. Vi inför den naturliga beteckningen $f(I) = \{f(x); x \in I\}$.

Hjälpsats R.1. *Antag att funktionen f är monoton på intervallet I, och att $f(I)$ är ett intervall. Då är f kontinuerlig på I.*

Bevis. Vi skall visa att $\lim_{x\to a} f(x)$ existerar och är lika med $f(a)$ för varje $a \in I$. Vi antar att f är växande på I; fallet då f är avtagande behandlas på ett motsvarande sätt.

Antag först att a är en inre punkt (dvs. ej ändpunkt) till I, och studera mängden $A = \{f(x); x \in I, x < a\}$. Eftersom f är växande så är A uppåt begränsad av $f(a)$, och enligt axiomet om övre gräns existerar $\sup A = M$. För varje $\varepsilon > 0$ finns $x_0 < a$ sådant att $M - f(x_0) < \varepsilon$, och då f är växande gäller det även att $M - f(x) < \varepsilon$ för $x_0 < x < a$. Med $\delta_\varepsilon = a - x_0$ har vi alltså

$$|f(x) - M| < \varepsilon \qquad \text{då } a - \delta_\varepsilon < x < a,$$

vilket precis är definitionen av att vänstergränsvärdet $\lim_{x\to a^-} f(x) = M$ existerar. Eftersom f är växande får vi nu att $M = f(a)$, för fallet $M < f(a)$ skulle innebära att värdena mellan M och $f(a)$ saknas i $f(I)$, vilket motsäger att $f(I)$ är ett intervall.

Genom att i stället studera infimum av mängden $\{f(x); x \in I, x > a\}$ får vi på motsvarande sätt att $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, vilket tillsammans med vårt tidigare gränsvärde $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ger att $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Fallet då a är en inre punkt är därmed avklarat.

För att visa att f är kontinuerlig i en eventuell ändpunkt $a \in I$ behöver vi visa att aktuellt ensidigt gränsvärde existerar och är lika med $f(a)$. Detta behandlar vi som ovan genom att studera *en* av mängderna; t.ex. $\{f(x); x \in I, x > a\}$ om a är en vänsterändpunkt. Beviset är därmed klart. □

Hjälpsats R.2. *Antag att funktionen f är injektiv och kontinuerlig på intervallet I. Då är f monoton på I.*

Bevis. Vi antar motsatsen, dvs. att f inte är monoton på I. Då finns det tre punkter $x_1 < x_2 < x_3$ i I sådana att

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ och } f(x_2) > f(x_3), \quad \text{alternativt} \quad f(x_1) > f(x_2) \text{ och } f(x_2) < f(x_3).$$

(Repetera gärna Definition 7.4 i boken.) Vi antar att det första av dessa fall gäller; beviset i det andra fallet är likartat.

Välj nu ett tal A sådant att $f(x_1) < A < f(x_2)$ och $f(x_2) > A > f(x_3)$. Enligt satsen om mellanliggande värden (Sats R.5) så finns det $c_1 \in [x_1, x_2]$ och $c_2 \in [x_2, x_3]$ med $f(c_1) = f(c_2) = A$, men $c_1 \neq c_2$. (De två intervallen har visserligen en gemensam punkt x_2, men eftersom exempelvis $f(c_1) < f(x_2)$ kan vi dra slutsatsen att $c_1 \neq c_2$.) Detta motsäger att f är injektiv, så vårt antagande att f ej är monoton är falskt. Hjälpsatsen är därmed bevisad. □

Vi är nu redo att bevisa huvudresultatet.

Sats R.7. *Antag att funktionen f, definierad på intervallet I, är injektiv och kontinuerlig. Då följer det att inversen f^{-1} är kontinuerlig.*

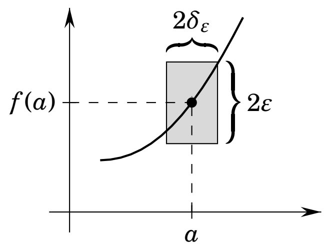
Bevis. Enligt Hjälpsats R.2 vet vi att f även är monoton på I, och då följer det av Sats 7.1 i boken att f^{-1} är monoton på $f(I)$. Låt nu y_1 och y_2 vara två godtyckliga punkter i $f(I)$. Då finns $x_1, x_2 \in I$ med $f(x_1) = y_1$ och $f(x_2) = y_2$, och satsen om mellanliggande värden tillämpad på intervallet $[x_1, x_2]$ eller $[x_2, x_1]$ ger att $f(I)$ innehåller alla värden mellan y_1 och y_2, dvs. att $f(I)$ är ett intervall. Eftersom även $f^{-1}(f(I)) = I$ är ett intervall kan vi nu använda Hjälpsats R.1, tillämpad på f^{-1}, för att konstatera att f^{-1} är kontinuerlig. □

R.3 Likformig kontinuitet

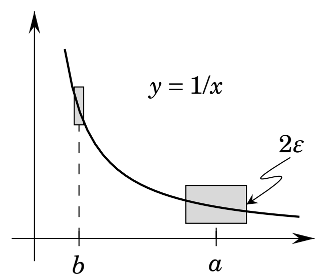
Vi skall nu resonera oss fram till ett kontinuitetsbegrepp, så kallad *likformig kontinuitet*, som är starkare än det vi hittills använt. Enligt definitionen av gränsvärde (Definition 9.4) så är f kontinuerlig (i vanlig mening) på intervallet I om det för varje $a \in I$ och varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{för alla } x \in I \text{ sådana att } 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon. \tag{R.4}$$

Som vi kommenterat på sidan 183 så innebär detta att funktionsvärdena $f(x)$, kring punkten a, håller sig inom en remsa med höjd 2ε då x befinner sig inom en remsa med bredd $2\delta_\varepsilon$. Här beror δ_ε, förutom på ε, *också* på vilken punkt a vi väljer.



Exempel R.2. Funktionen $f(x) = 1/x$ är kontinuerlig, exempelvis på intervallet $]0,\infty[$. För det ε vi har valt i figuren så kan vi vid punkten $x = a$ tillåta oss en bred rektangel, men vid punkten $x = b$ måste vi välja en smal rektangel, dvs. ett litet δ_ε, för att funktionsvärdena skall hålla sig inom höjden 2ε. Ju mindre x-värde punkten vi studerar har, desto mindre δ_ε måste vi välja för att hålla oss inom samma höjd. För ett givet ε verkar det därför inte finnas *ett* δ_ε som fungerar, dvs. sådant att (R.4) gäller, för *alla* $a \in]0,\infty[$. □



Vi skall nu införa ett kontinuitetsbegrepp där vi inte tillåter situationen i exemplet; för ett givet tal $\varepsilon > 0$ så skall vi kunna välja *ett* δ_ε som fungerar, oberoende av vilken punkt i intervallet vi studerar.

Definition R.2 (Likformig kontinuitet)**.** *En funktion f definierad på intervallet I kallas* ***likformigt kontinuerlig*** *på I om det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \textit{för alla } x_1, x_2 \in I \textit{ sådana att } |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon.$$

Genom att jämföra med (R.4) så ser vi att varje likformigt kontinuerlig funktion också är kontinuerlig i vår tidigare mening (låt x_1 svara mot x och x_2 mot a). Vi säger därför att likformig kontinuitet är ett *starkare* kontinuitetsbegrepp

Den intuitiva bilden av likformig kontinuitet är att funktionens graf i intervallet inte blir ”hur brant som helst”. Utifrån Exempel R.2 misstänker vi att $f(x) = 1/x$ inte är likformigt kontinuerlig på $I =]0,\infty[$, något som följande beräkningar bekräftar:

Välj $\varepsilon = 1/2$ och antag att det finns ett $\delta_\varepsilon > 0$ sådant att villkoret i Definition R.2 är uppfyllt. Med $n > 1/\delta_\varepsilon$ gäller det då för $x_1 = 1/n$ och $x_2 = 1/(n+1)$ att $x_1, x_2 \in I$, och att

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} < \delta_\varepsilon \cdot \frac{1}{n+1} < \delta_\varepsilon.$$

Men eftersom det samtidigt gäller att

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon$$

har vi fått en motsägelse, så f är inte likformigt kontinuerlig på I.

En funktion som är kontinuerlig på ett *kompakt* intervall är däremot alltid också likformigt kontinuerlig på detta.

Sats R.8. *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det kompakta intervallet I. Då är f likformigt kontinuerlig på I.*

Bevis. Vi skall konstruera ett motsägelsebevis, och antar därför att f inte är likformigt kontinuerlig på I. Detta innebär att det finns ett $\varepsilon > 0$ sådant att vi för varje δ kan hitta $x_1, x_2 \in I$ så att

$$|x_1 - x_2| < \delta \qquad \text{men} \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Låt ε ha denna egenskap. Vi sätter nu $\delta_n = 1/n$, $n = 1,2,3,..$, och väljer, för varje n, punkter $x_{1_n}, x_{2_n} \in I$ som uppfyller

$$|x_{1_n} - x_{2_n}| < \delta_n = \tfrac{1}{n} \qquad \text{men} \qquad |f(x_{1_n}) - f(x_{2_n})| \geq \varepsilon.$$

Speciellt gäller det att $|x_{1_n} - x_{2_n}| \to 0$ då $n \to \infty$. De båda talföljderna $(x_{1_n})_1^\infty$ och $(x_{2_n})_1^\infty$ ligger i I och är begränsade, så enligt Bolzano-Weierstrass sats kan vi välja ut konvergenta delföljder $(x_{1_{n_j}})_1^\infty$ respektive $(x_{2_{n_j}})_1^\infty$. Om $x_{1_{n_j}} \to \xi_1$ och $x_{2_{n_j}} \to \xi_2$ så ger kontinuiteten av f att $f(x_{1_{n_j}}) \to f(\xi_1)$ och $f(x_{2_{n_j}}) \to f(\xi_2)$. Eftersom $|x_{1_{n_j}} - x_{2_{n_j}}| \to 0$ måste nödvändigtvis $\xi_1 = \xi_2$, och som en följd gäller det att

$$f(x_{1_{n_j}}) - f(x_{2_{n_j}}) \to f(\xi_1) - f(\xi_2) = 0 \qquad \text{då } j \to \infty.$$

Detta motsäger dock att $|f(x_{1_n}) - f(x_{2_n})| \geq \varepsilon$ för alla n, så vi konstaterar att antagandet att f inte är likformigt kontinuerlig är felaktigt. Satsen är därmed bevisad. □

R.4 Integraler

Vi kan nu visa de resultat om integraler som i boken lämnats obevisade. För överskådlighetens skull inför vi, för en funktion f, beteckningen $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Det första vi gör är att fylla en lucka i vår framställning fram till integralens definition. Vi påminner om att en funktion f är integrerbar på intervallet $[a,b]$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ, med $\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ då $a \leq x \leq b$, sådana att

$$I(\Psi) - I(\Phi) < \varepsilon. \tag{R.5}$$

Vi påstod på sidan 306 att det då finns precis ett tal $\mathscr{I}$ som uppfyller

$$I(\Phi) \leq \mathscr{I} \leq I(\Psi) \tag{R.6}$$

för alla sådana Φ och Ψ. Integralen av f över $[a,b]$ definierade vi sedan som detta tal. Med hjälp av axiomet om övre gräns kan vi nu bevisa vårt påstående, dvs. att det för en integrerbar funktion existerar ett entydigt tal $\mathscr{I}$ som uppfyller (R.6).

Bevis. Vi visar först att det finns minst ett tal som uppfyller (R.6). Betrakta mängden A av alla tal $I(\Phi)$, där Φ är trappfunktioner under f. Eftersom $\Phi \leq \Psi$ medför att $I(\Phi) \leq I(\Psi)$, enligt (13.5) i boken, så är A uppåt begränsad av $I(\Psi)$ för varje trappfunktion Ψ över f. Enligt axiomet om övre gräns har A därför en minsta övre begränsning $\sup A$, och vi betecknar detta tal $\mathscr{I}$. Det gäller att $\mathscr{I} \geq I(\Phi)$ för varje trappfunktion Φ under f, och eftersom $\mathscr{I}$ är just den minsta övre begränsningen gäller det även att $\mathscr{I} \leq I(\Psi)$ för varje trappfunktion Ψ över f. Detta visar existensen av (minst) ett tal $\mathscr{I}$ sådant att (R.6) är uppfylld.

Antag nu att det finns två olika tal I_1 och I_2 som uppfyller (R.6); vi antar vidare att $I_1 < I_2$. Om vi väljer ett tal $\varepsilon > 0$ sådant att $\varepsilon < I_2 - I_1$ så får vi en motsägelse till (R.5), eftersom

$$I(\Phi) \leq I_1 < I_2 \leq I(\Psi) \qquad \Rightarrow \qquad I(\Psi) - I(\Phi) \geq I_2 - I_1 > \varepsilon.$$

Vi konstaterar därför att det endast finns ett tal $\mathscr{I}$ som uppfyller (R.6), och vårt påstående är bevisat. □

Med hjälp av begreppet likformig kontinuitet kan vi nu visa att varje funktion som är kontinuerlig på ett kompakt intervall också är integrerbar på detta (Sats 13.2 i boken).

Sats R.9. *Om funktionen f är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a,b]$ så är f integrerbar på $[a,b]$.*

Bevis. Vi skall visa att det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ, under respektive över f, sådana att $I(\Psi) - I(\Phi) < \varepsilon$. Enligt Sats R.8 vet vi att f är likformigt kontinuerlig på $[a,b]$. Speciellt finns då ett tal $\delta > 0$ sådant att

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{för alla } x_1, x_2 \in [a,b] \text{ sådana att } |x_1 - x_2| < \delta. \tag{R.7}$$

(Det kommer att framgå senare varför vi valt $\varepsilon/(b-a)$ i stället för ε.)

Vi väljer nu en indelning $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ av $[a,b]$ sådan att indelningens finhet, dvs. längden av det längsta delintervallet, är mindre än δ. Studera de kompakta intervallen $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,\ldots,n$. Eftersom f är kontinuerlig på dessa så antas enligt Sats R.6 ett största värde M_k och ett minsta värde m_k i varje $[x_{k-1}, x_k]$. Om M_k antas i punkten x_{M_k} och m_k i punkten x_{m_k} så gäller det att $|x_{M_k} - x_{m_k}| \le x_k - x_{k-1} < \delta$. Enligt (R.7) är därför

$$|f(x_{M_k}) - f(x_{m_k})| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad \text{dvs.} \qquad M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

för varje k.

Vi definierar nu två trappfunktioner Φ och Ψ enligt följande:

$$\Phi(x) = m_k, \ \Psi(x) = M_k \qquad \text{då} \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{R.8}$$

(Precis som i (13.1) i boken så är funktionsvärdena i indelningspunkterna inte intressanta.) Det gäller att $\Phi(x) \le f(x) \le \Psi(x)$ då $a \le x \le b$, och ser vi tillbaka på hur integralen av en trappfunktion definierades får vi

$$\begin{aligned} I(\Psi) - I(\Phi) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Detta var precis vad vi ville uppnå, så vi konstaterar att satsen är bevisad. □

Detta bevis innehåller också de flesta moment som behövs för att bevisa Sats 13.3 (Sats R.10 nedan), som säger att en följd av Riemannsummor konvergerar mot motsvarande integral. Vi påminner om att en

Riemannsumma till en funktion f på intervallet $[a,b]$ är en summa på formen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

där $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ är en indelning av $[a,b]$, och $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Sats R.10. *Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$, och att*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

är Riemannsummor till f på $[a,b]$ (för olika indelningar). Då gäller det att

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

när indelningarnas finhet går mot noll.

Bevis. Vi skall visa att det för ett godtyckligt tal $\varepsilon > 0$ gäller att

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I(f) \right| < \varepsilon$$

om bara intervallindelningen är tillräckligt fin. Välj återigen ett tal $\delta > 0$ som uppfyller (R.7). Eftersom indelningarnas finhet går mot noll kommer vi så småningom att ha en indelning med finhet $< \delta$. För en sådan indelning tar vi fram alla tal M_k och m_k, samt skapar trappfunktioner Φ och Ψ på samma sätt som i föregående bevis. Eftersom $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ så gäller det att $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$ för varje k, och speciellt att

$$I(\Phi) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le I(\Psi).$$

Eftersom det samtidigt gäller att $I(\Phi) \le I(f) \le I(\Psi)$ så får vi

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I(f) \right| \le I(\Psi) - I(\Phi) < \varepsilon,$$

där den sista olikheten följer på samma sätt som i föregående bevis. □