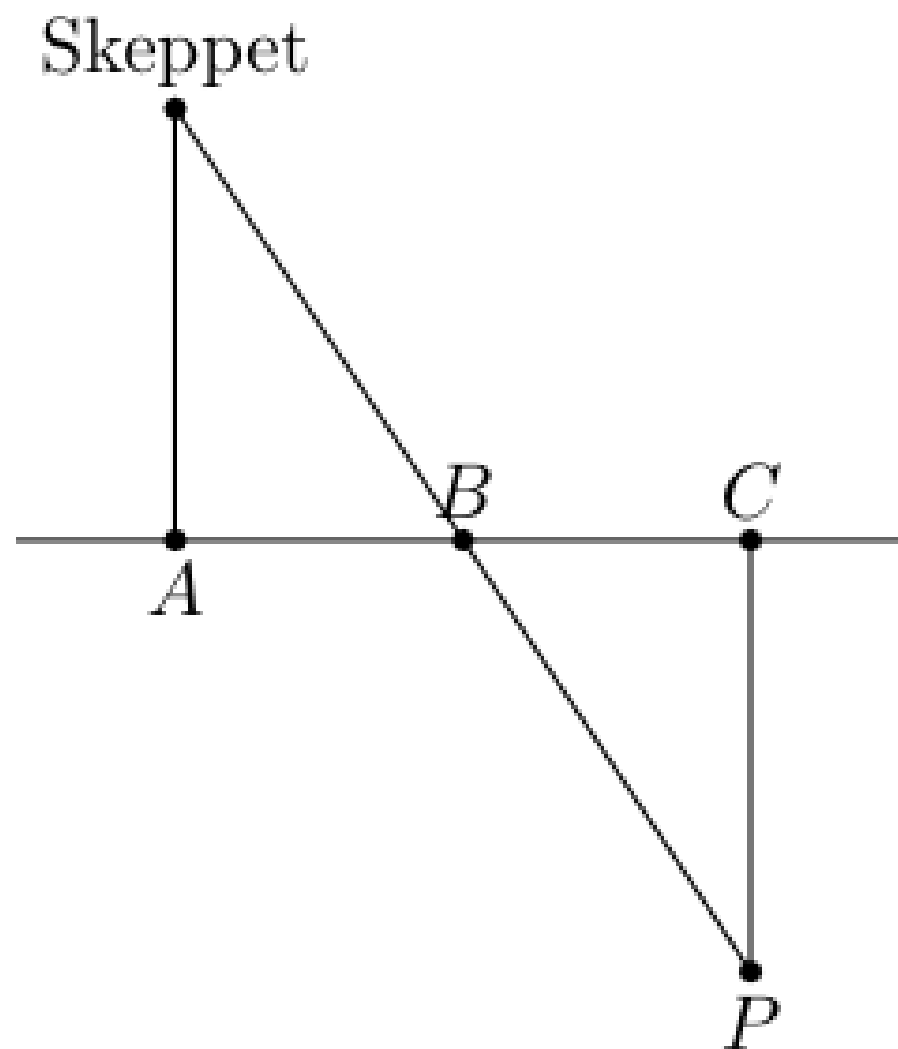
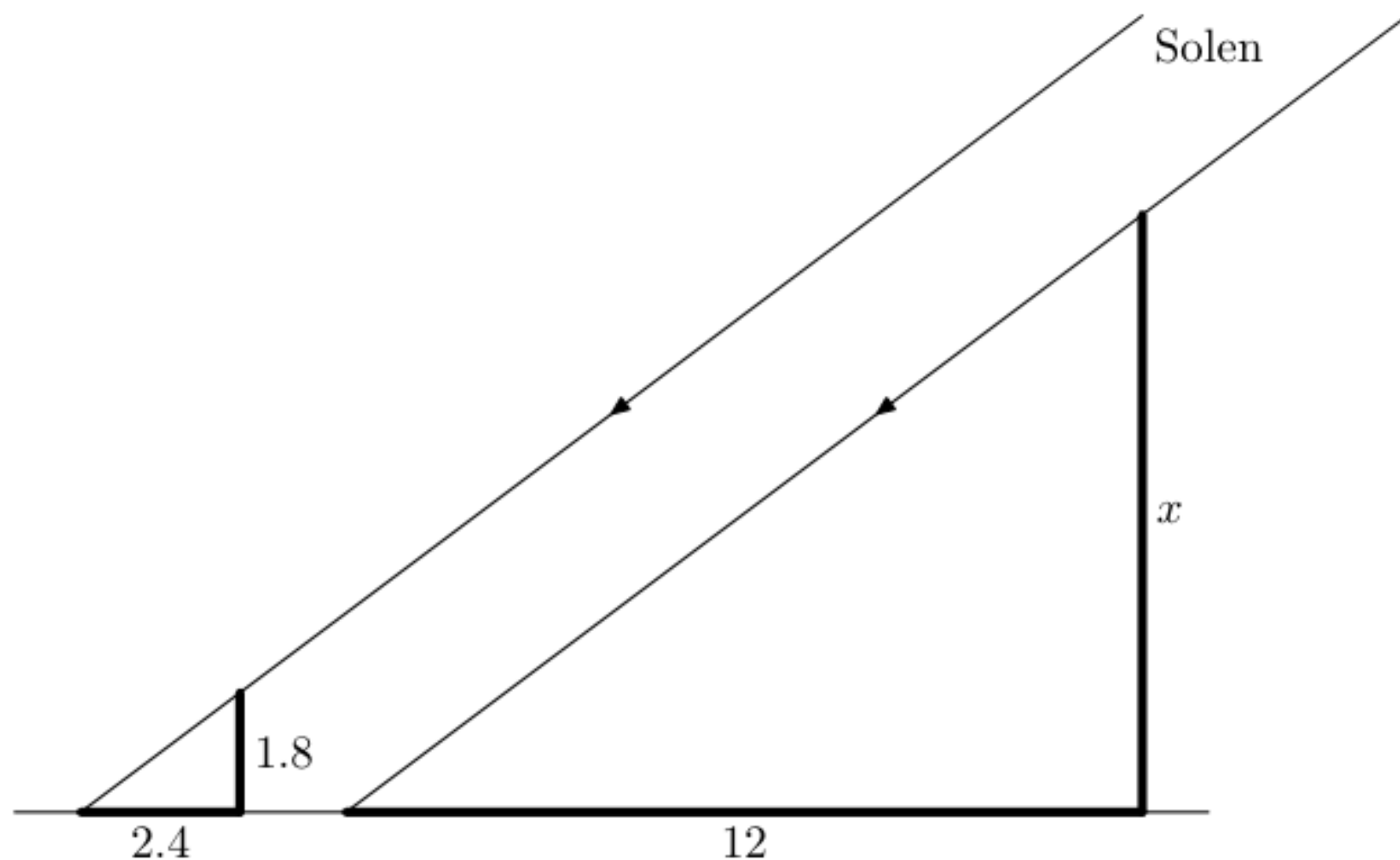


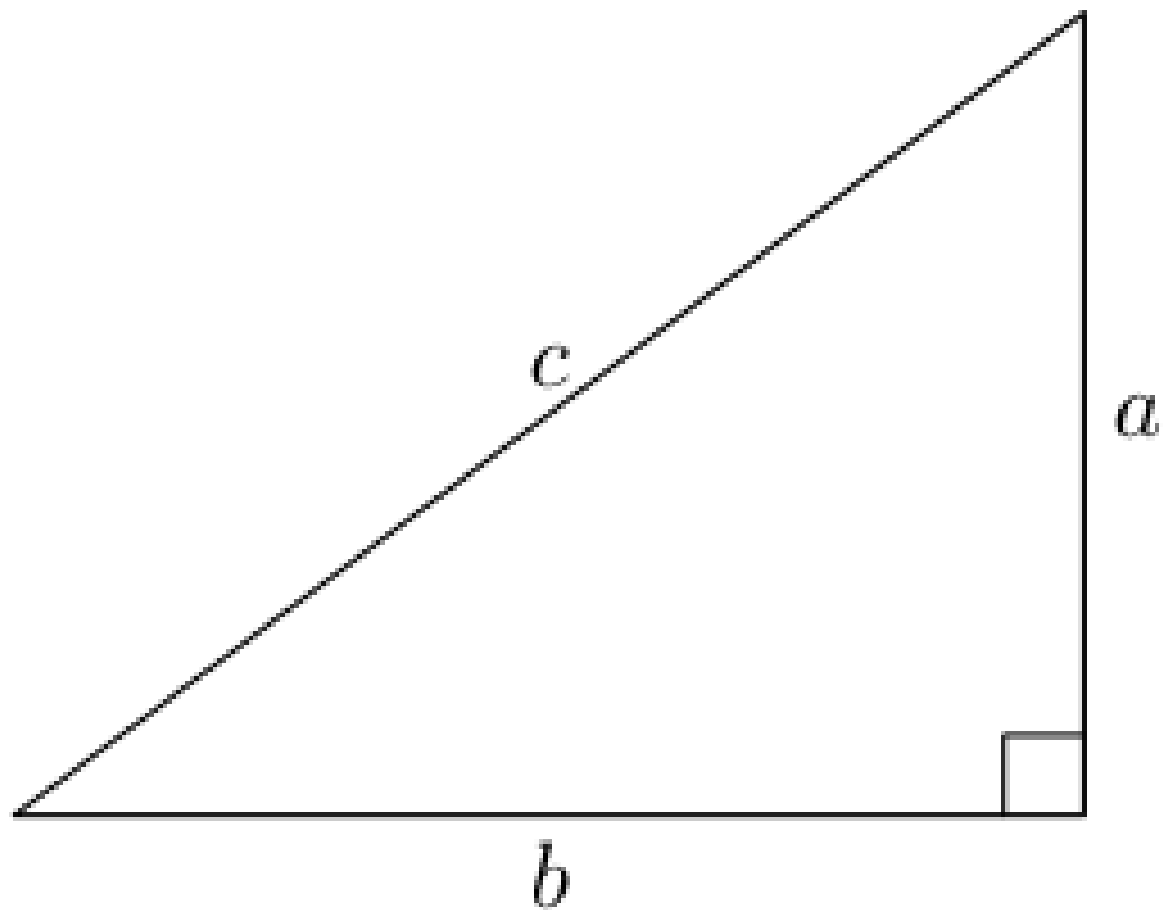


Figur 1.1
(Sida 12)

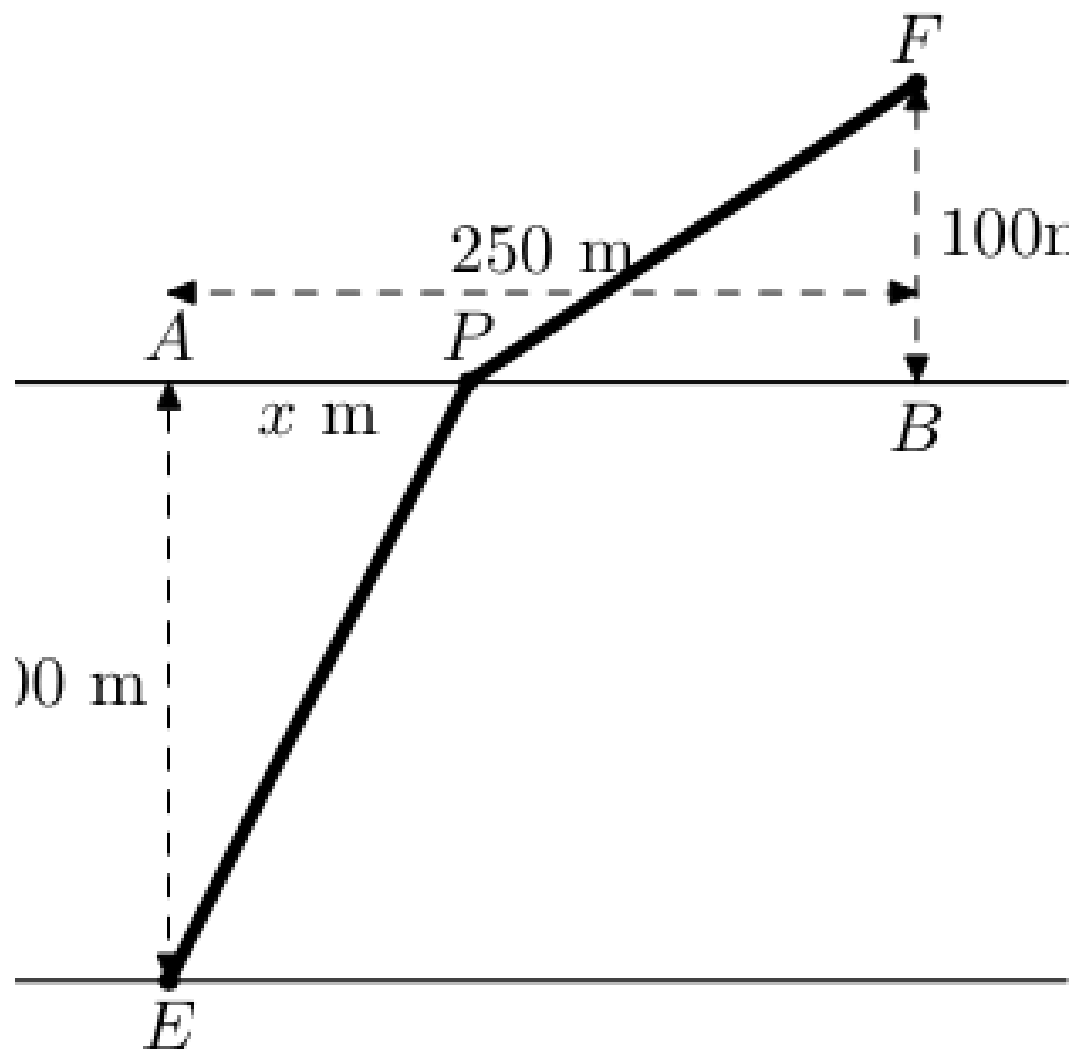
mata nojdén av en naggstang så kan vi gå tillväga på följande sätt: vid



Figur 1.2
(Sida 12)

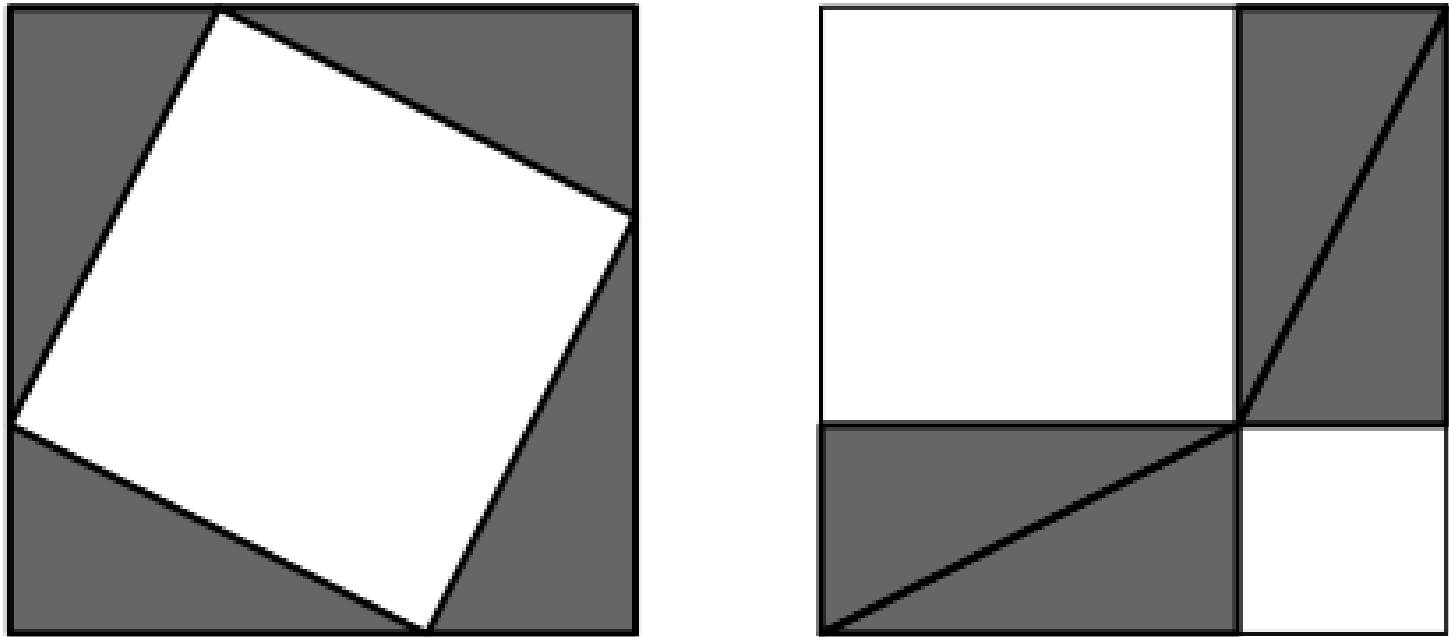


Figur 1.3
(Sida 13)



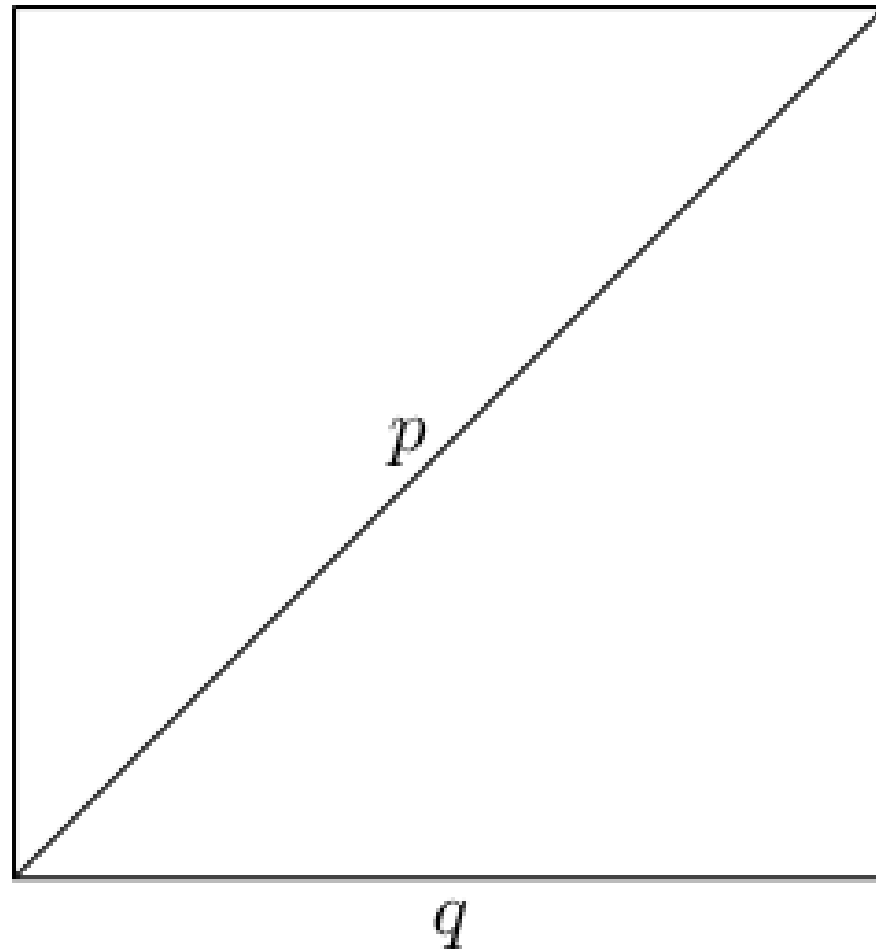
Figur 1.4
(Sida 14)

1.1 Mätning av



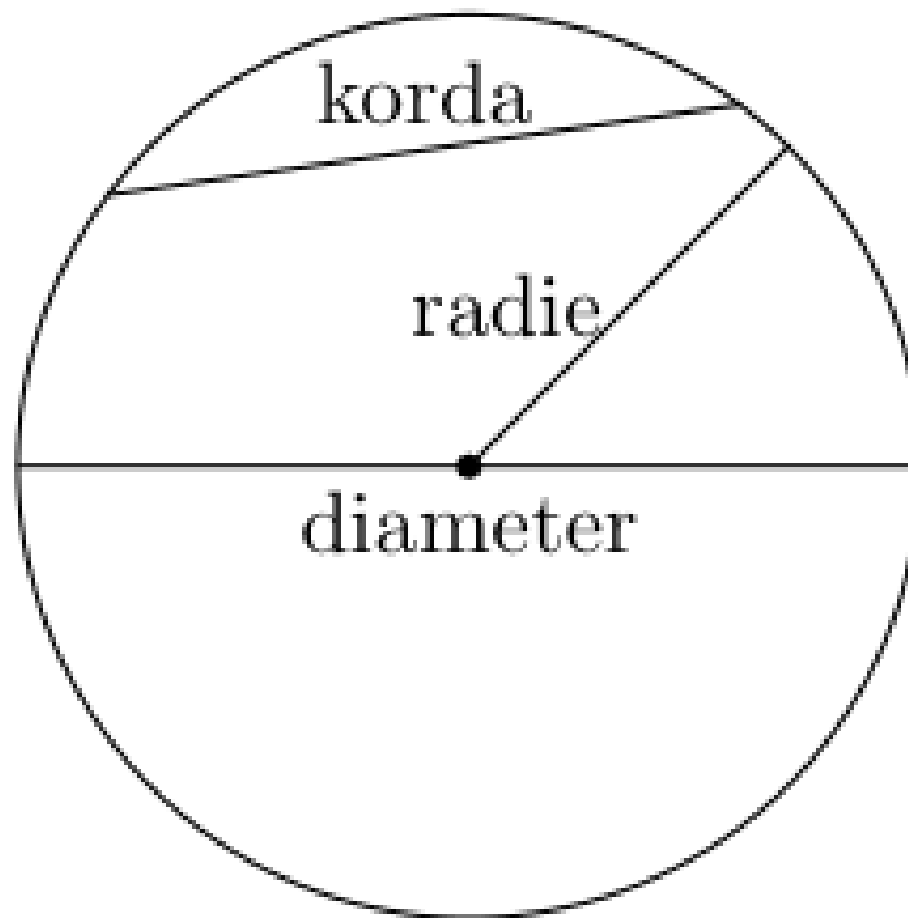
Figur 1.5 I den vänstra figuren har vi lagt fyra kopior av den rätvinkliga triangeln såatt det bildas

ri - formatting

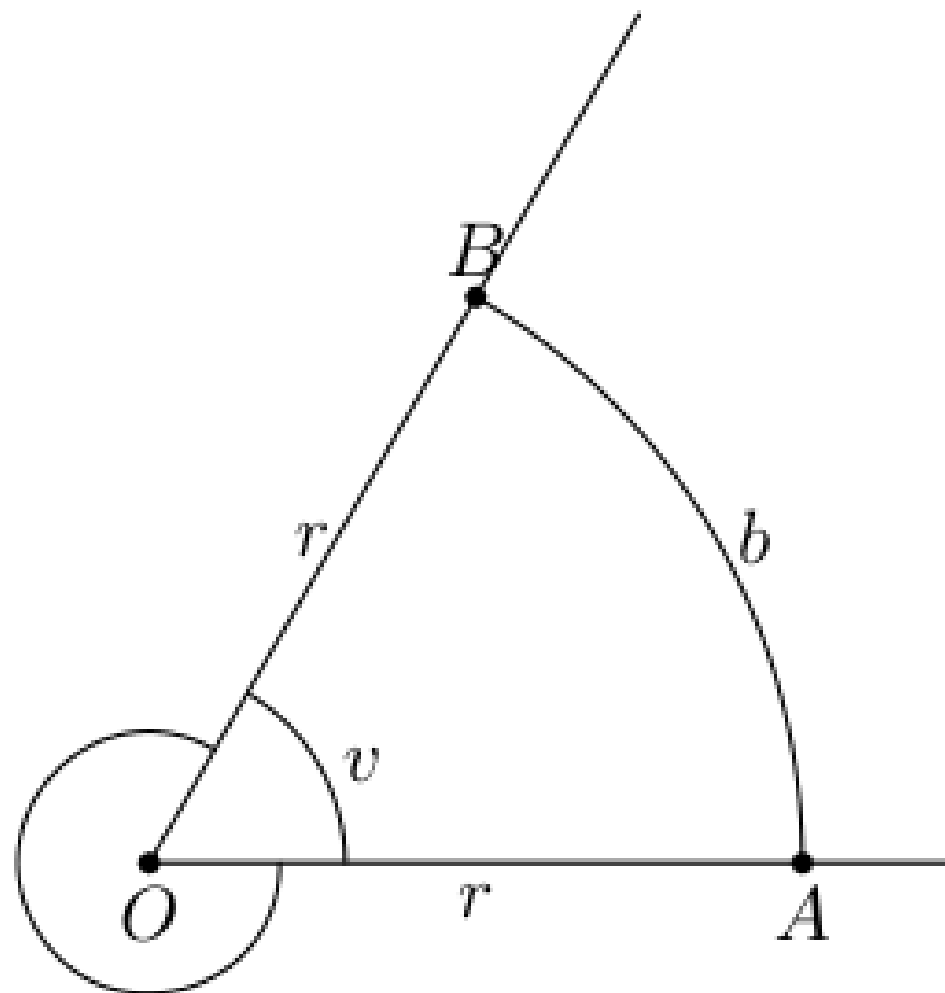


Figur 1.6
(Sida 16)

adien. En cirkel begränsar ett

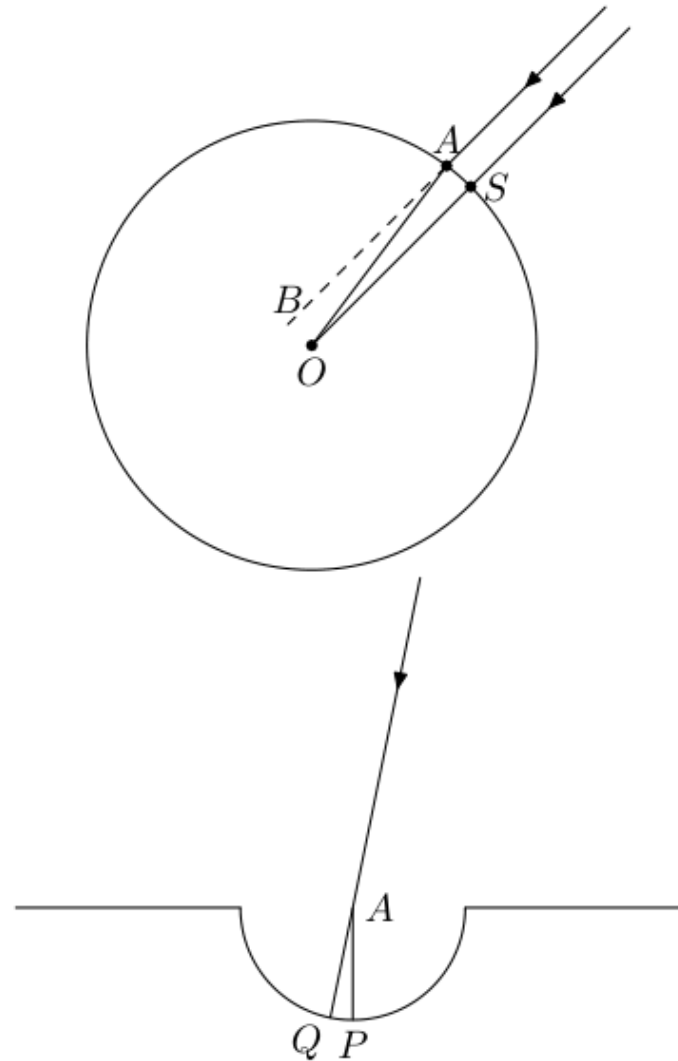


Figur 1.7
(Sida 17)



Figur 1.8
(Sida 18)

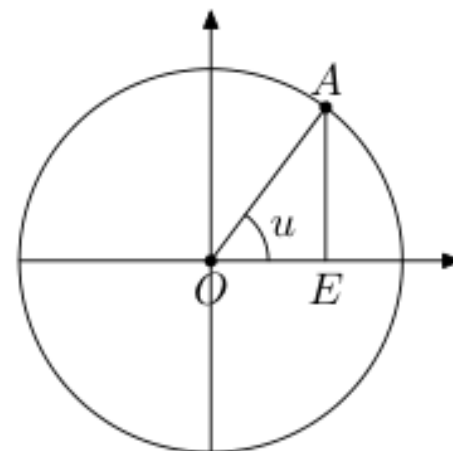
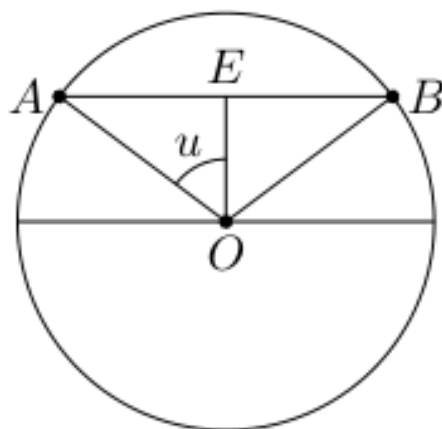
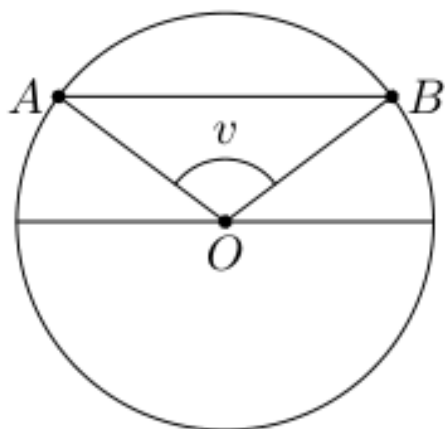
Aswan), som i figur 1.9 detecknas med ,



Figur 1.9 Den övre figuren visar schematiskt hur solstrålarna faller in mot jordklotet vid Alexandria

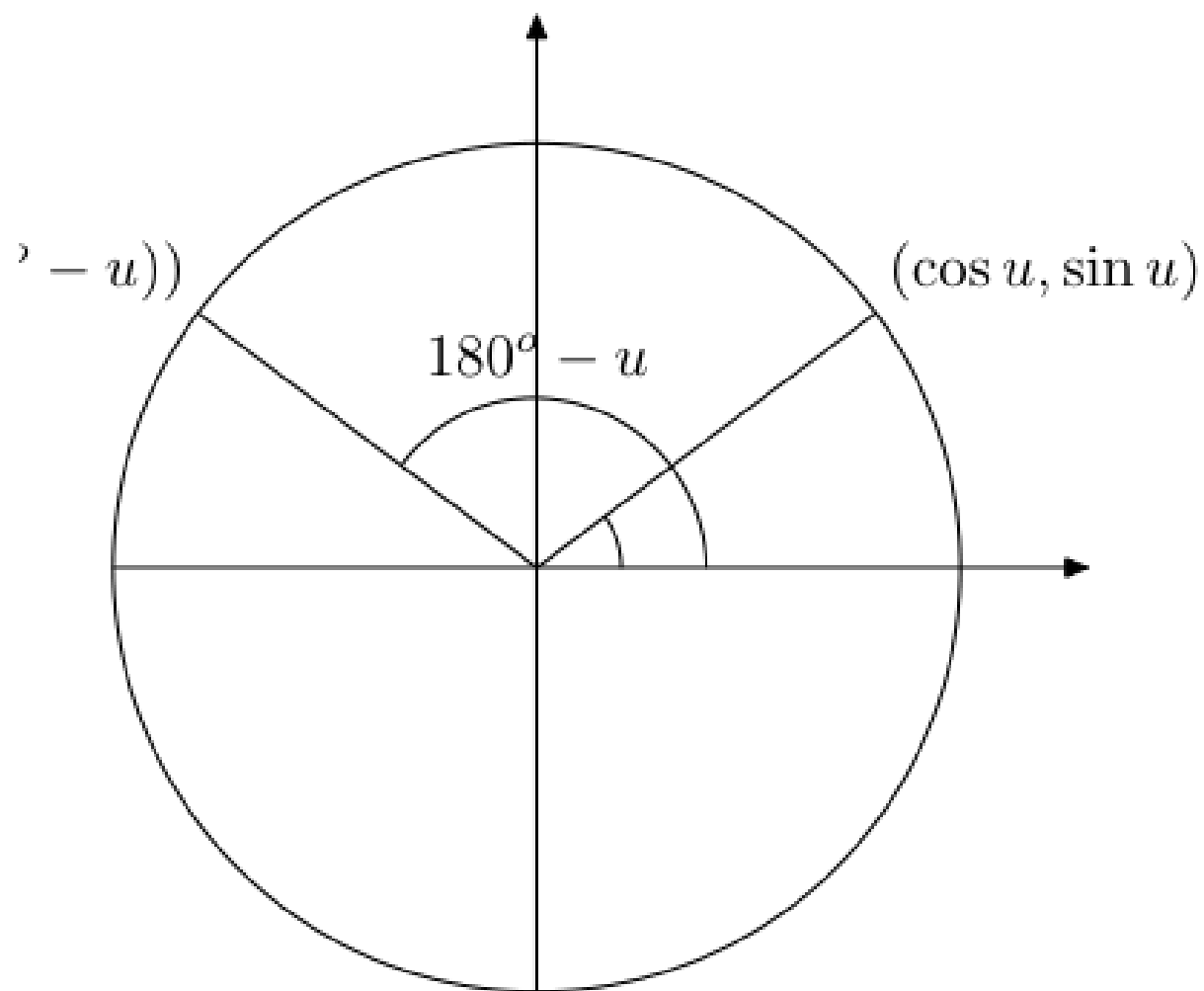
(Sida 19)

figur 1.10. Om vi antar att cirkelns radie är 1 längdenhet så är alltså $\sin u$



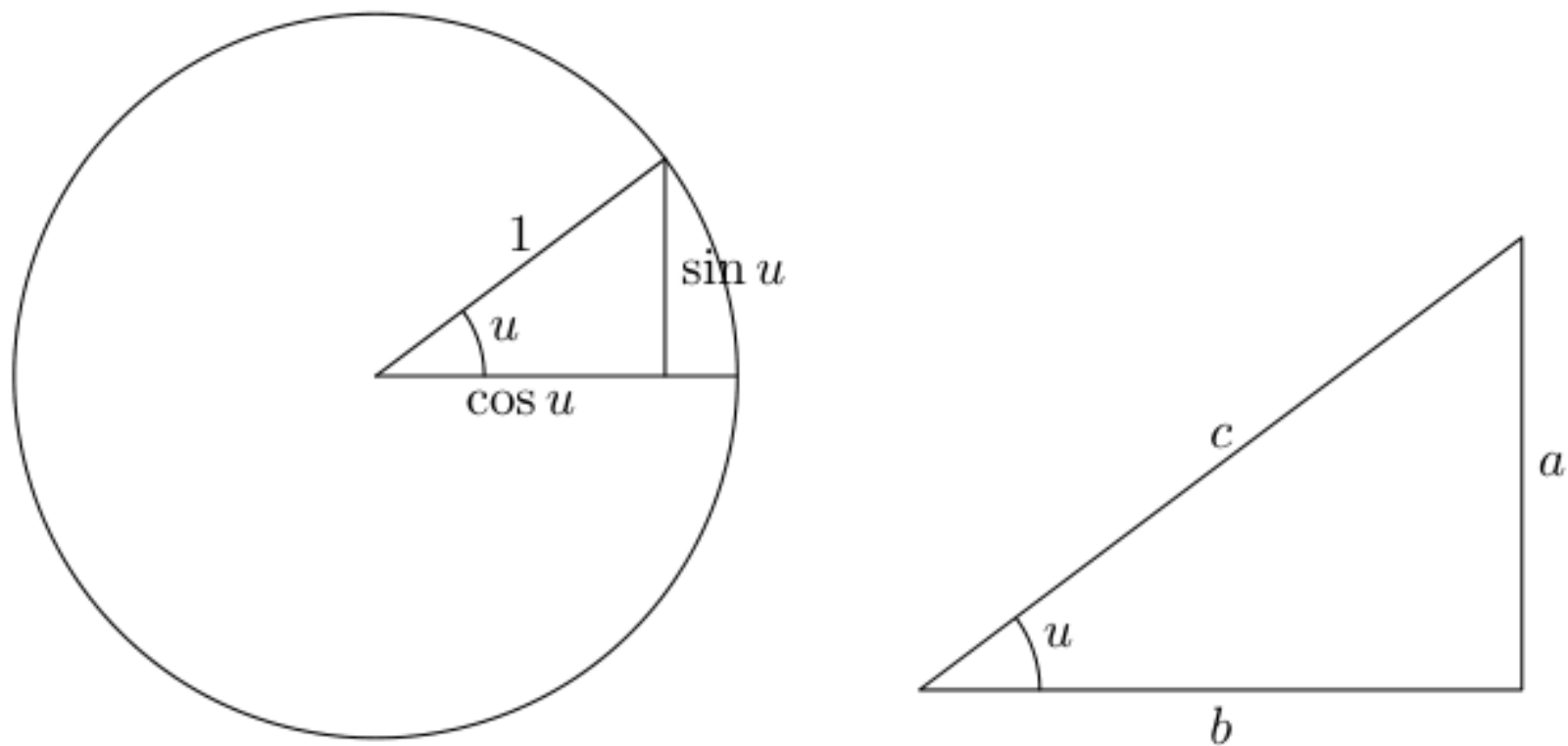
Figur 1.10 Ptolemaios gjorde på 200-talet e.Kr. en tabell som visade hur förhållan-det mellan en kor

. vinkel i den rätvinkliga triangeln i figur 1.12

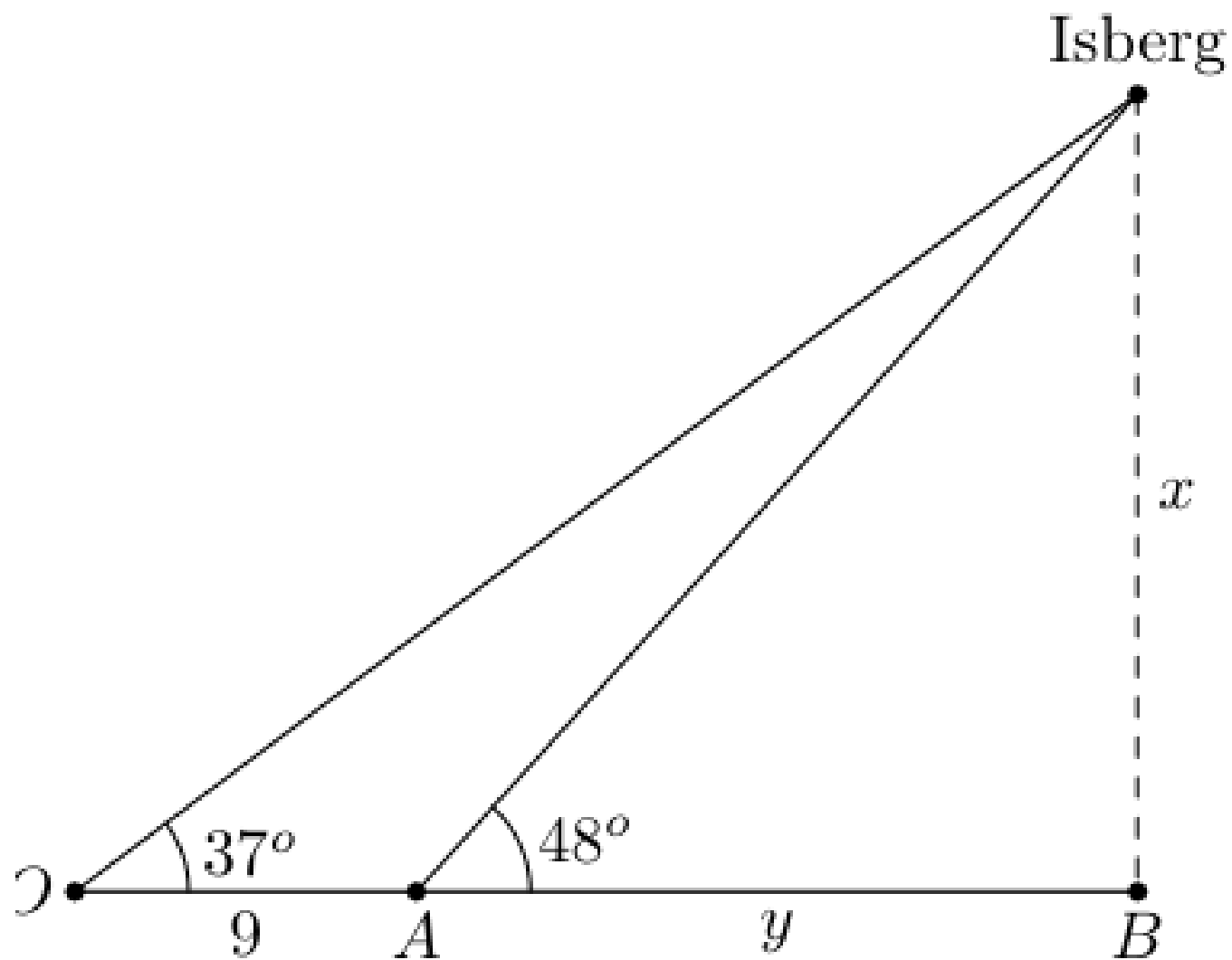


Figur 1.11
(Sida 21)

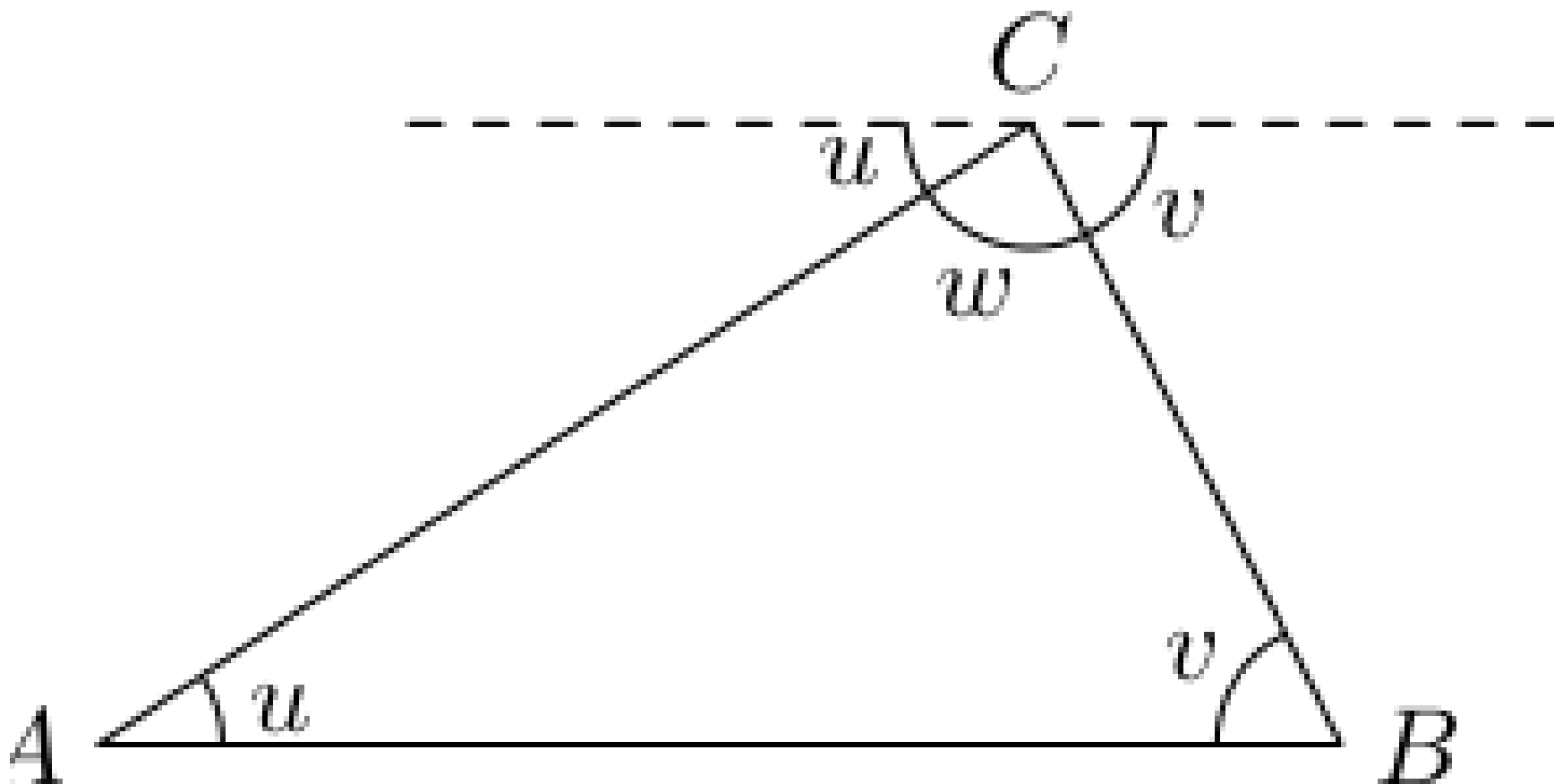
Kapitel 1 Geometrie – Jorunnathning



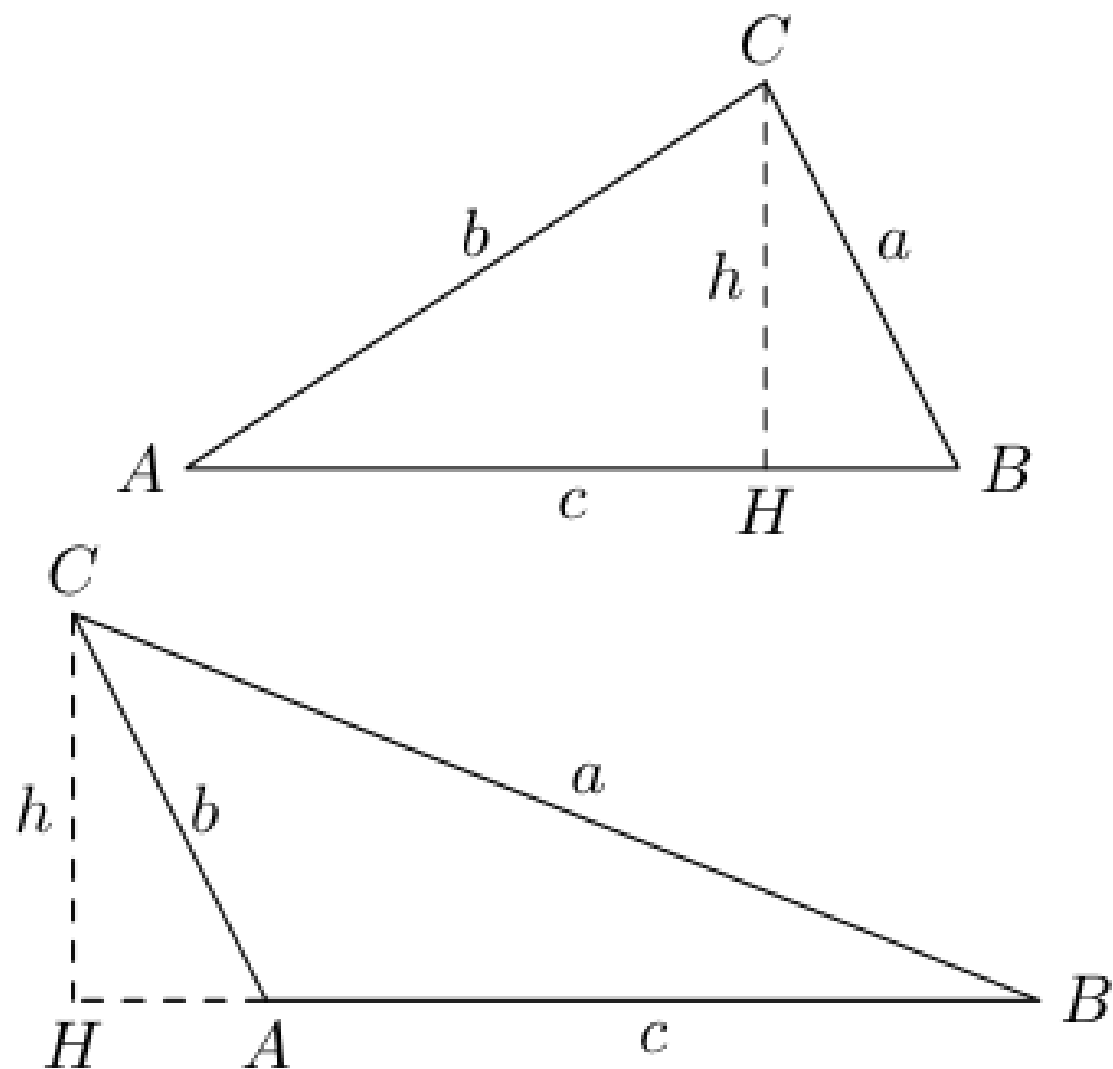
Figur 1.12
(Sida 22)



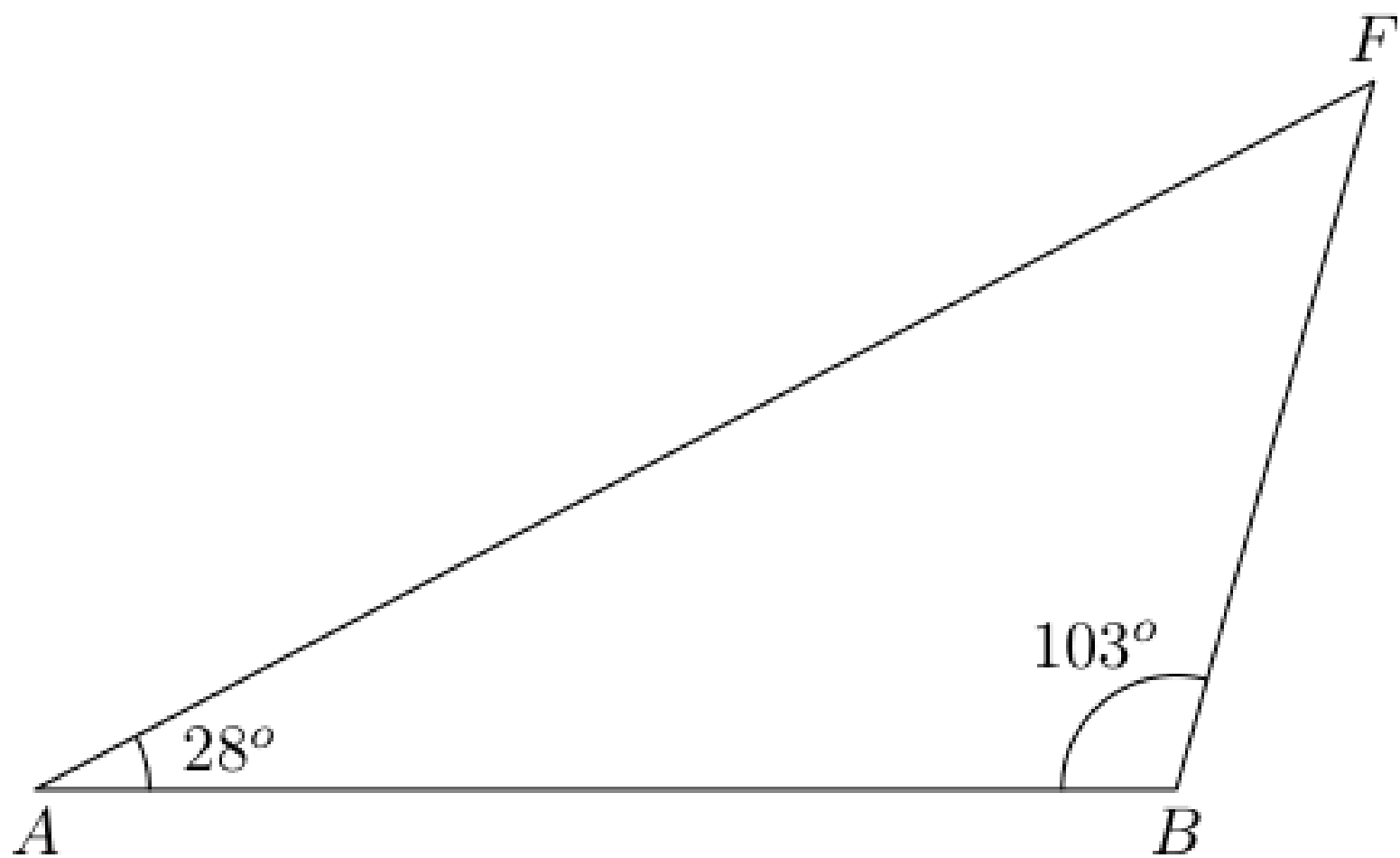
Figur 1.13
(Sida 22)



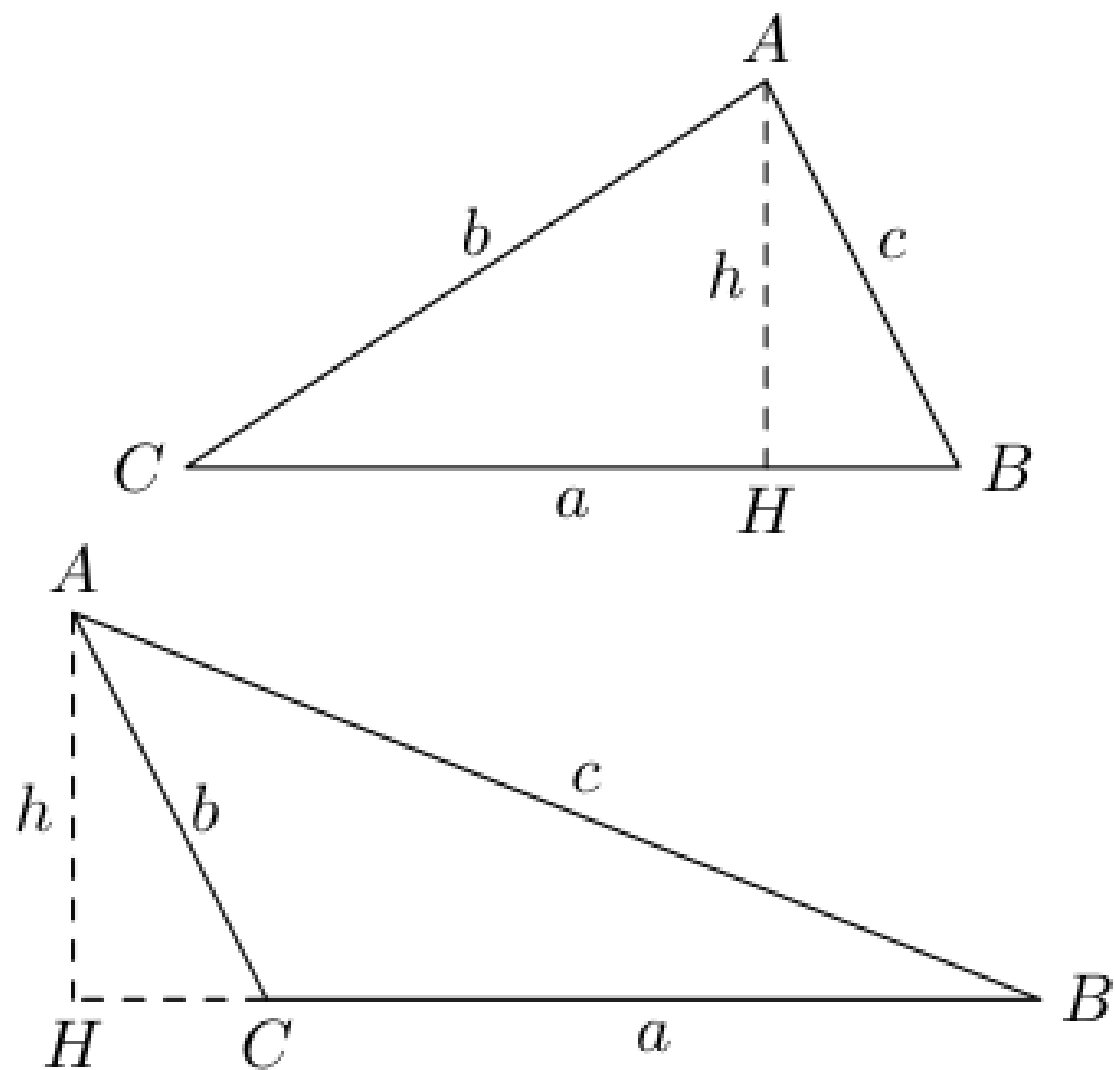
Figur 1.14 Vi drar en linje genom punkten C som är parallell med sidan AB . Då är de tre vinklarna vid
(Sida 23)



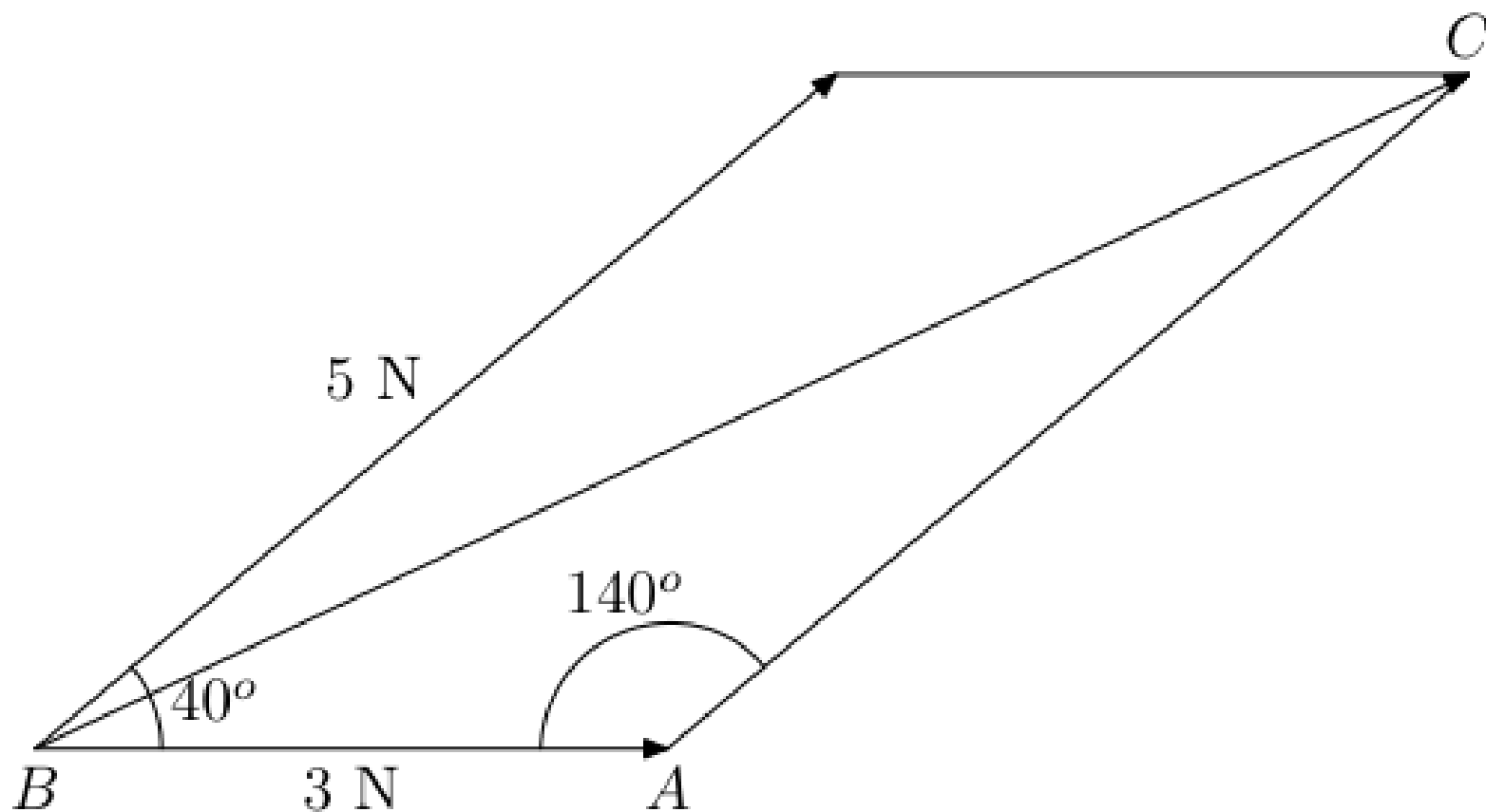
Figur 1.15
(Sida 24)



Figur 1.16
(Sida 25)

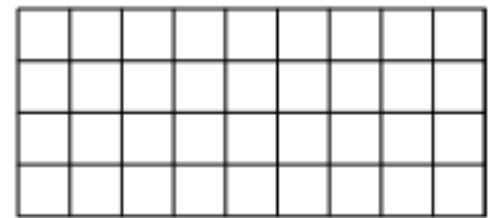
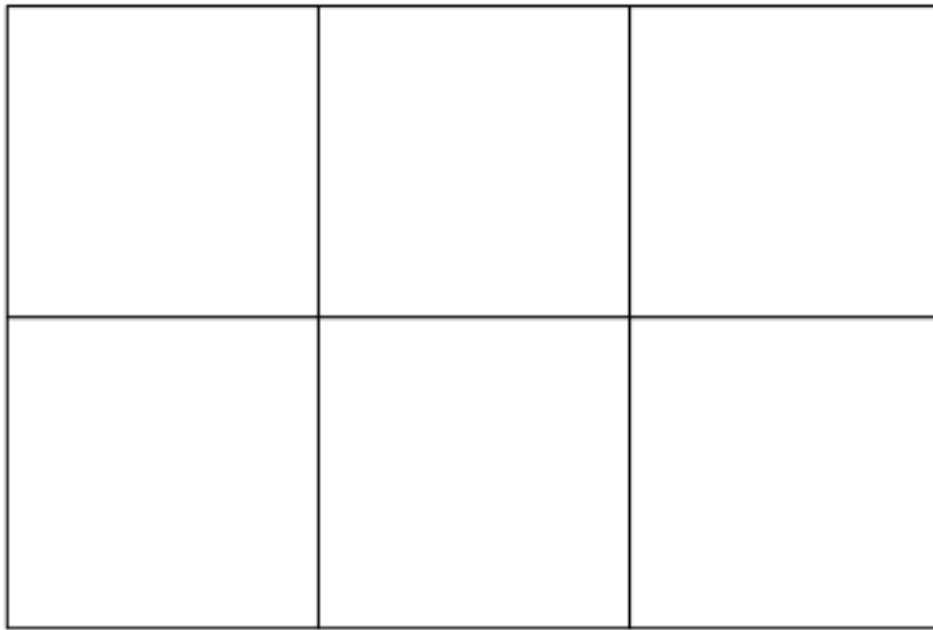


Figur 1.17
(Sida 26)

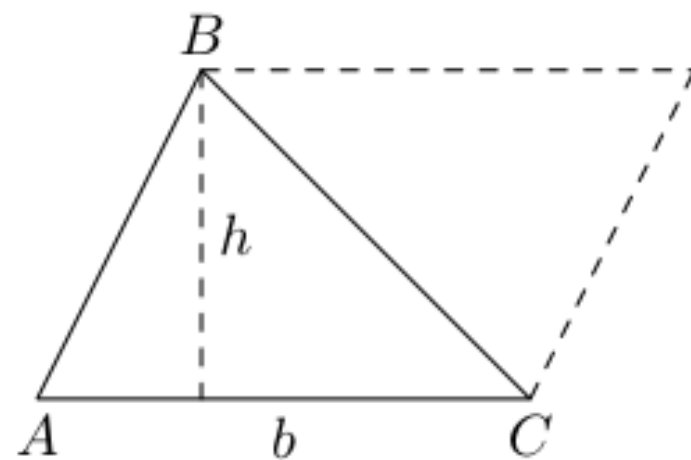
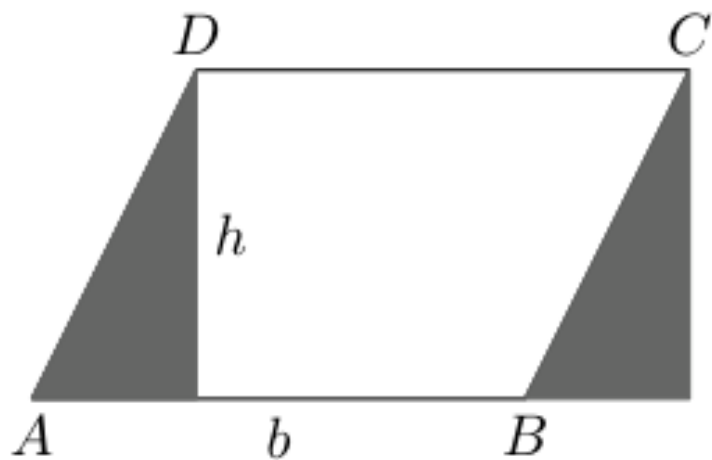


Figur 1.18
(Sida 26)

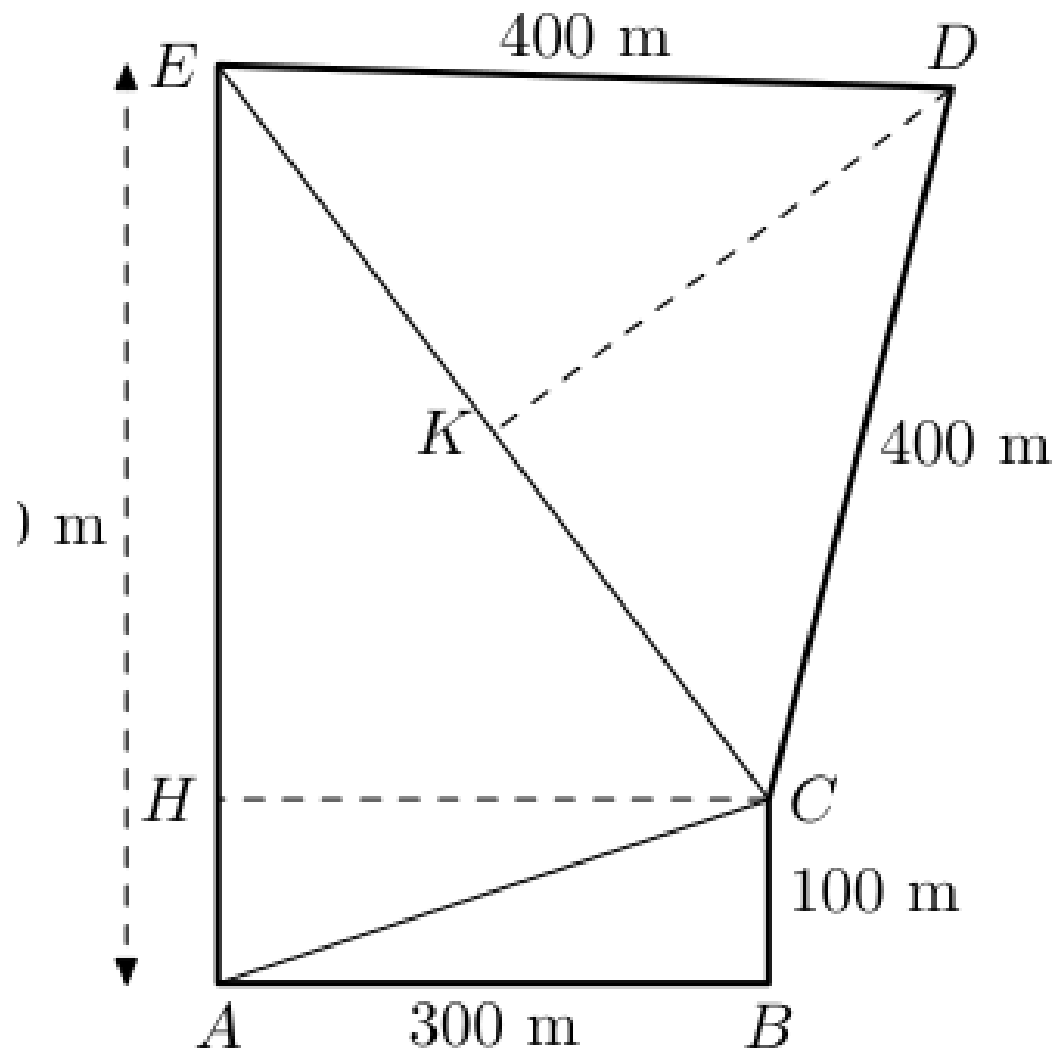
1.5 Mätning av areor



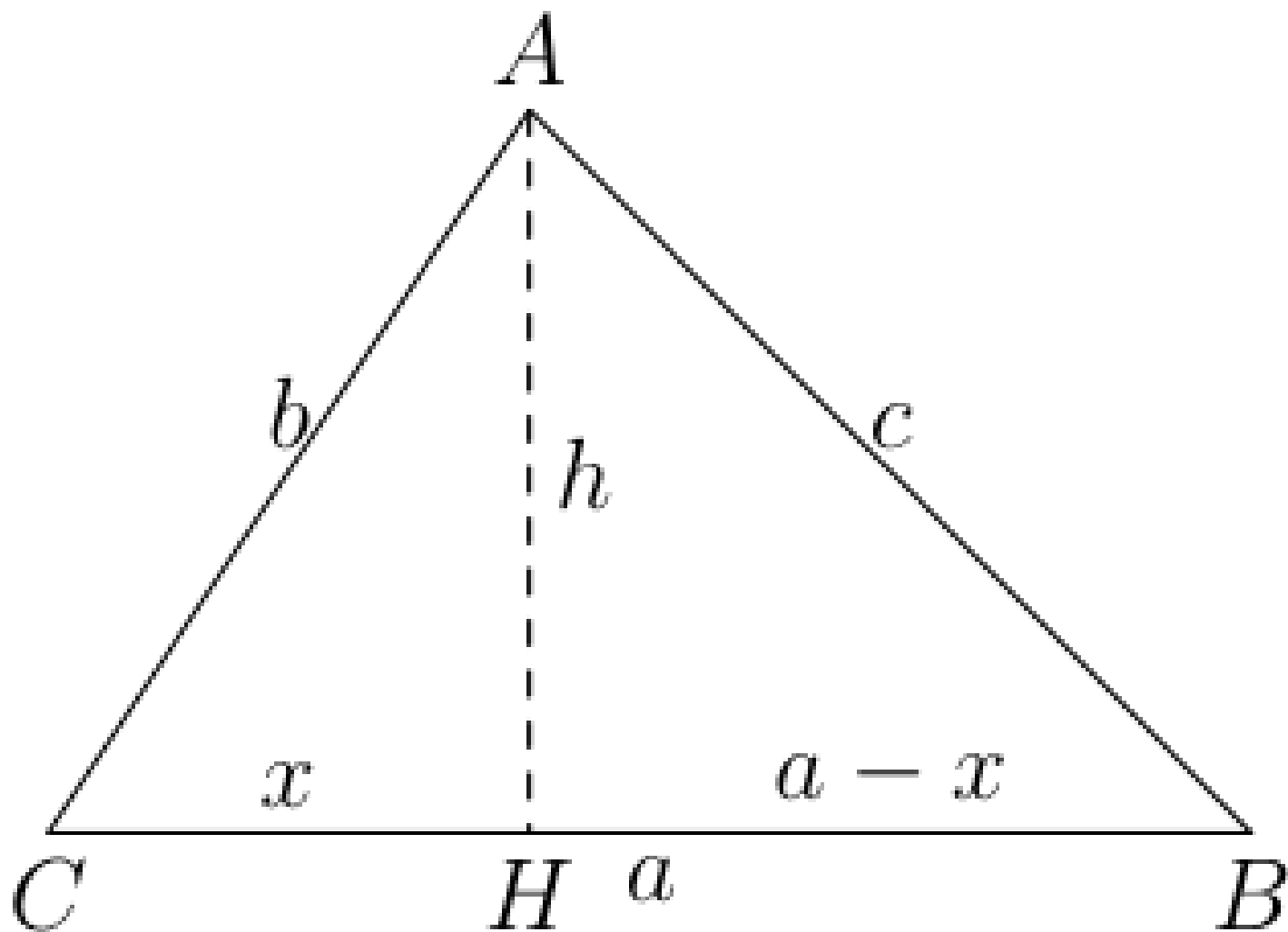
Figur 1.19 Rektangeln i den högra figuren har sidorna 2 och 3 längdenheter. Varjedelruta är en areaen
(Sida 29)



Figur 1.20I den vänstra figuren är $ABCD$ den givna parallelogrammen. Om viflyttar den vänstra skuggade
(Sida 30)

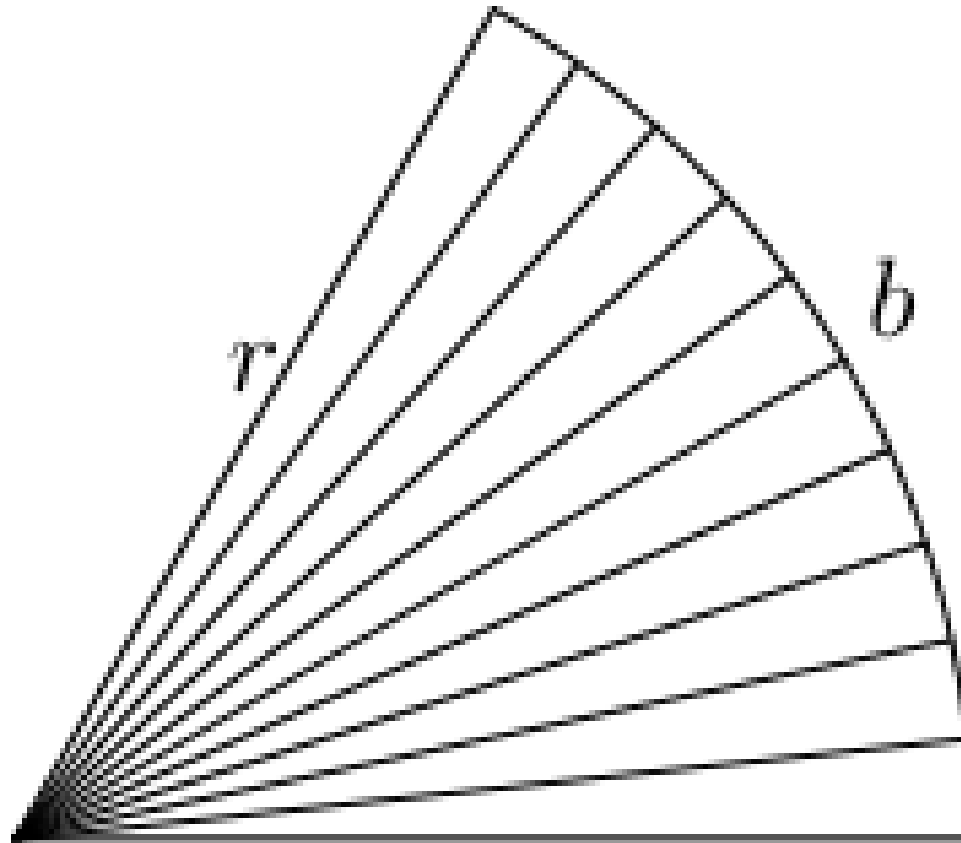


Figur 1.21
(Sida 30)



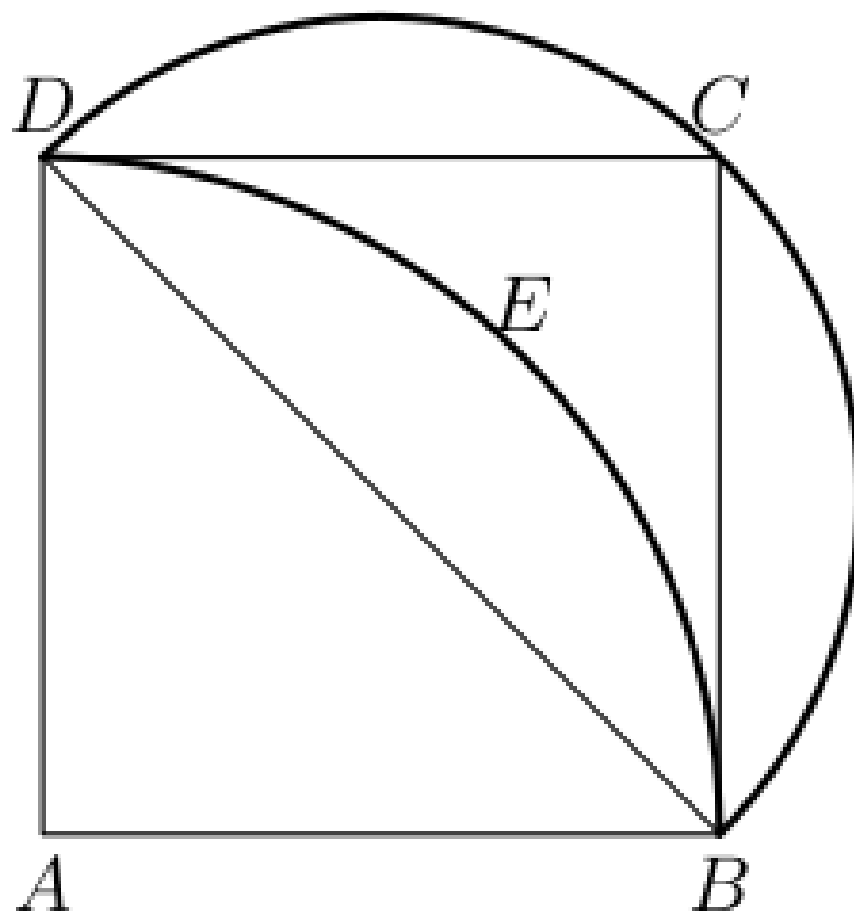
Figur 1.22
(Sida 31)

ens radie är r och att bågen



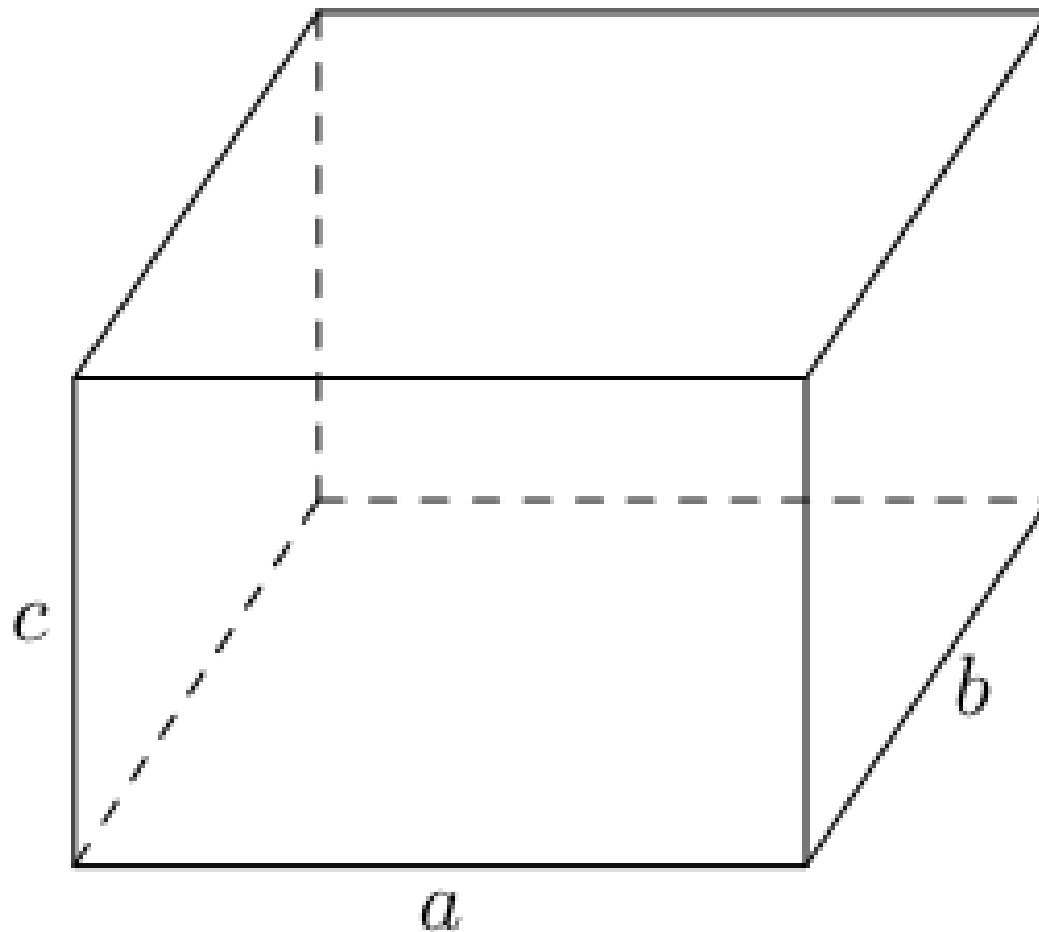
Figur 1.23
(Sida 33)

ia BCD och BED . Se figur 1.:



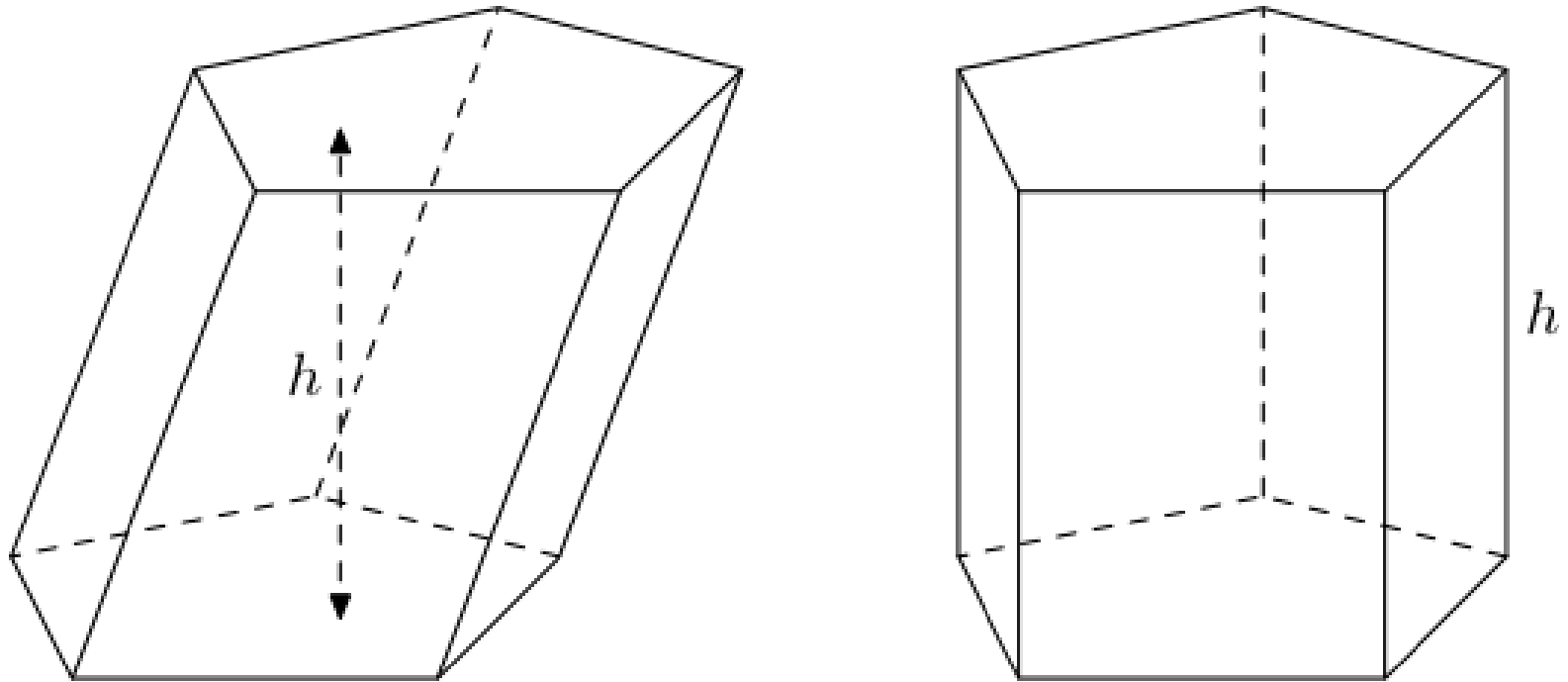
Figur 1.24
(Sida 34)

1 - formeln

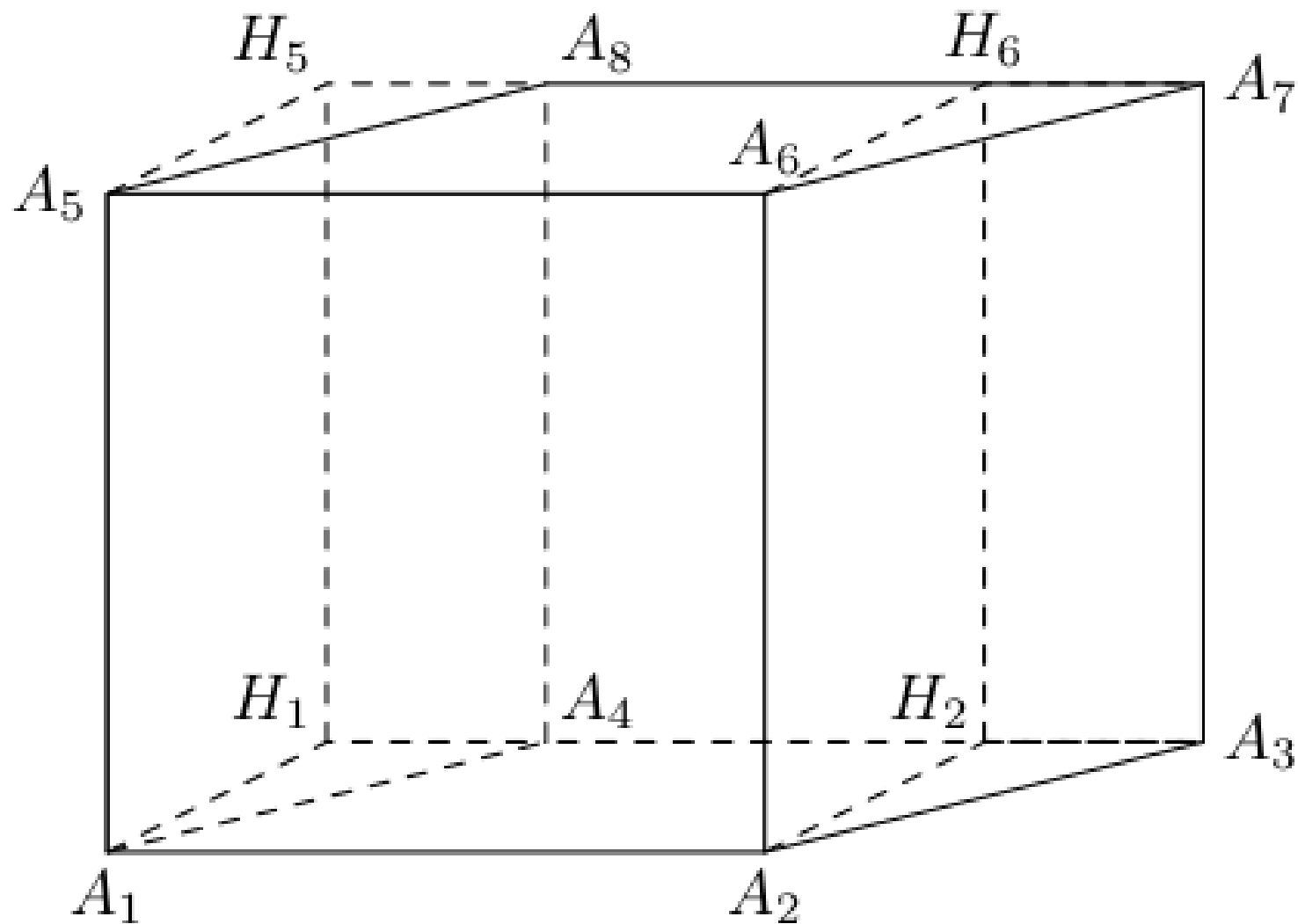


Figur 1.25 Ett rätblock där kanterna är a , b och c längdenheter och volymen abc volymsenheter. I varje

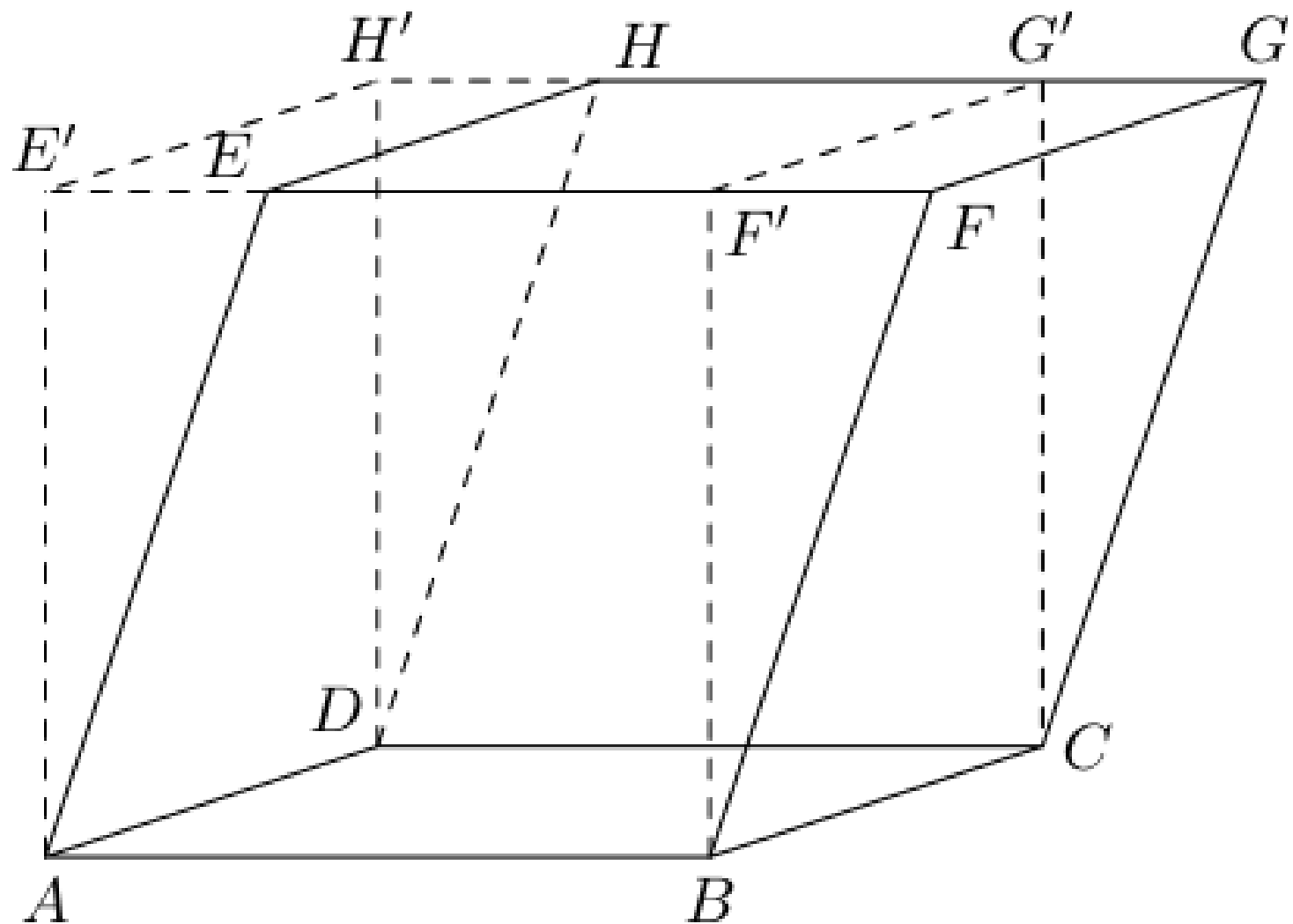
smor, pyramider, koner och klot.



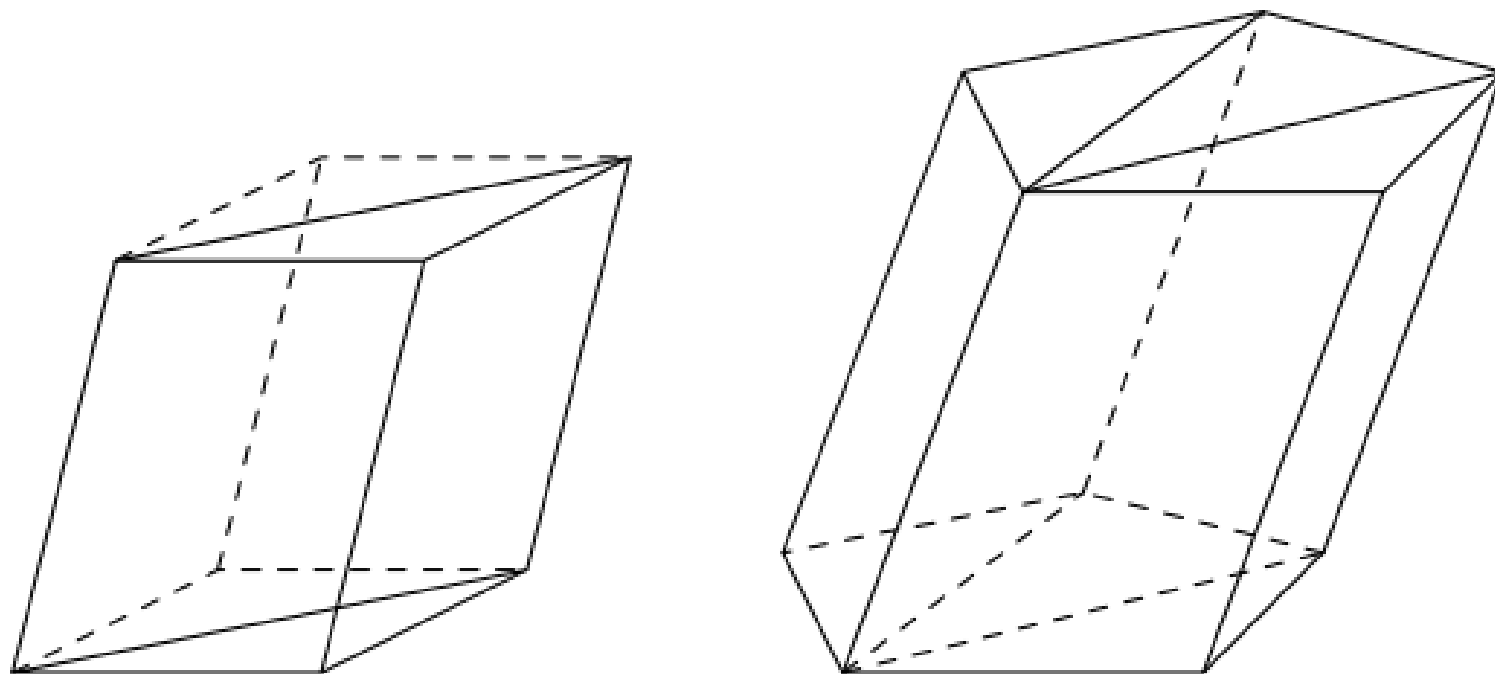
Figur 1.26 De båda prismorna i figuren är femsidiga. Det vänstra är snett och dethögra rakt. Båda har



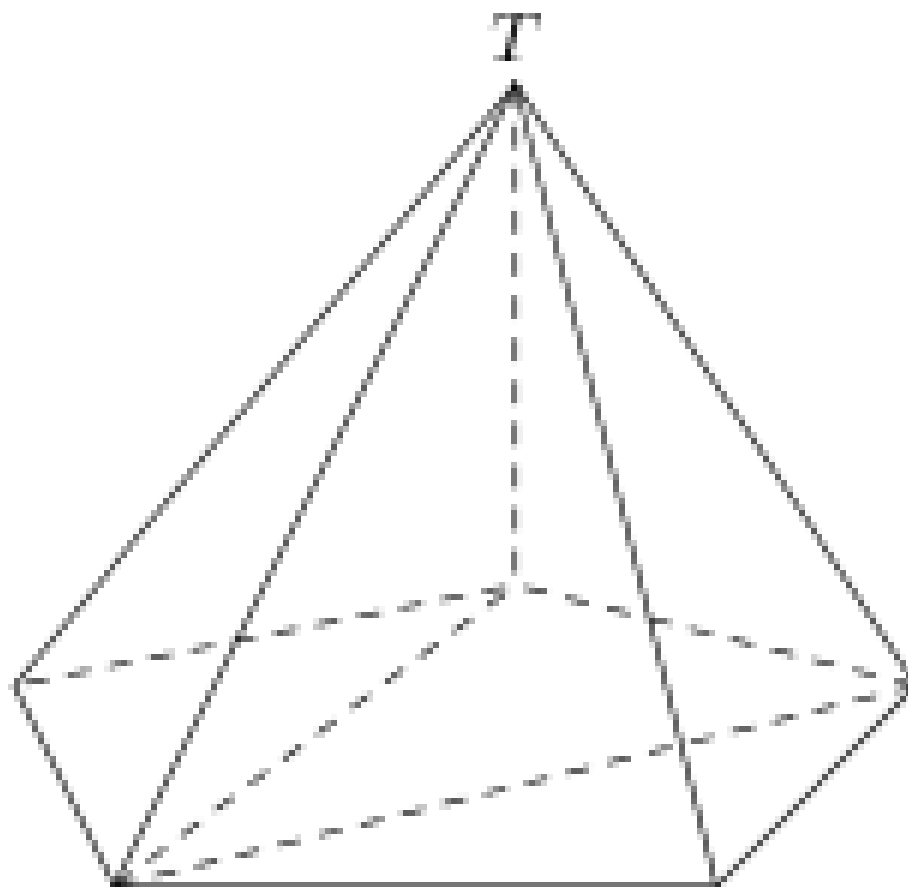
Figur 1.27 Prismat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ är rakt och basytan $A_1A_2A_3A_4$ är en parallelogram. Vi drar höjden
(Sida 37)



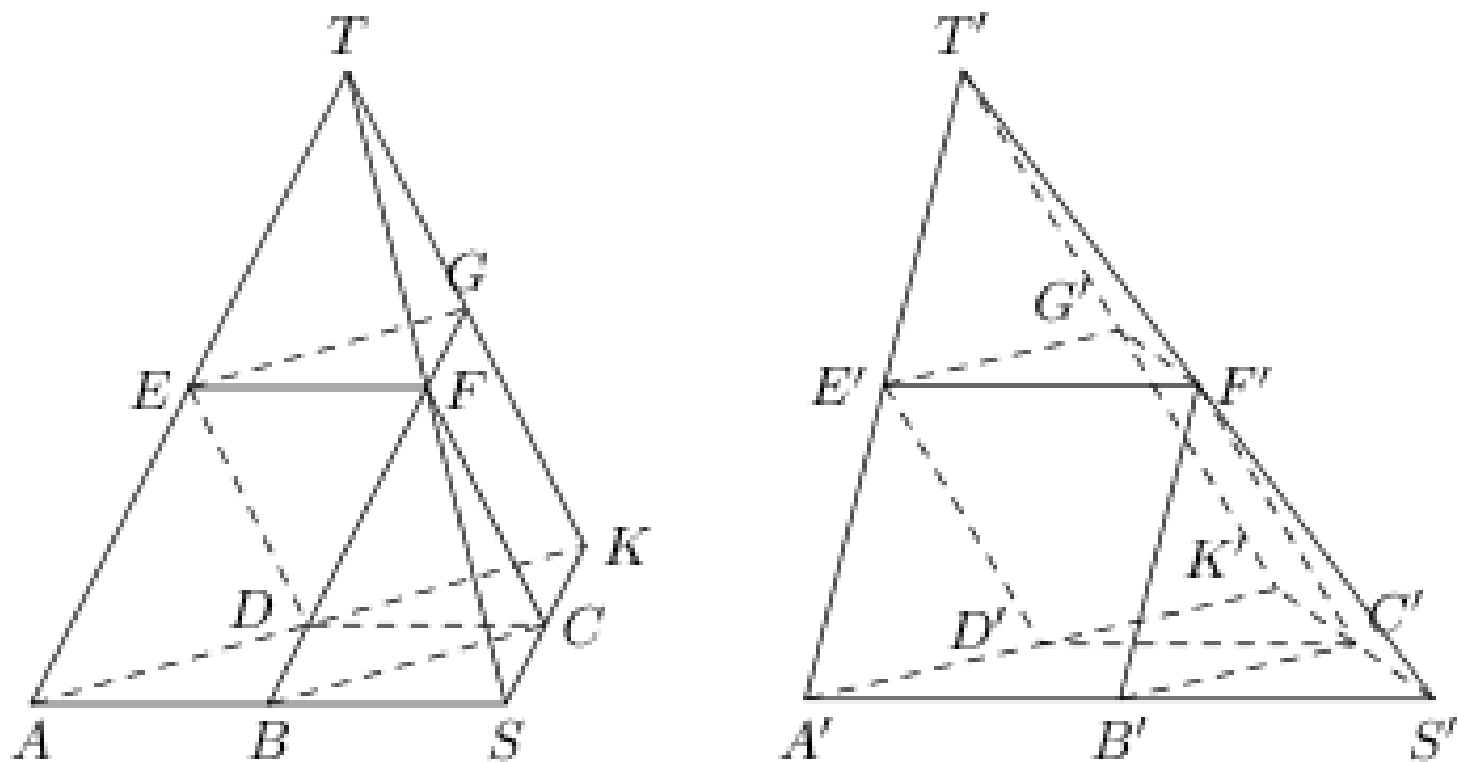
Figur 1.28 I prismet ABCDEFGH är basytan ABCD en parallelogram. Ett rakprisma med samma basyta och



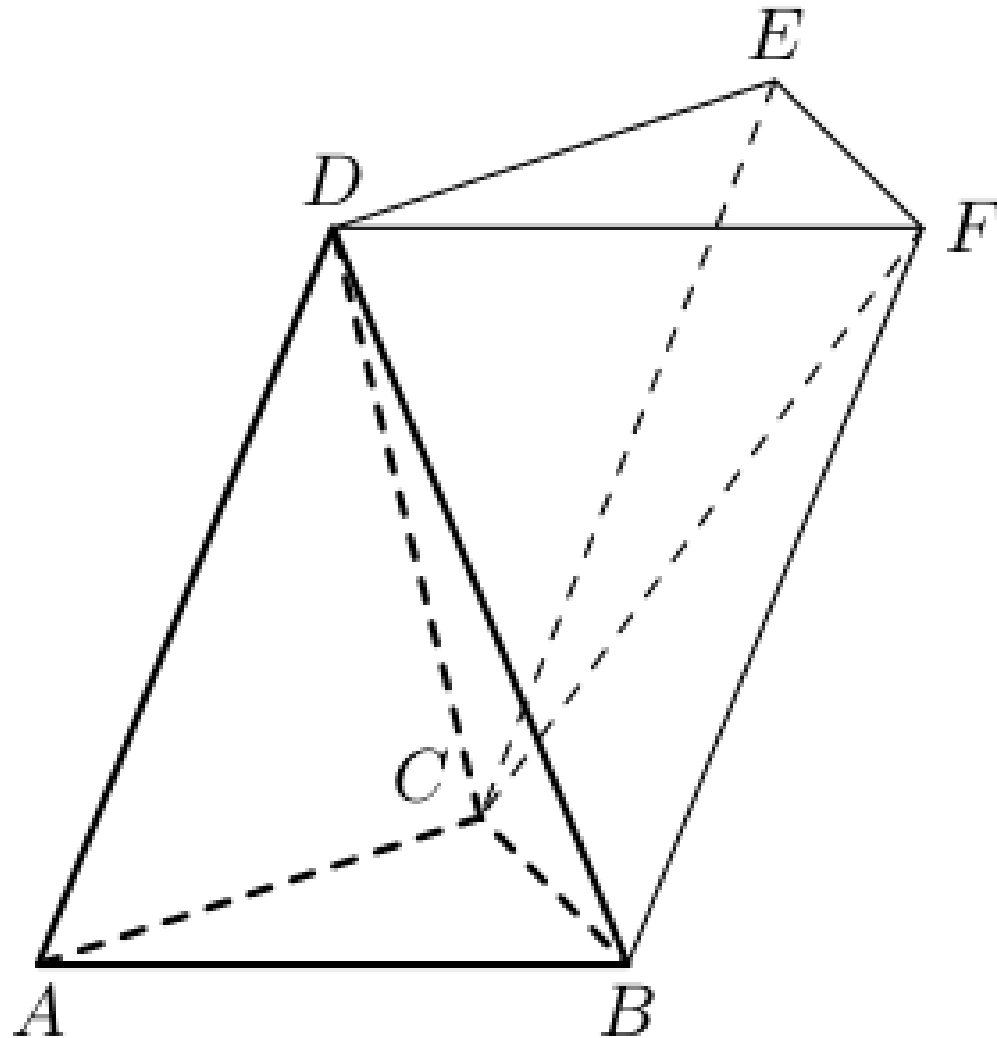
Figur 1.29I den högra figuren är det heldragna triangulära prismet givet. Vikonstruerar ett dubbelt s



Figur 1.30 I figuren ser vi en pyramid en en femhörning som basyta. Vi har också visat hur man kan del
(Sida 39)

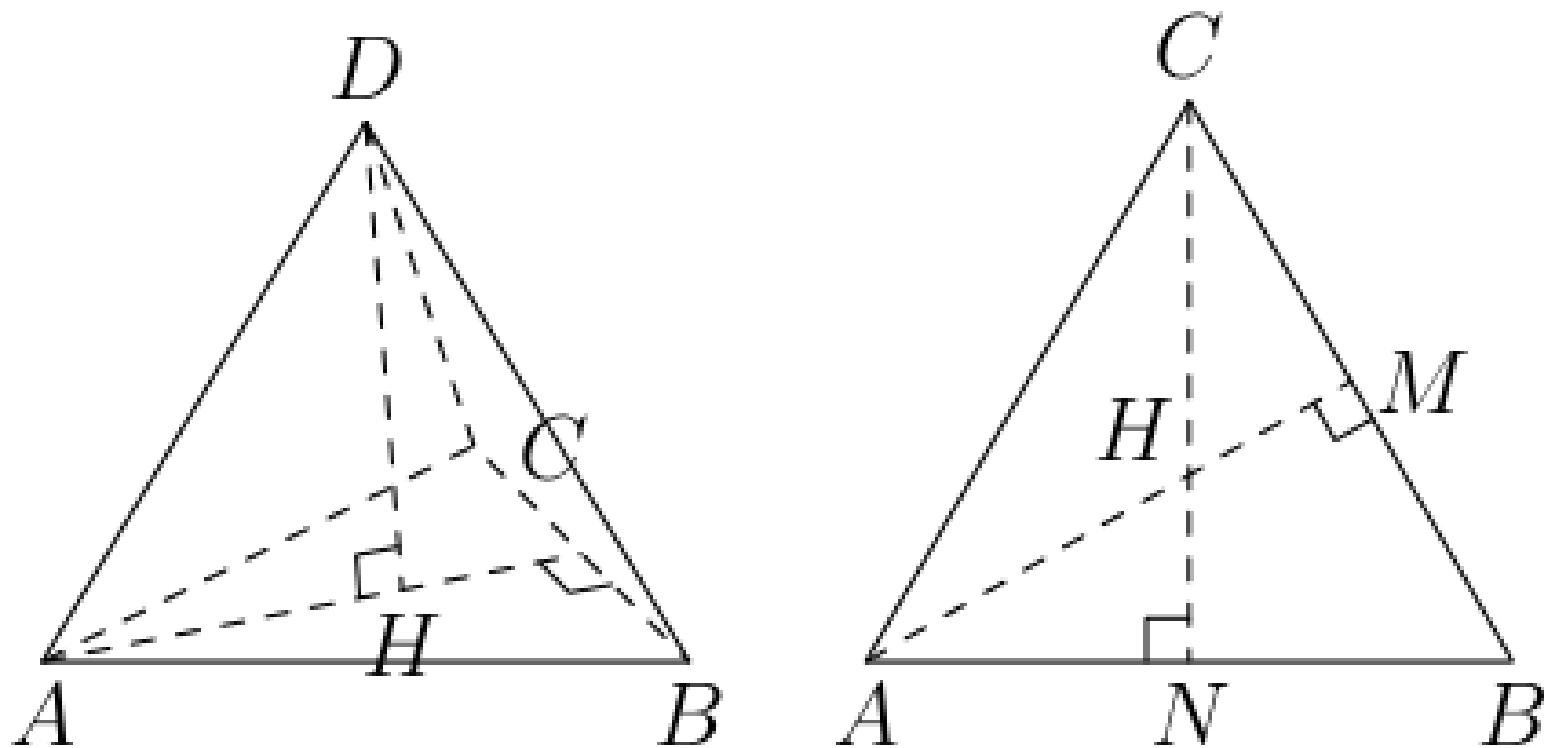


Figur 1.31 De två pyramiderna i figuren har lika stora höjder och basytorna har lika stora areor. Antag
(Sida 39)



Figur 1.32 Den ursprungliga tetraedern är ABCD. Vi konstruerar ett triangulärtpisma med basytan ABC

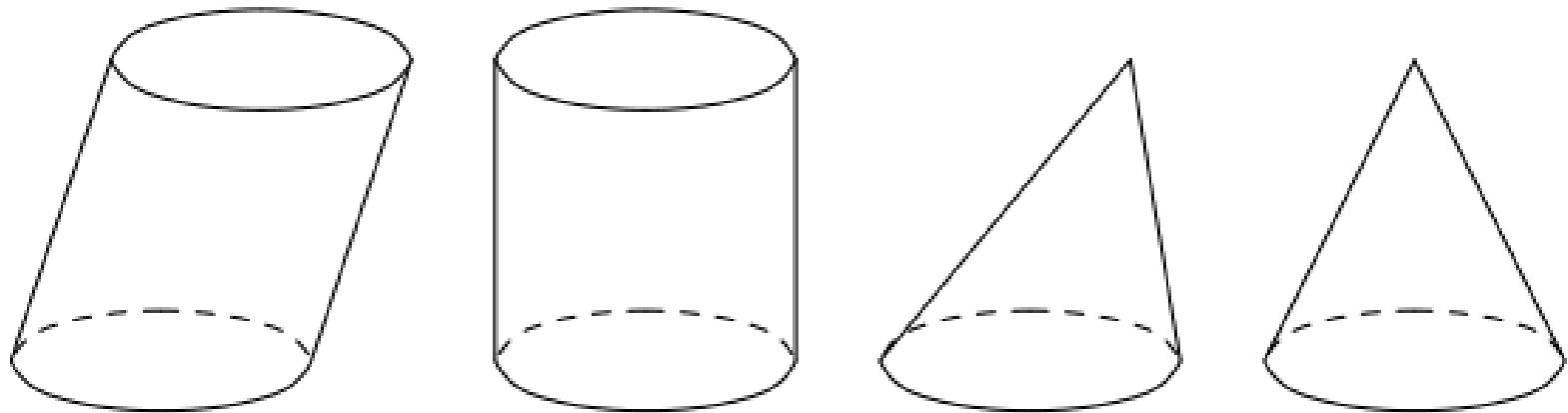
(Sida 40)



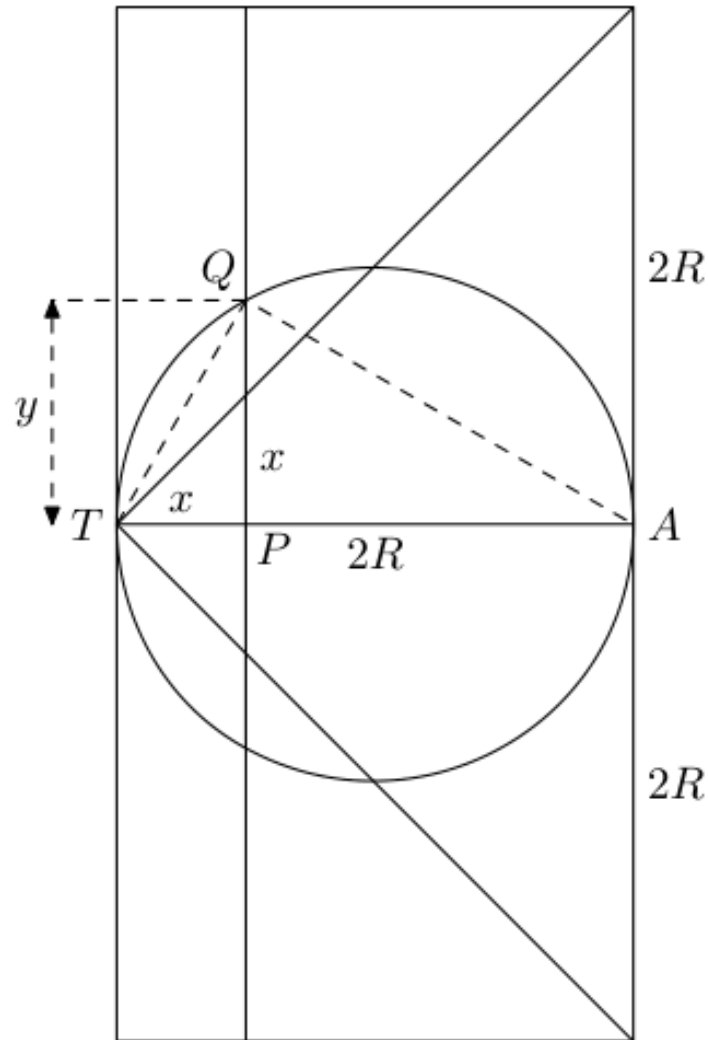
Figur 1.33 Den vänstra delen av figuren visar tetraedern. I den högra har vi ritat upp basytan, som är

(Sida 41)

inkelrat mot basytan. Denna linje kallas för *konens axel*.

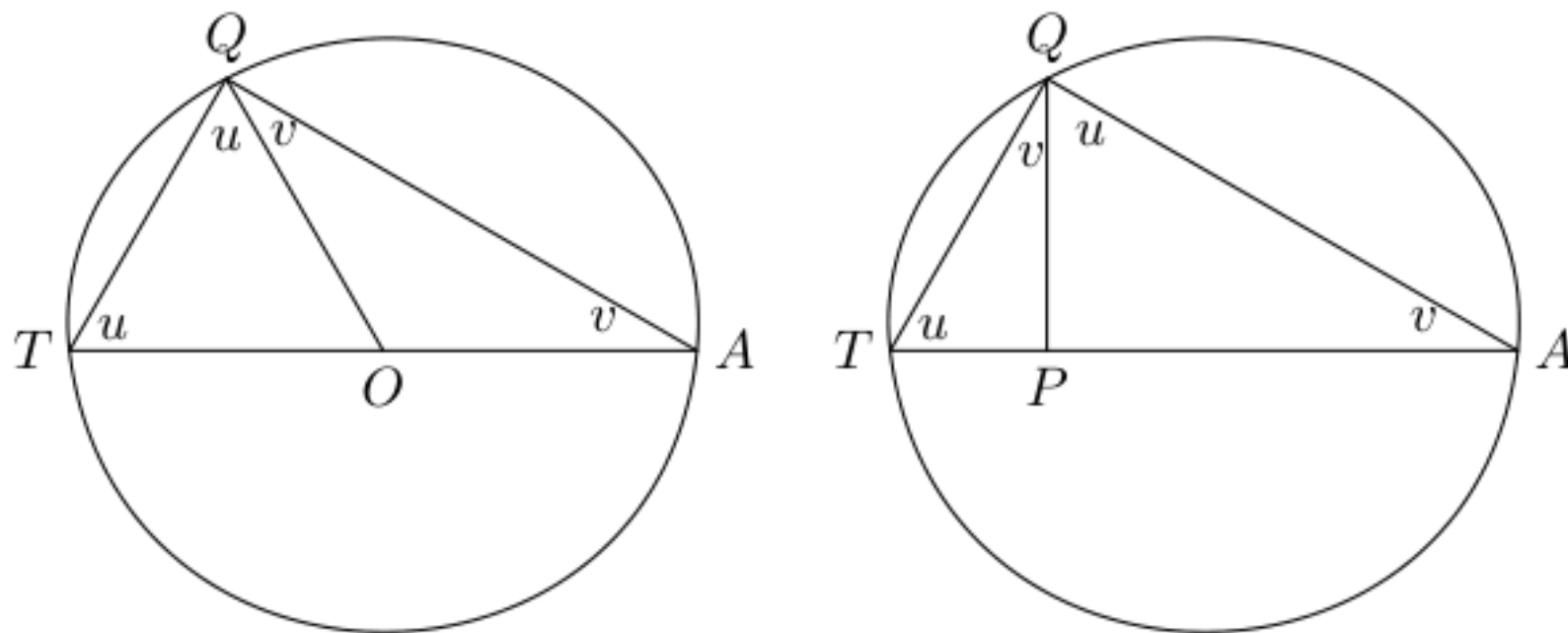


Figur 1.34 Figuren visar från vänster en sned cirkulär cylinder, en rak cirkulärcylinder, en sned cir
(Sida 42)



Figur 1.35 Om figuren roteras kring axeln TA får vi ytterst en cylinder, därefteren kon och ett klot.

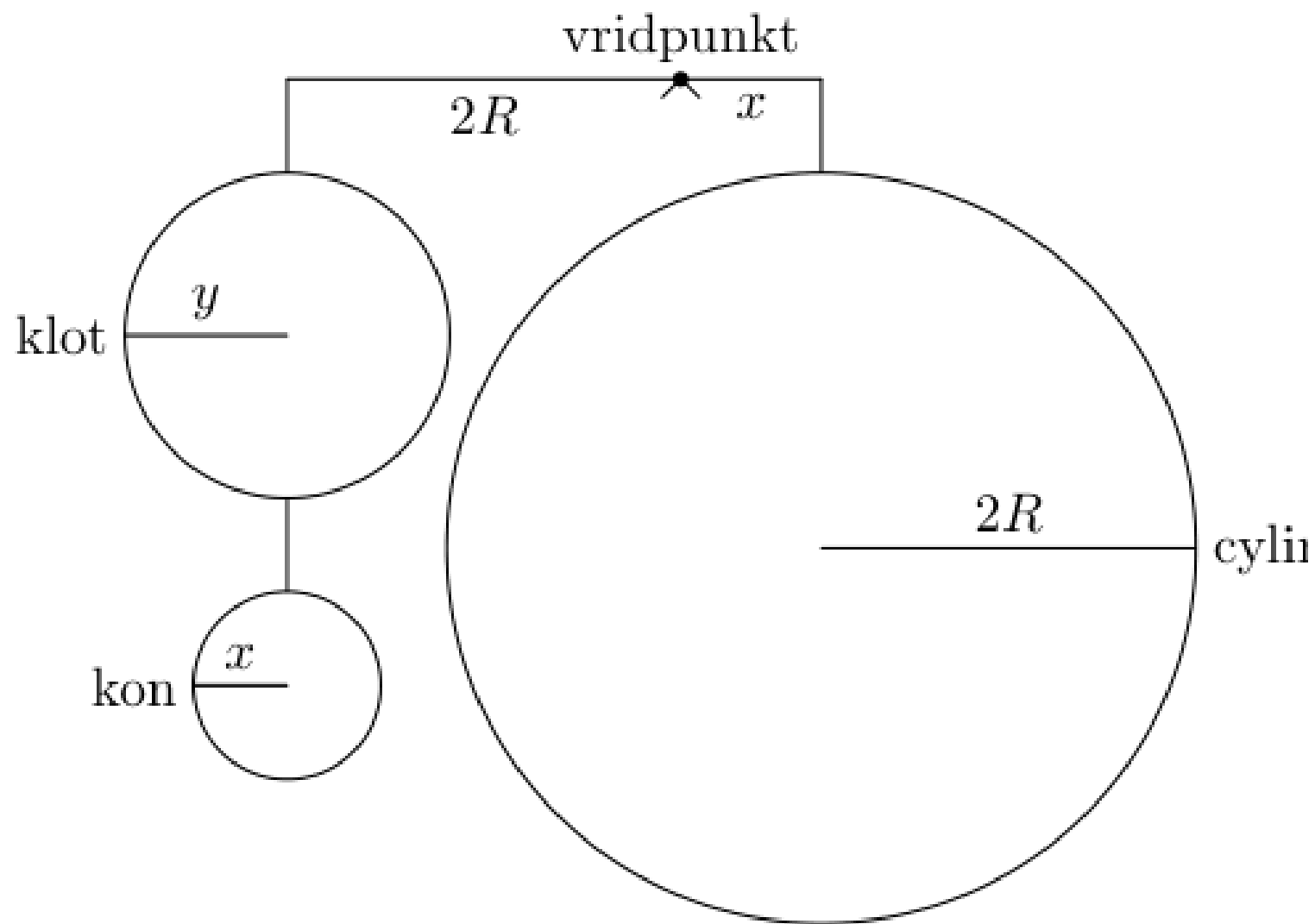
1.4 Mätning av volyme.



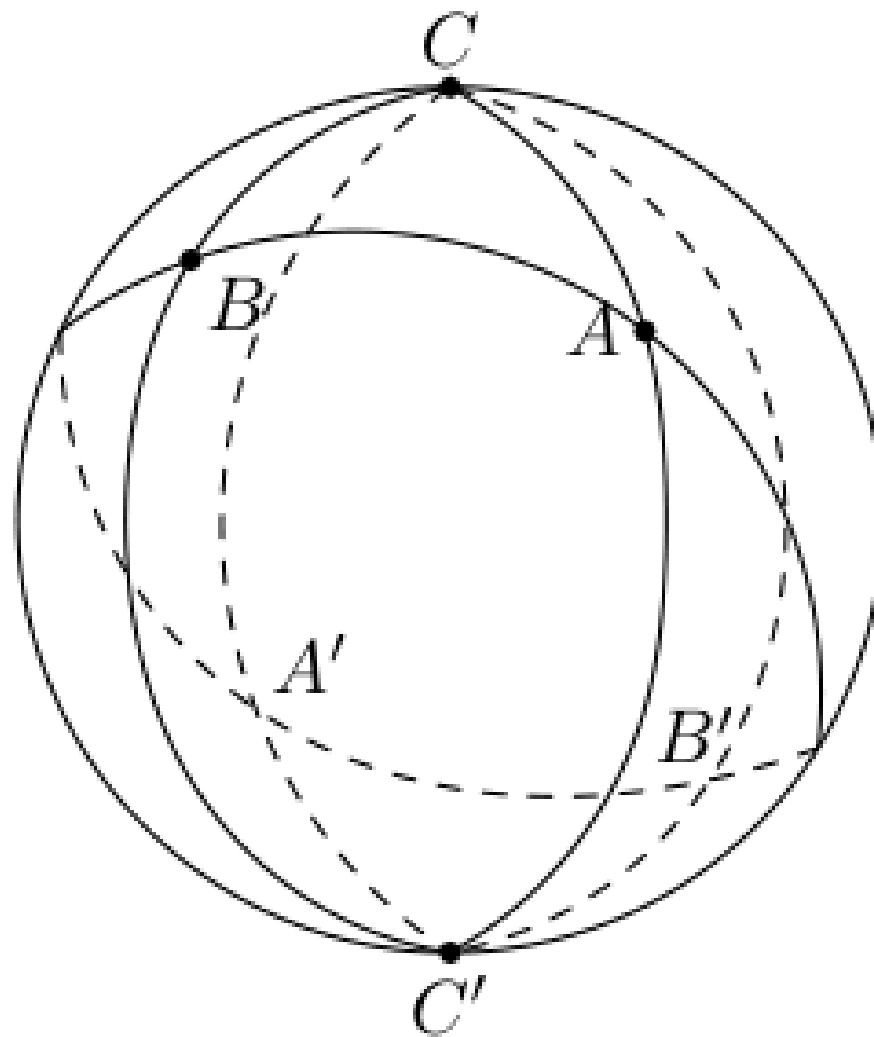
Figur 1.36 I den vänstra figuren visar vi att vinkeln TQA är rät. Eftersom OA och

Figur 1.36 I den vänstra figuren visar vi att vinkeln TQA är rät. Eftersom OA och OQ båda radier så är

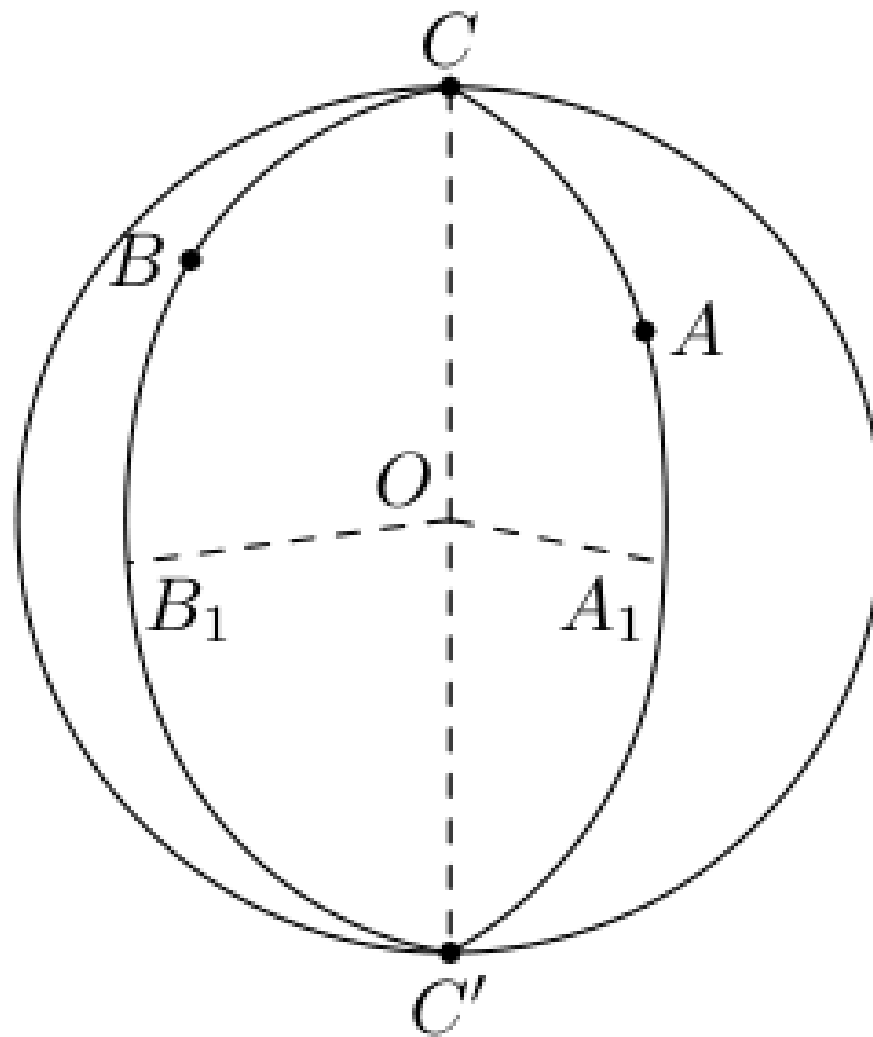
(Sida 45)



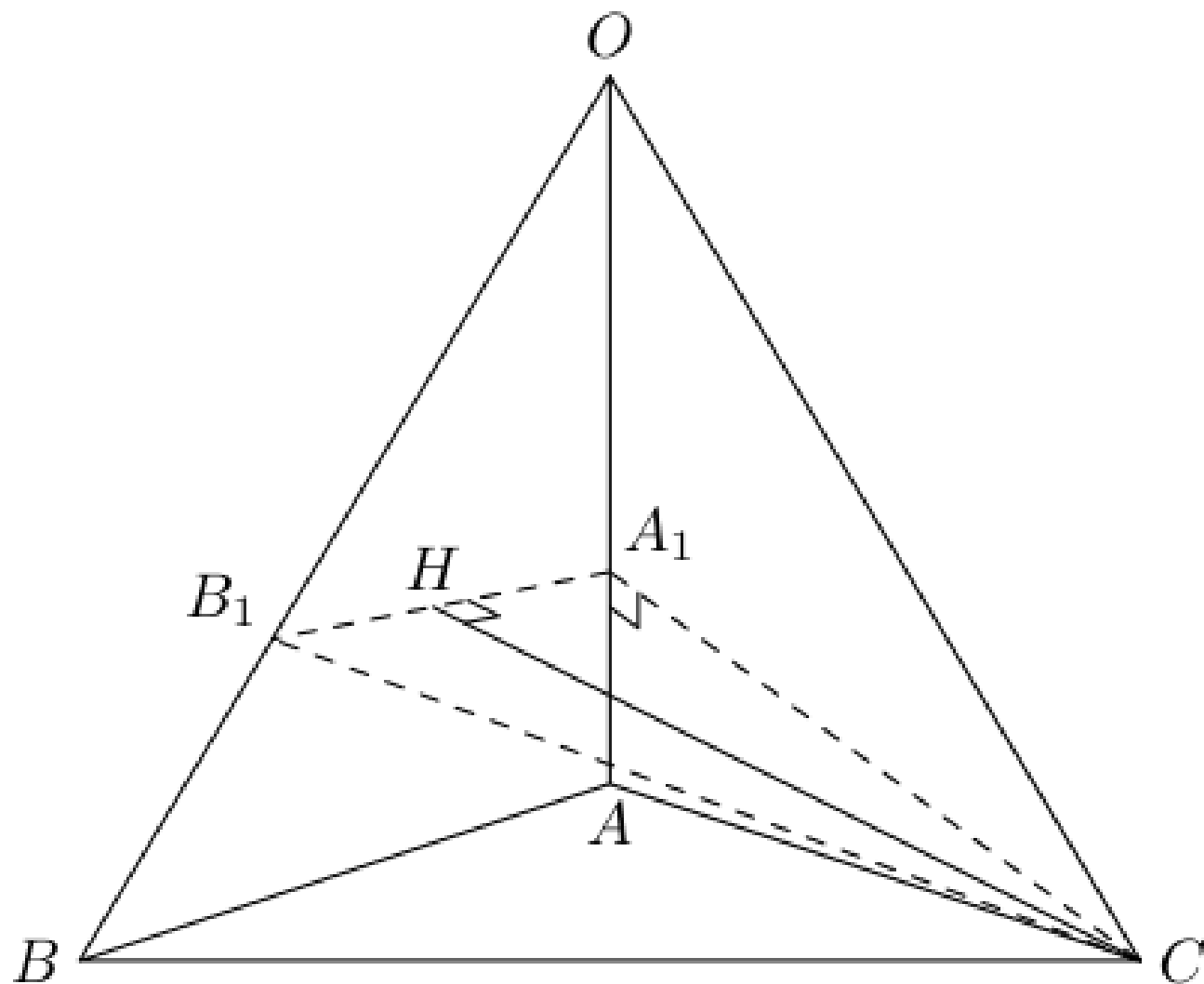
Figur 1.37
(Sida 46)



Figur 1.38
(Sida 49)

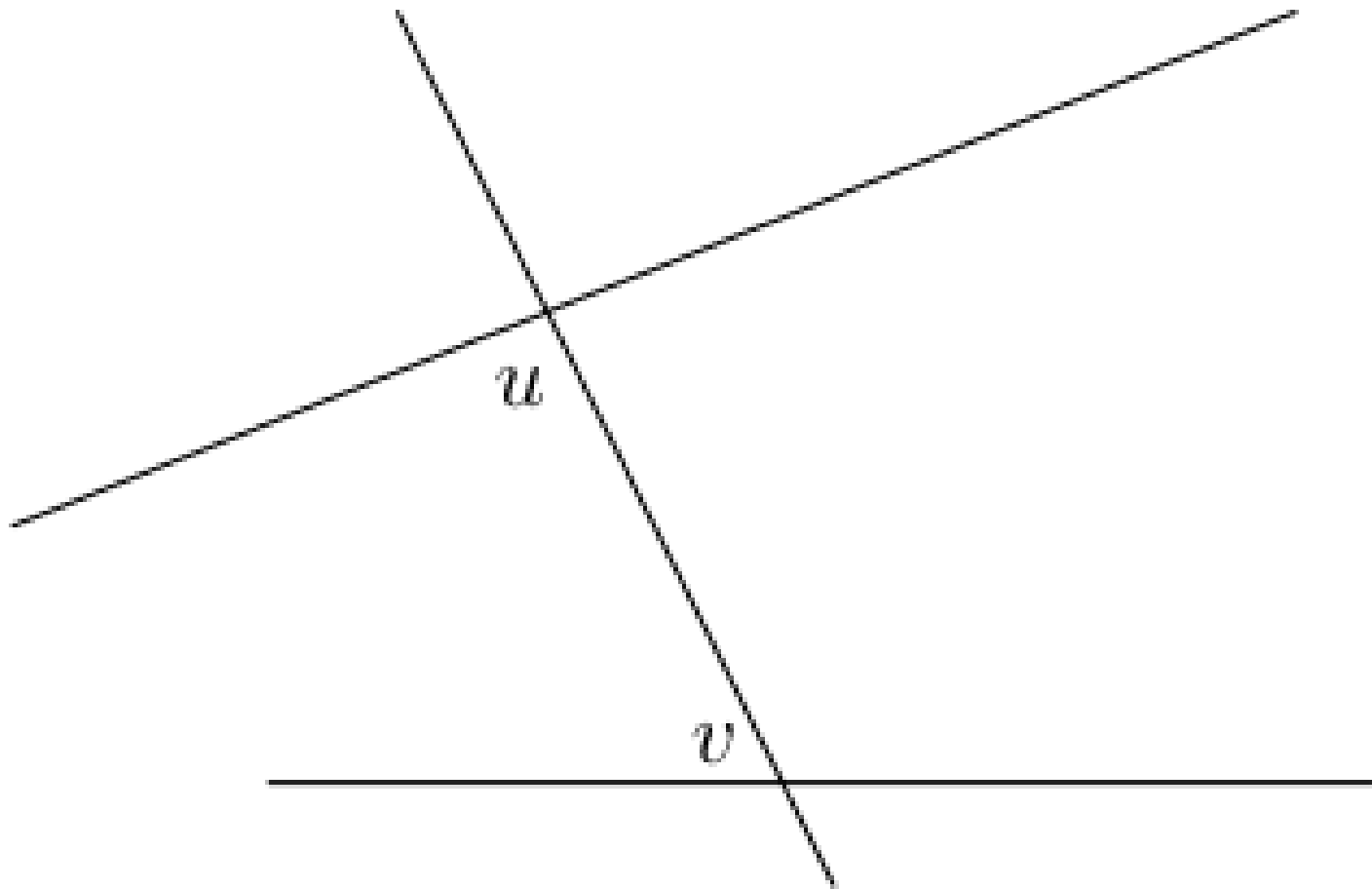


Figur 1.39 Sfärens medelpunkt betecknas med O . Radierna OA_1 och OB_1 är bådvinkelräta mot diamtern C
(Sida 50)

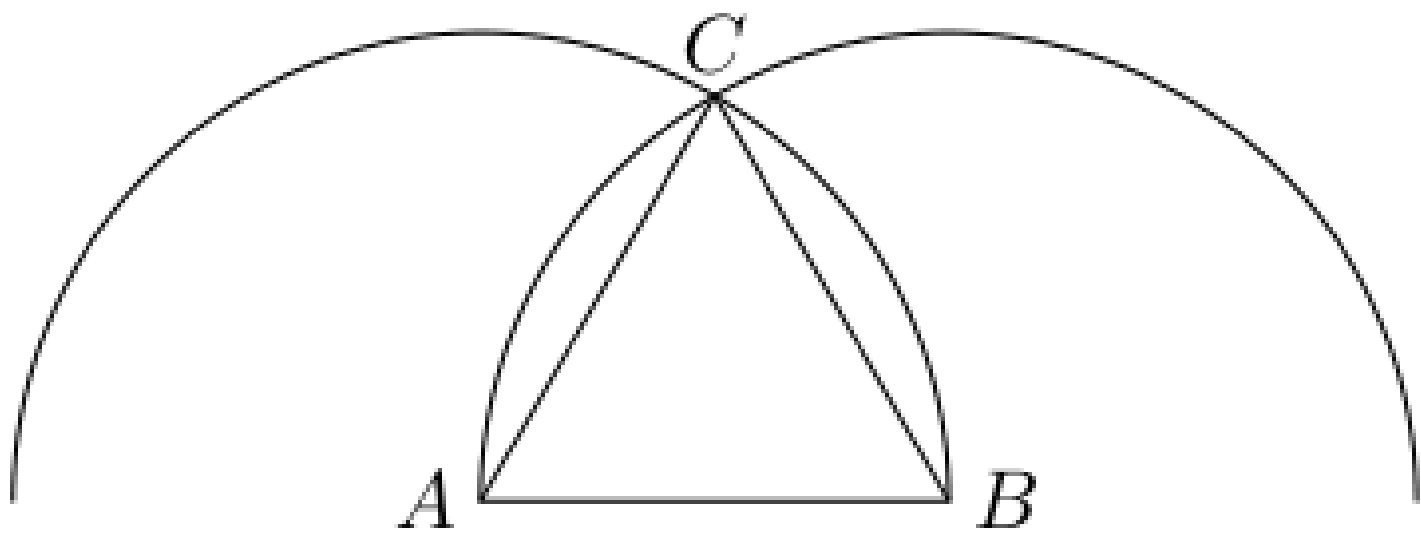


Figur 1.40 Vi har dragit tetraederns höjd CH mot sidoytan OAB samt höjden CA_1 i triangeln CAO . Kantli
(Sida 51)

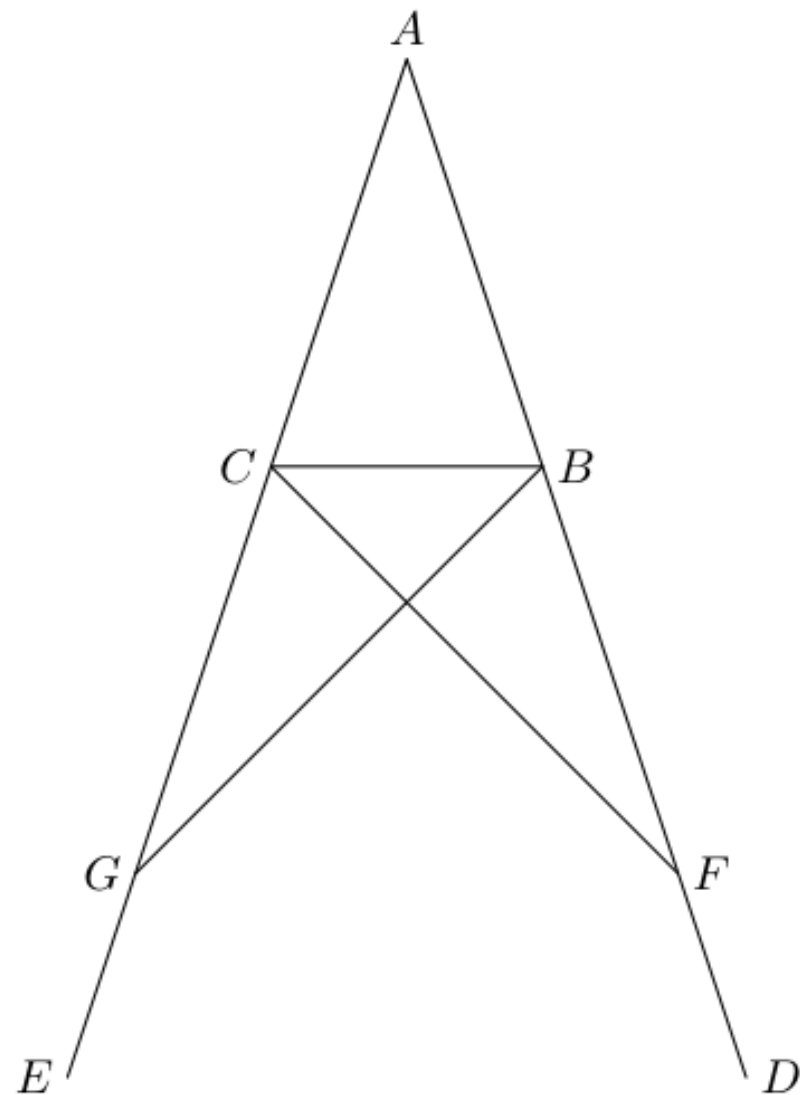
gur 2.1.



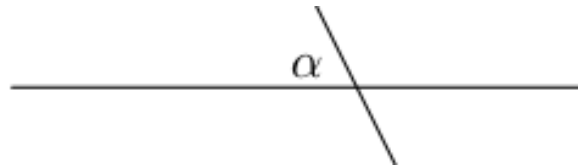
Figur 2.1 Summan av vinklarna u och v är mindre än två rätta och de båda rätalinjerna skär varandra ti
(Sida 61)



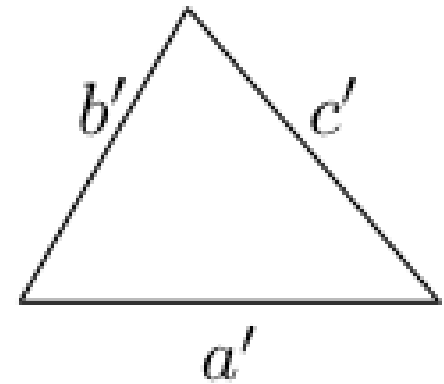
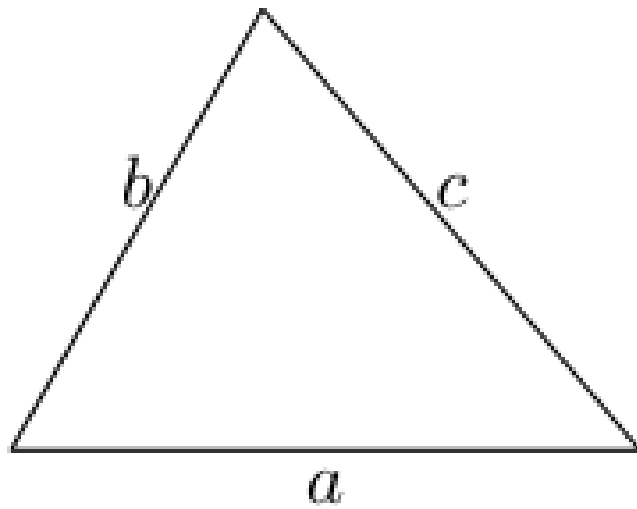
Figur 2.2
(Sida 62)



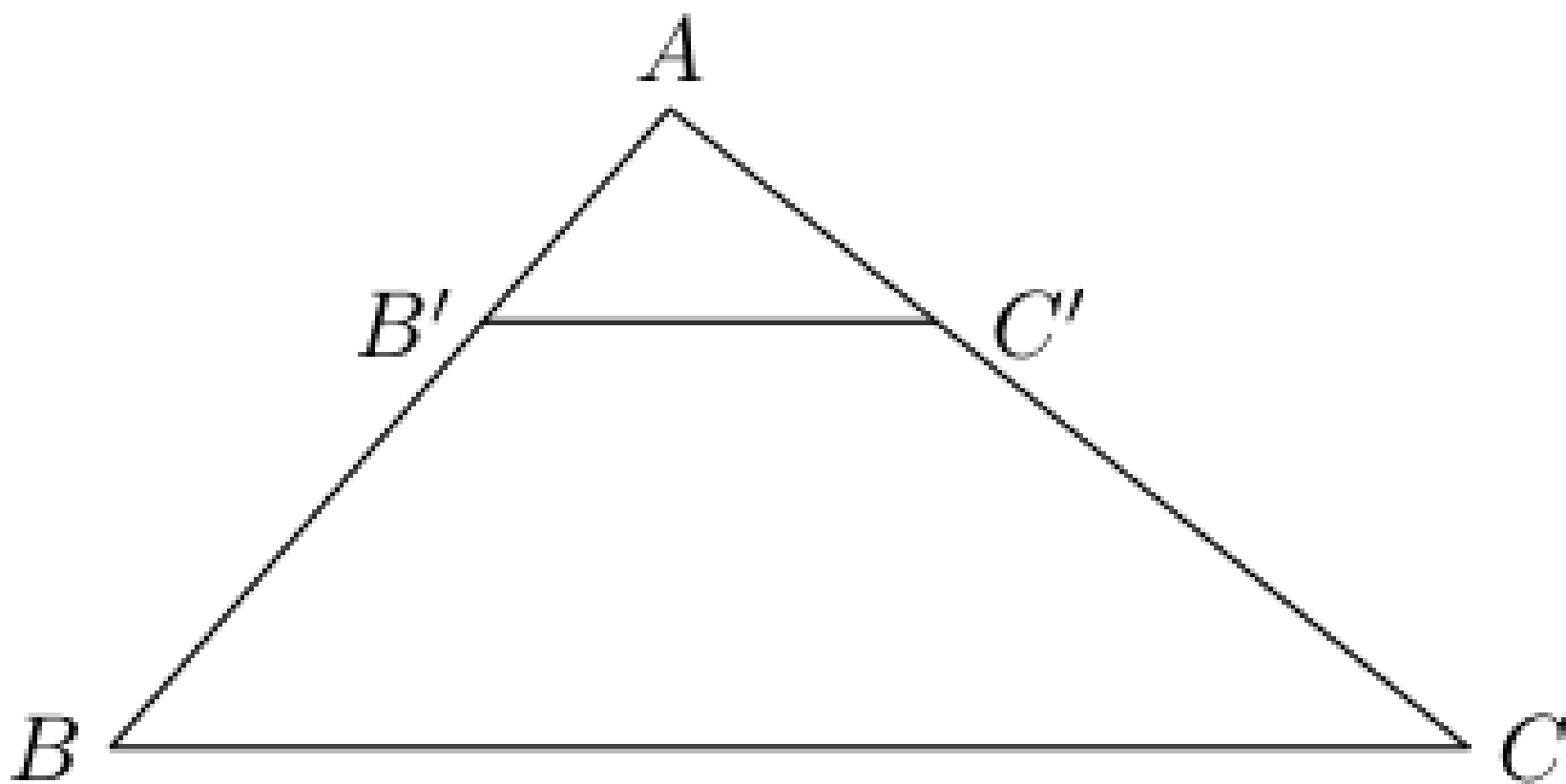
Figur 2.3
(Sida 65)



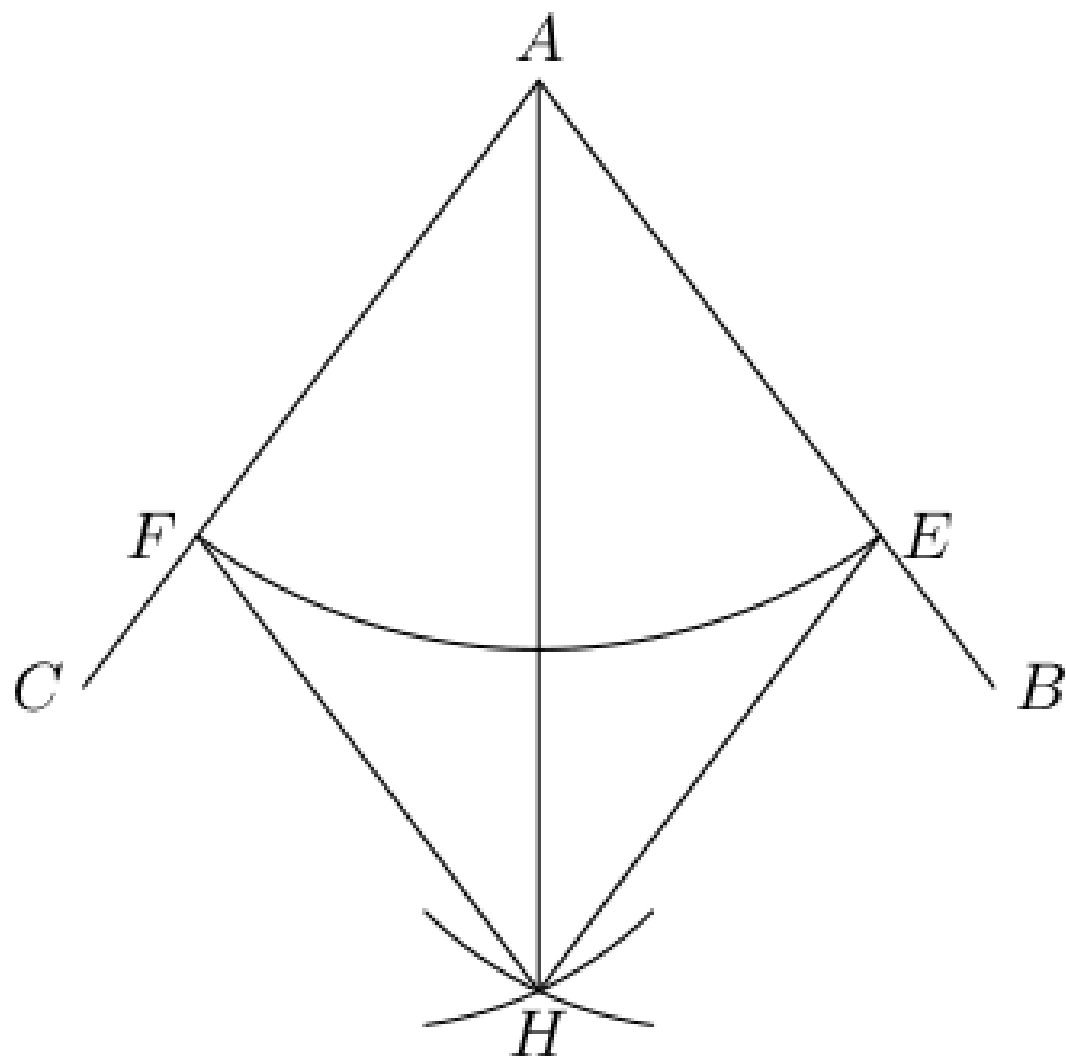
Figur 2.4 Vinklarna α och β är alternatvinklar, α och γ motstående vinklar, α och δ likbelägna vinkla
(Sida 68)



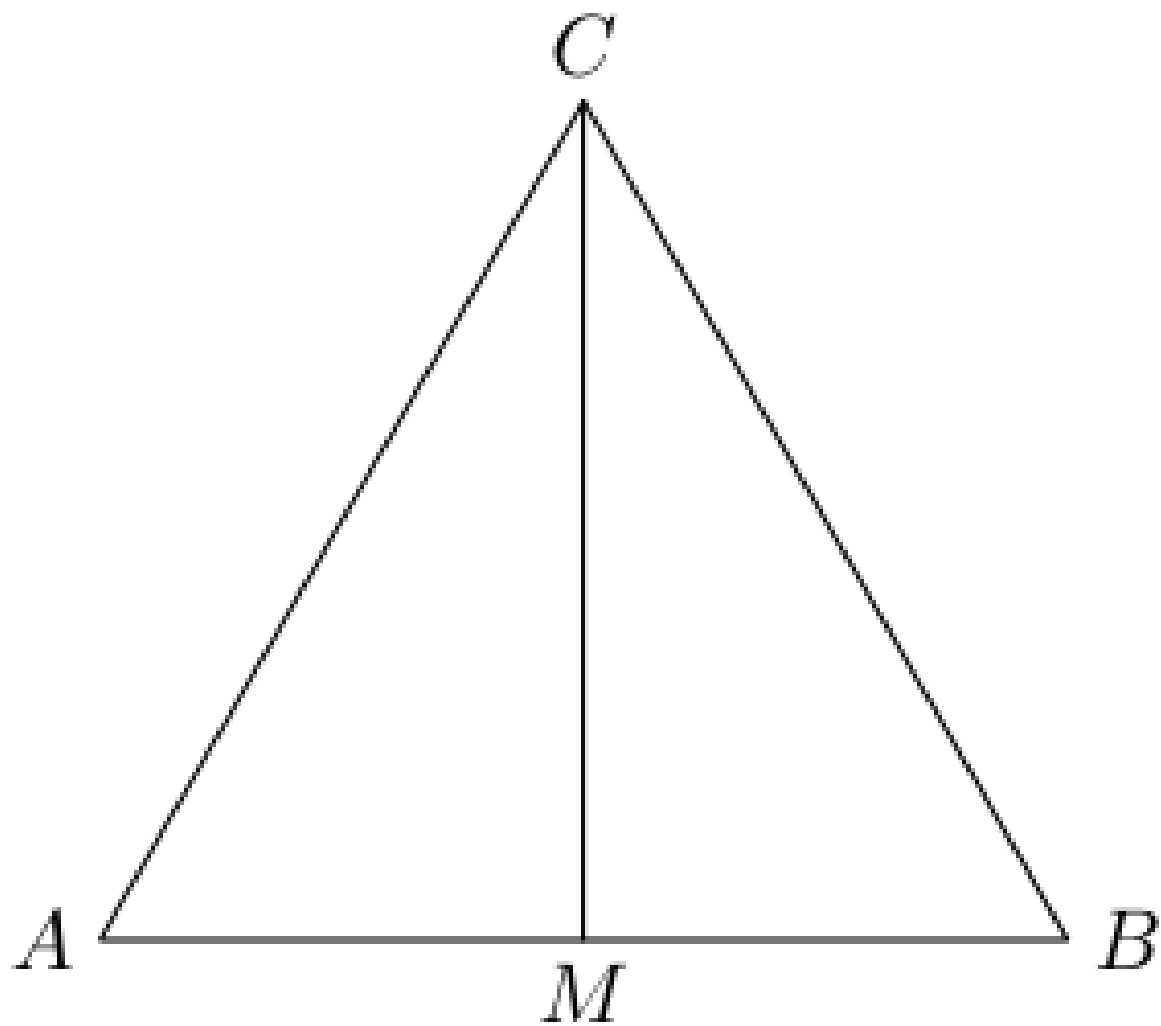
Figur 2.5
(Sida 71)



Figur 2.6
(Sida 72)

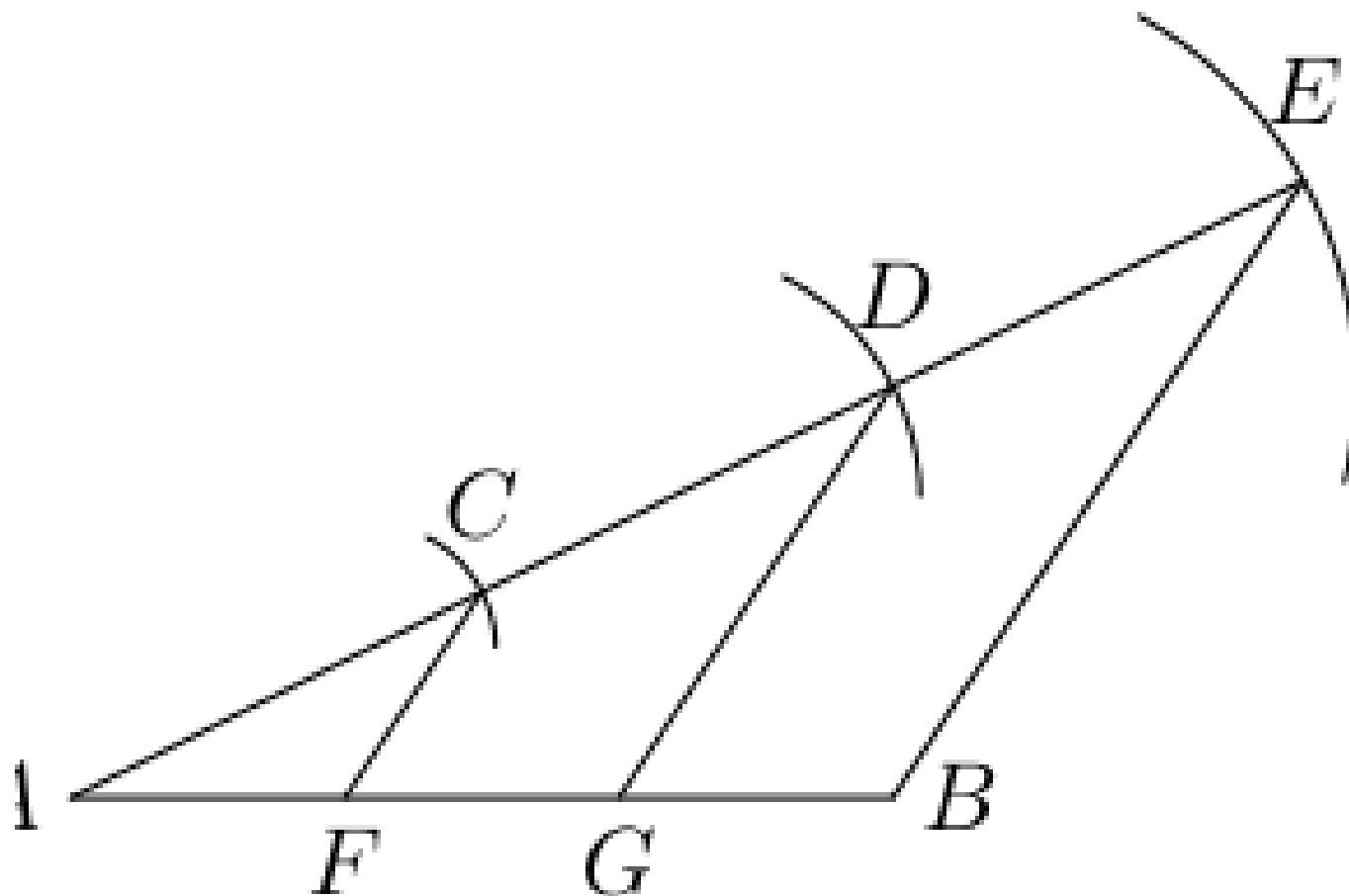


Figur 2.7
(Sida 73)



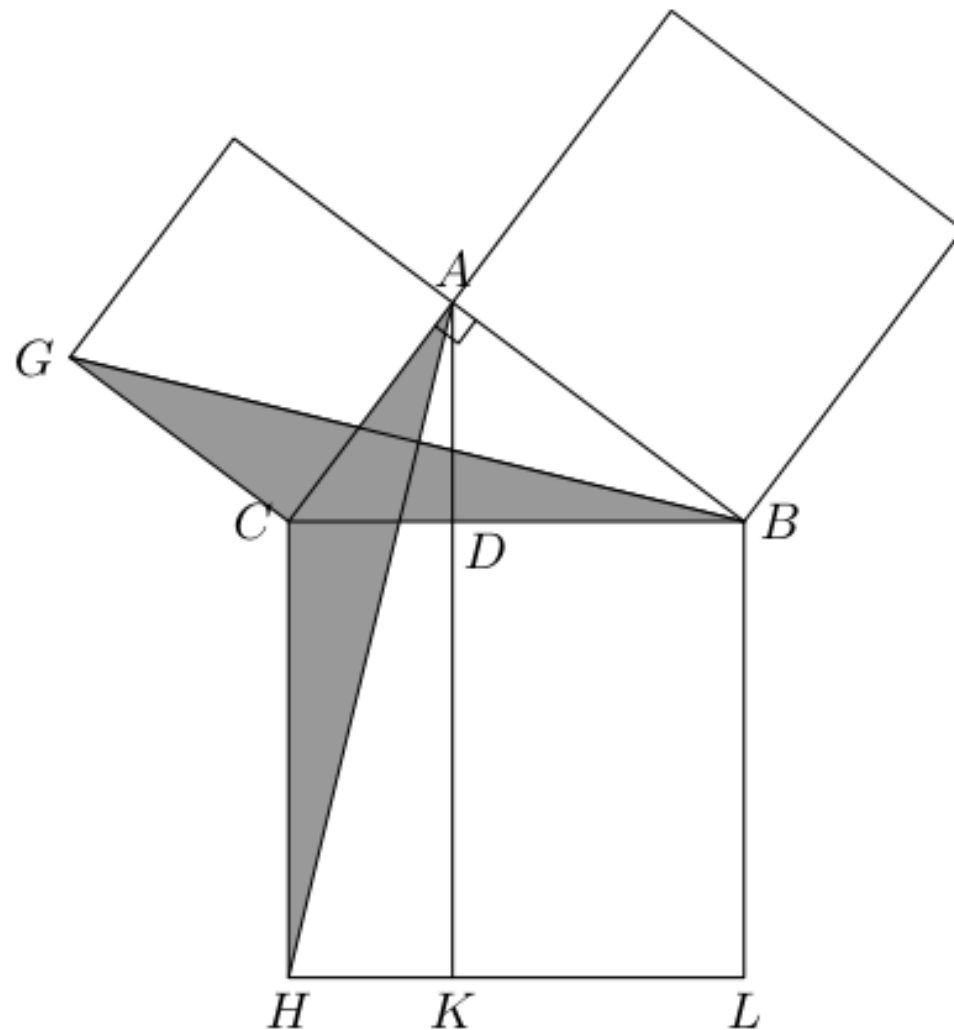
Figur 2.8
(Sida 74)

2.4 KONSTRUKTIONER MED PA



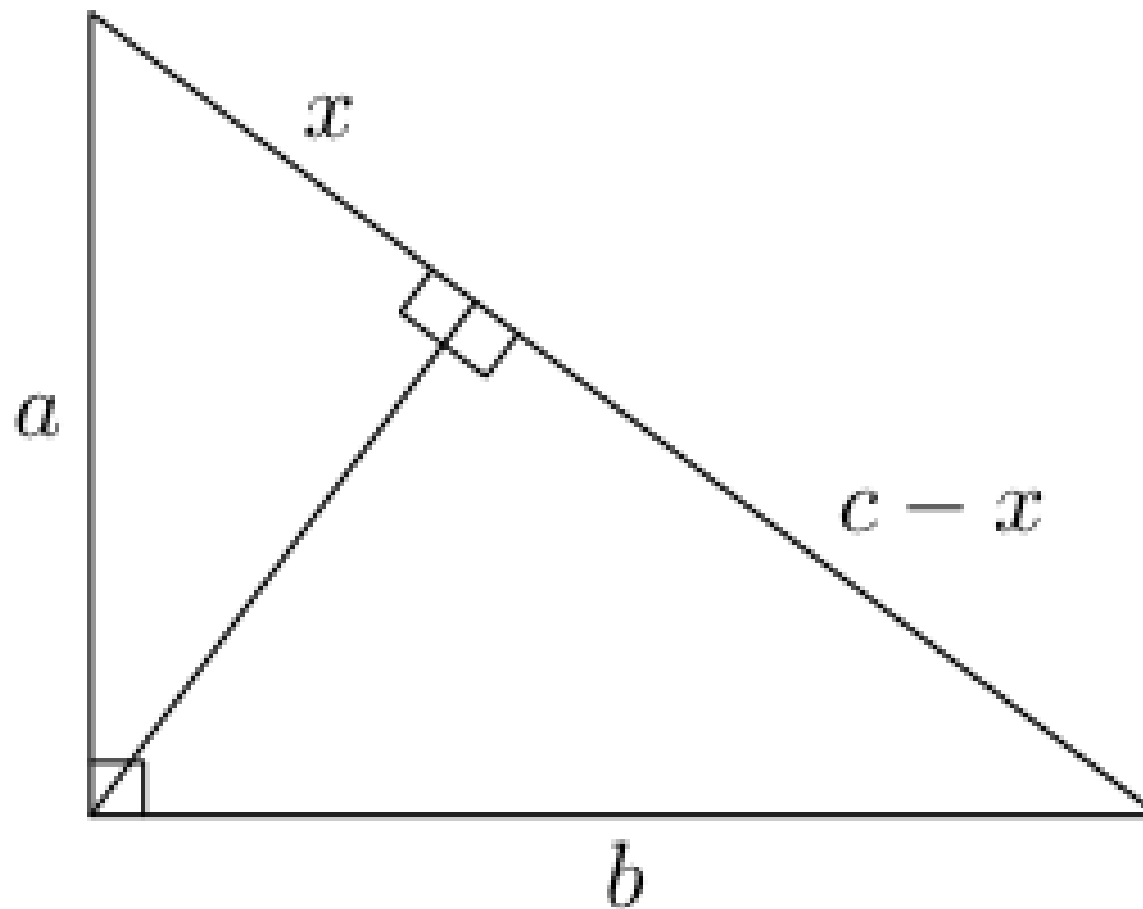
Figur 2.9
(Sida 75)

DES BEVIS AV PYTHAGORAS SATS

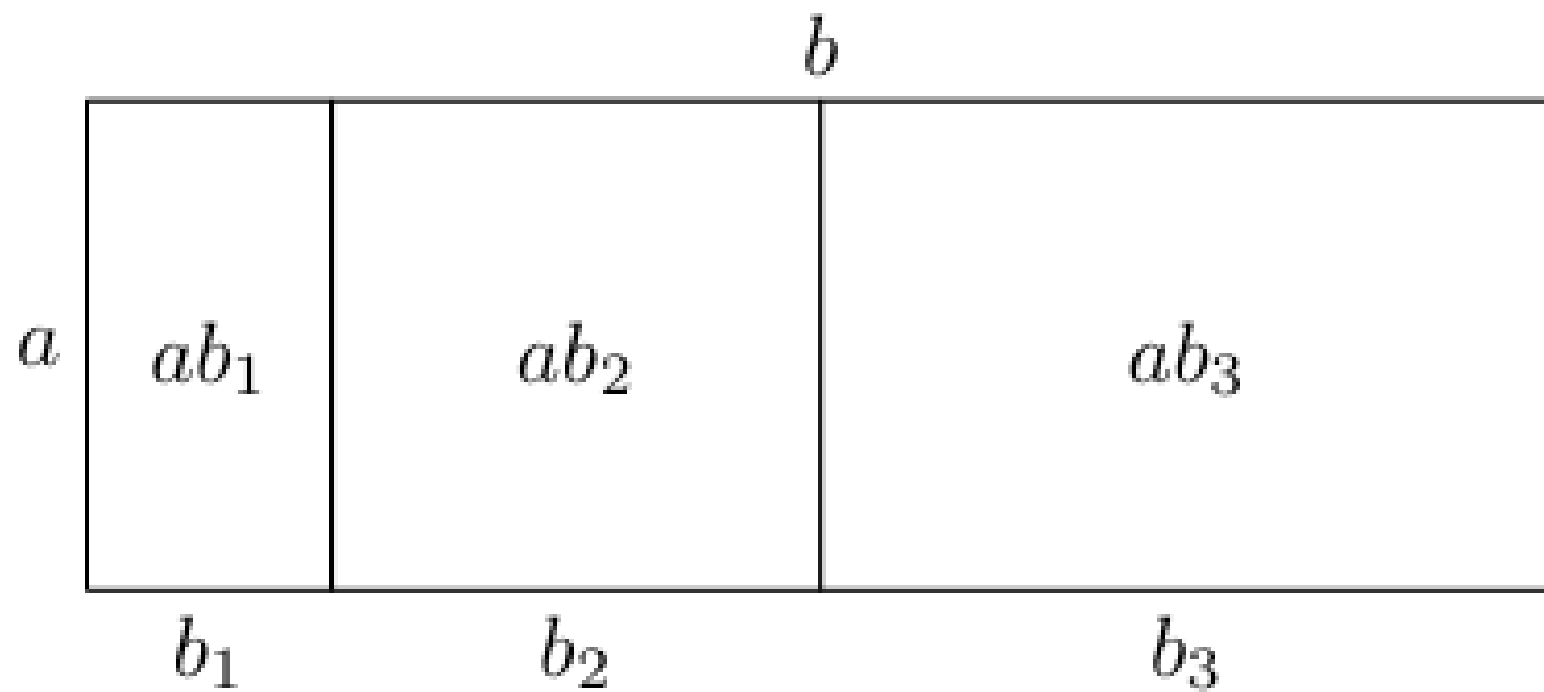


Figur 2.10
(Sida 77)

SAISKT BEVIS MED HJÄLP AV LIKFO

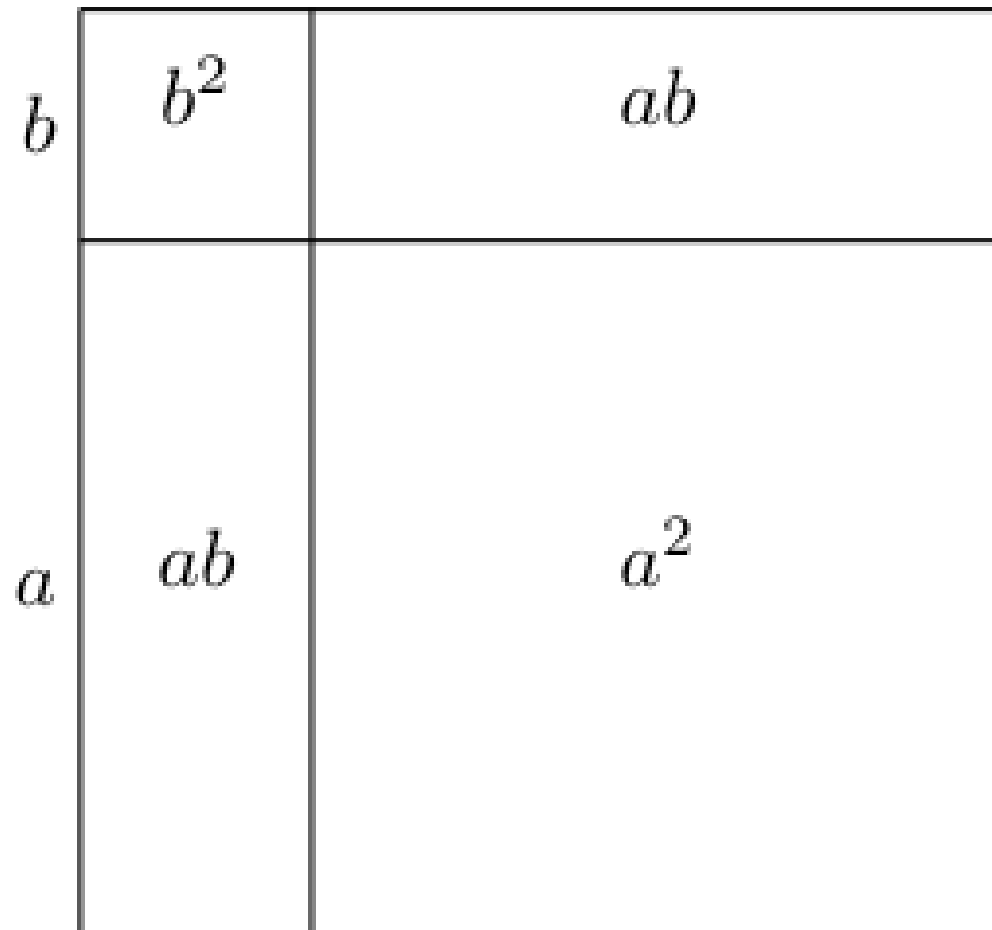


Figur 2.11
(Sida 78)

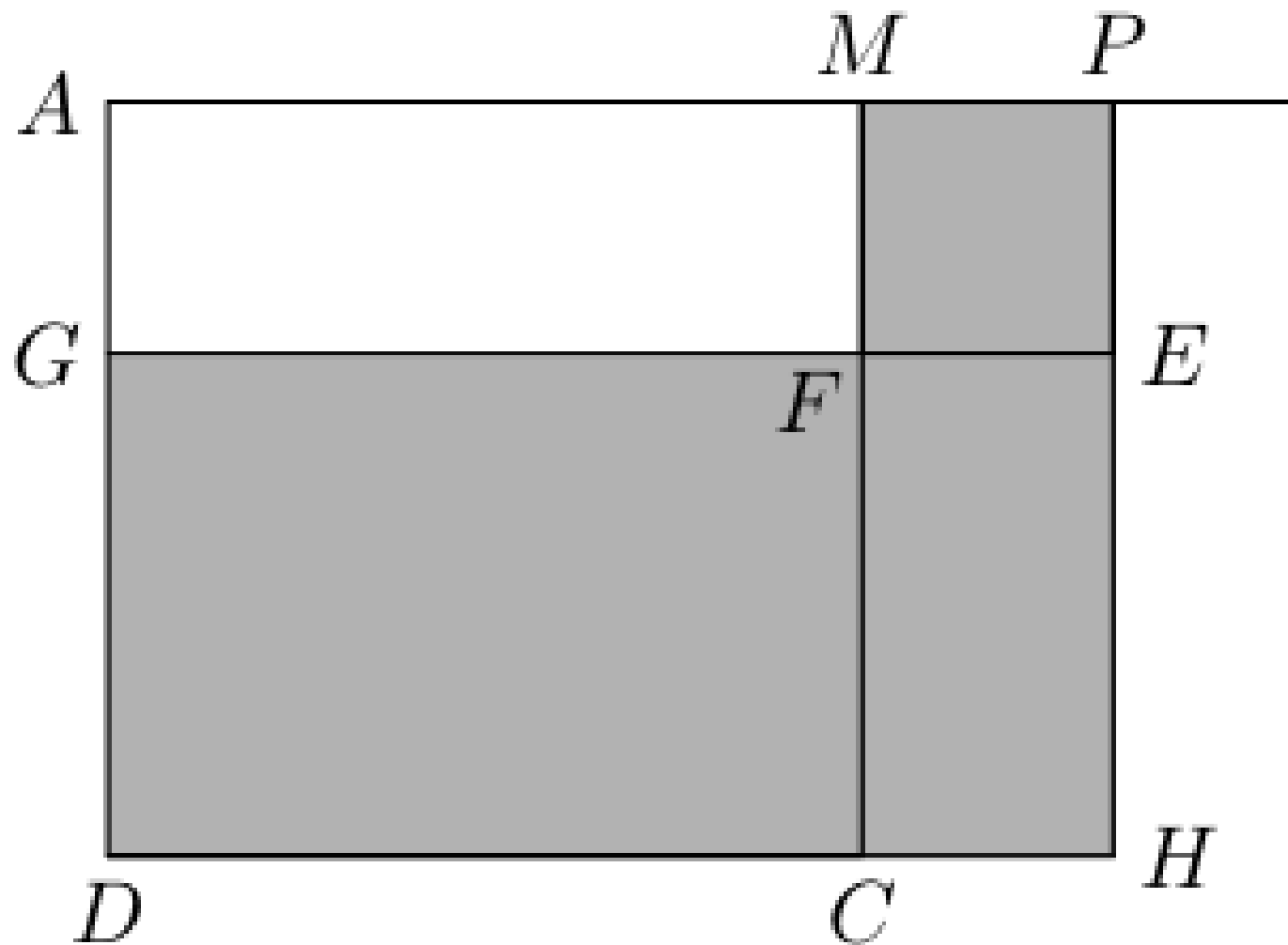


Figur 2.12
(Sida 80)

figur 2.13.

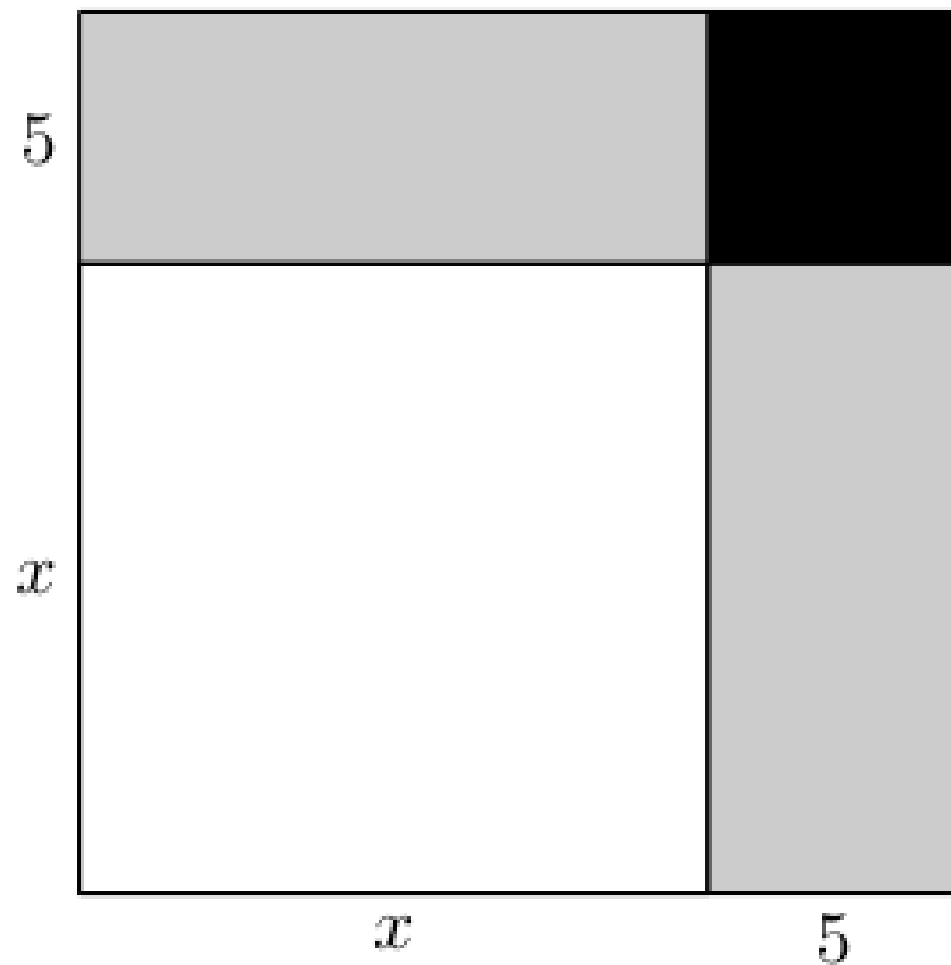


Figur 2.13
(Sida 80)

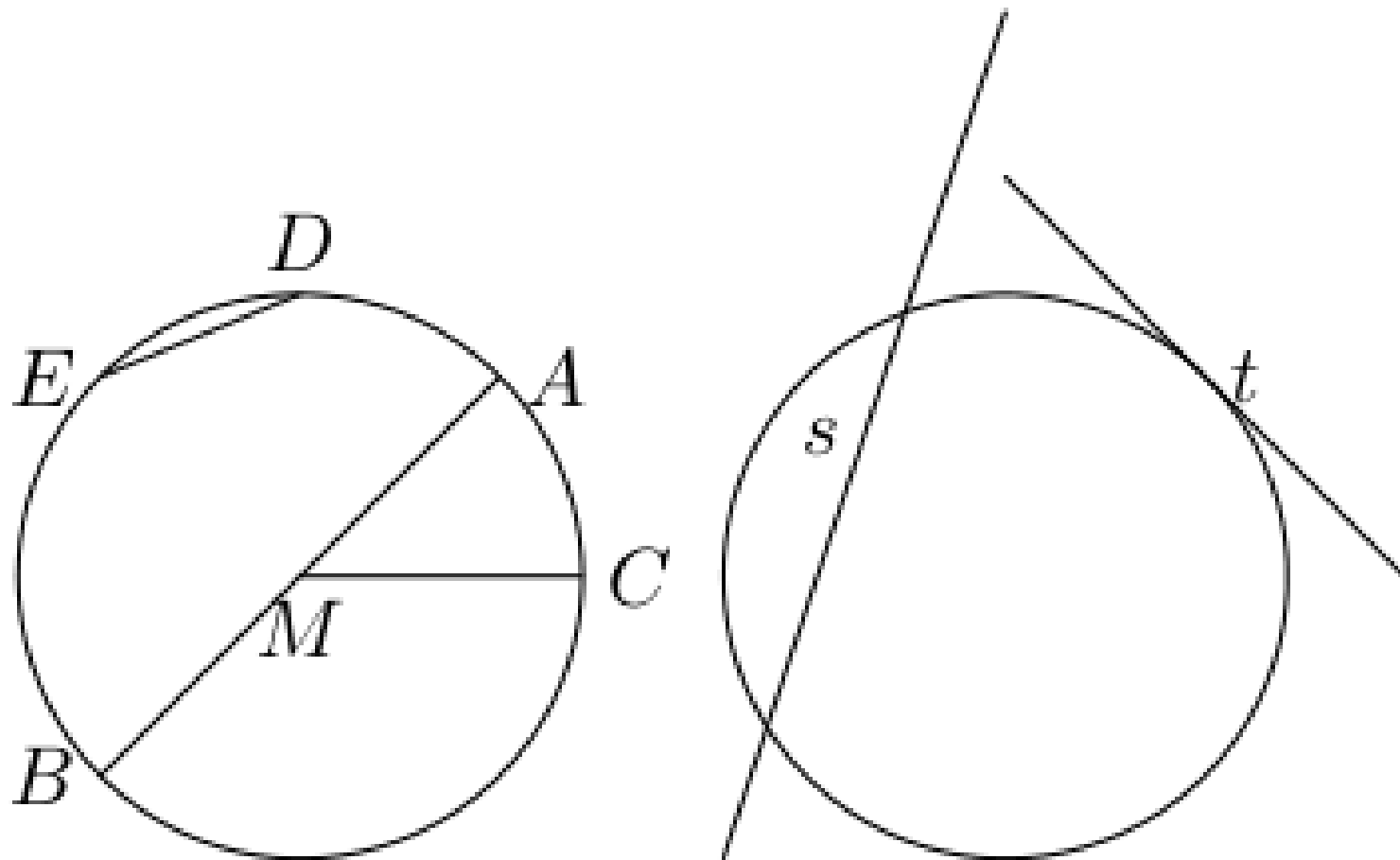


Figur 2.14
(Sida 81)

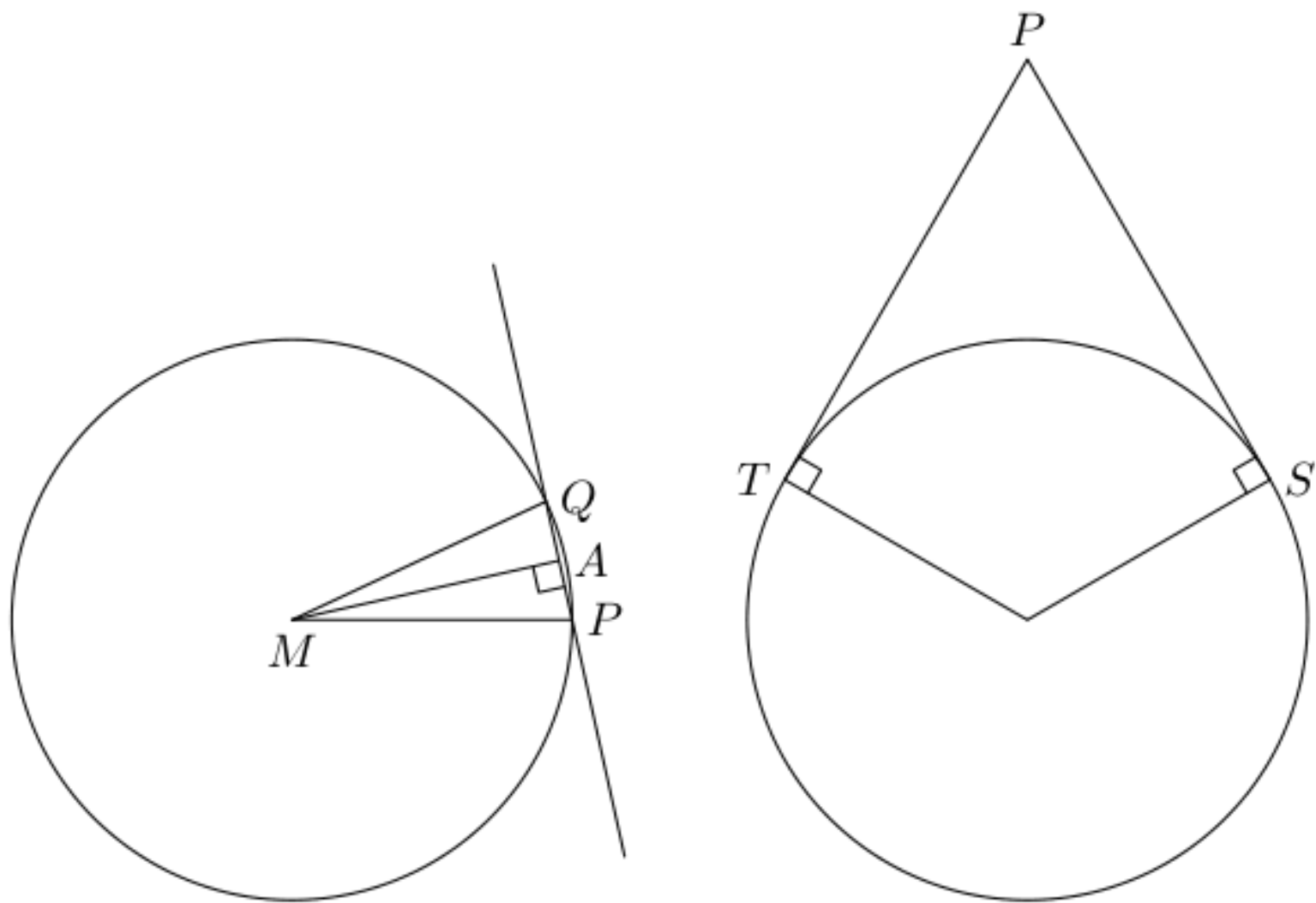
vi oss av modernt skrivsätt. Se figur



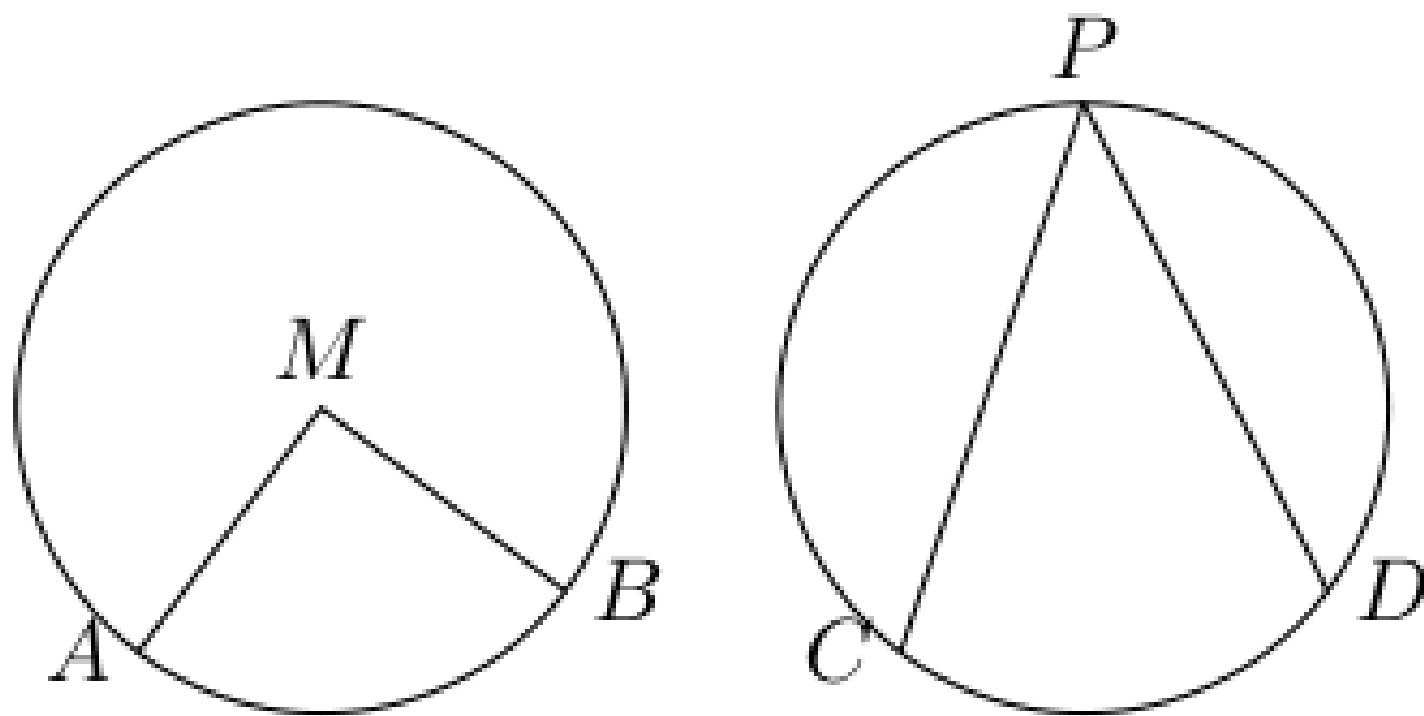
Figur 2.15
(Sida 83)



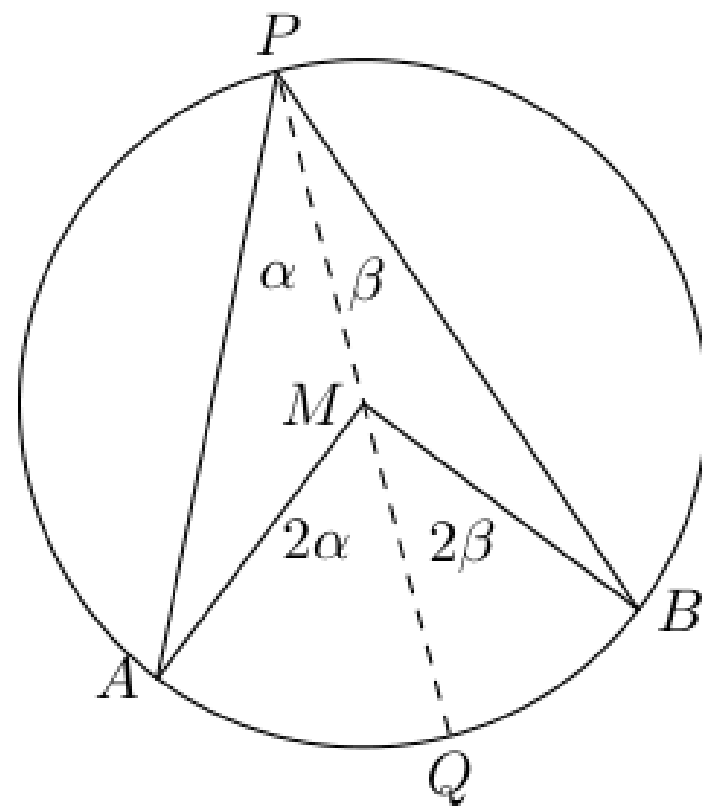
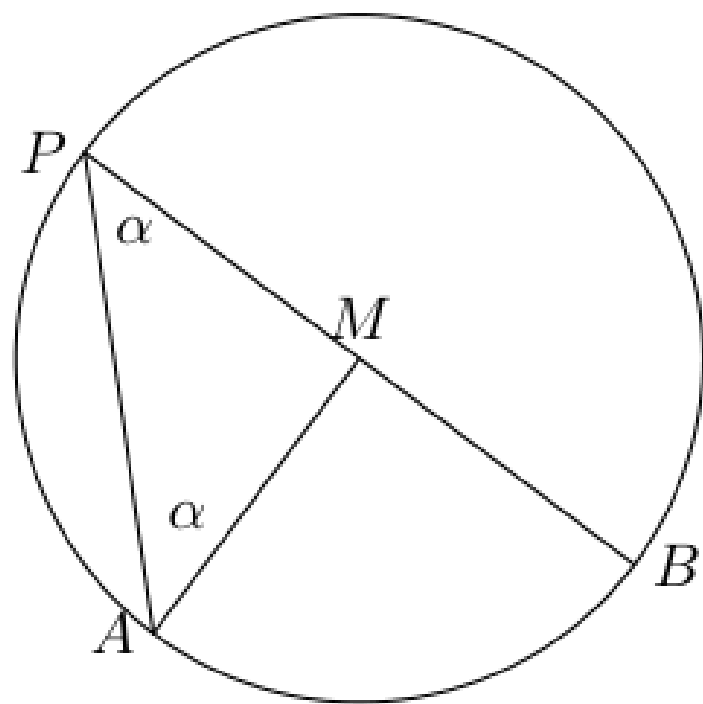
Figur 2.16 I vänstra figuren är AB en diameter, MC en radie och DE en korda. I den högra är s en sekta
 (Sida 85)



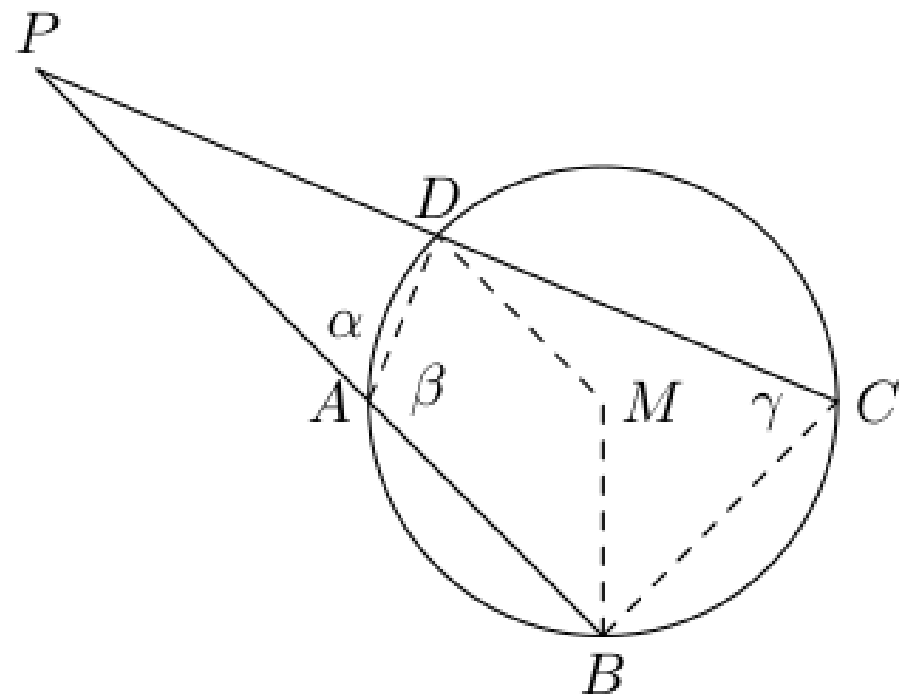
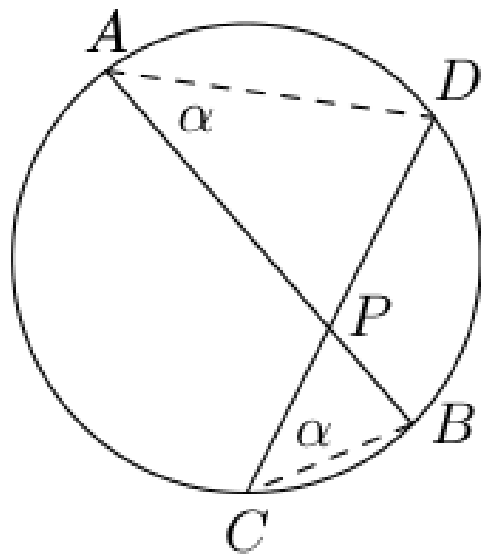
Figur 2.17
(Sida 86)



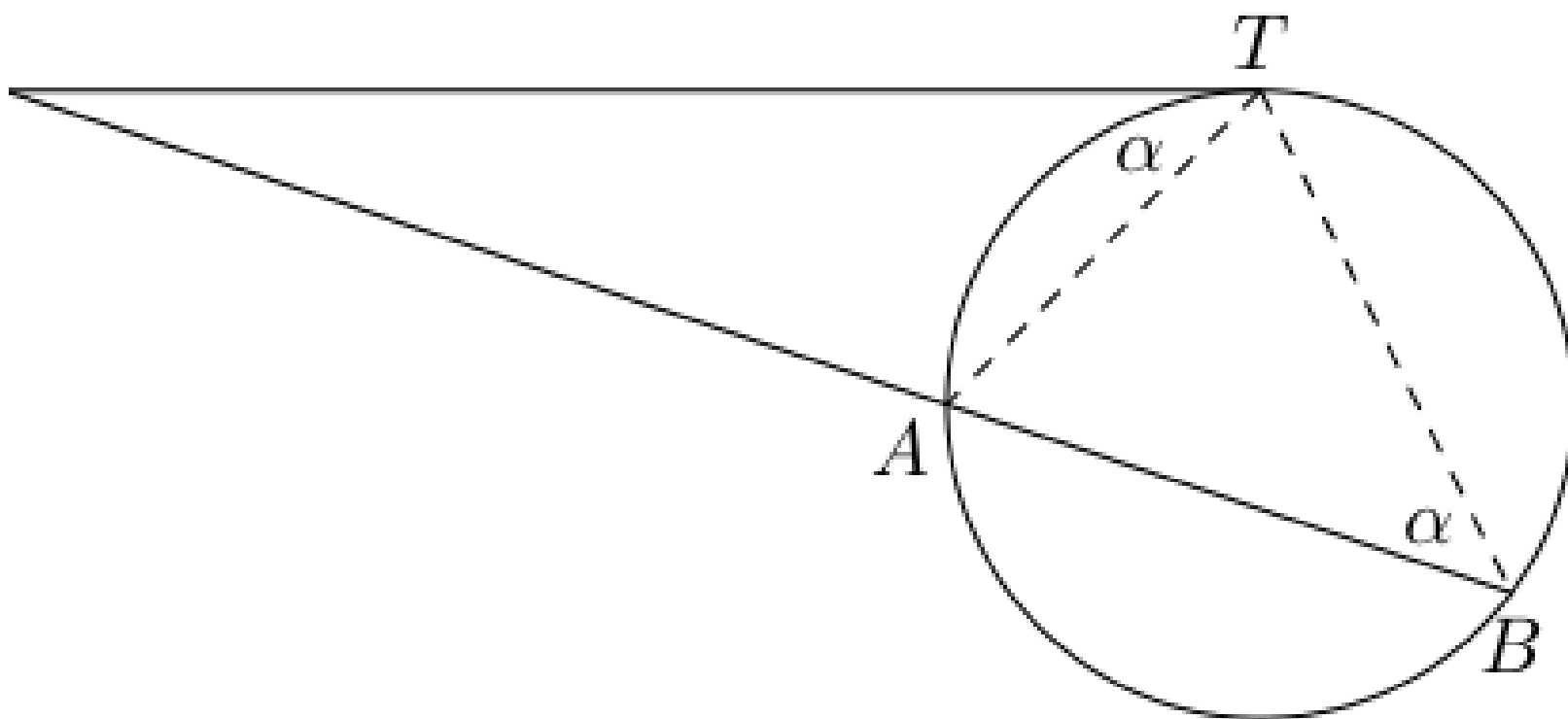
Figur 2.18
(Sida 87)



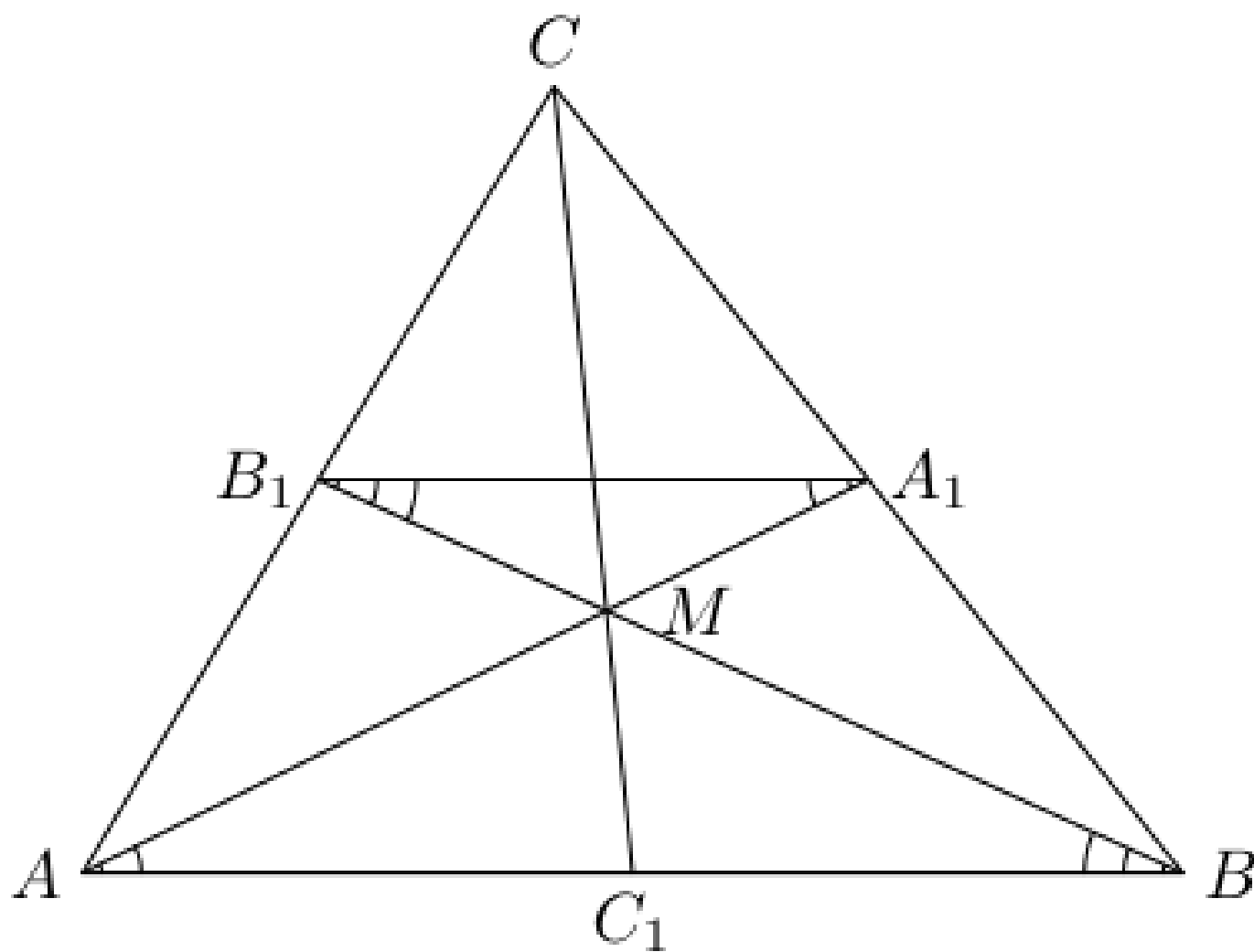
Figur 2.19
(Sida 88)



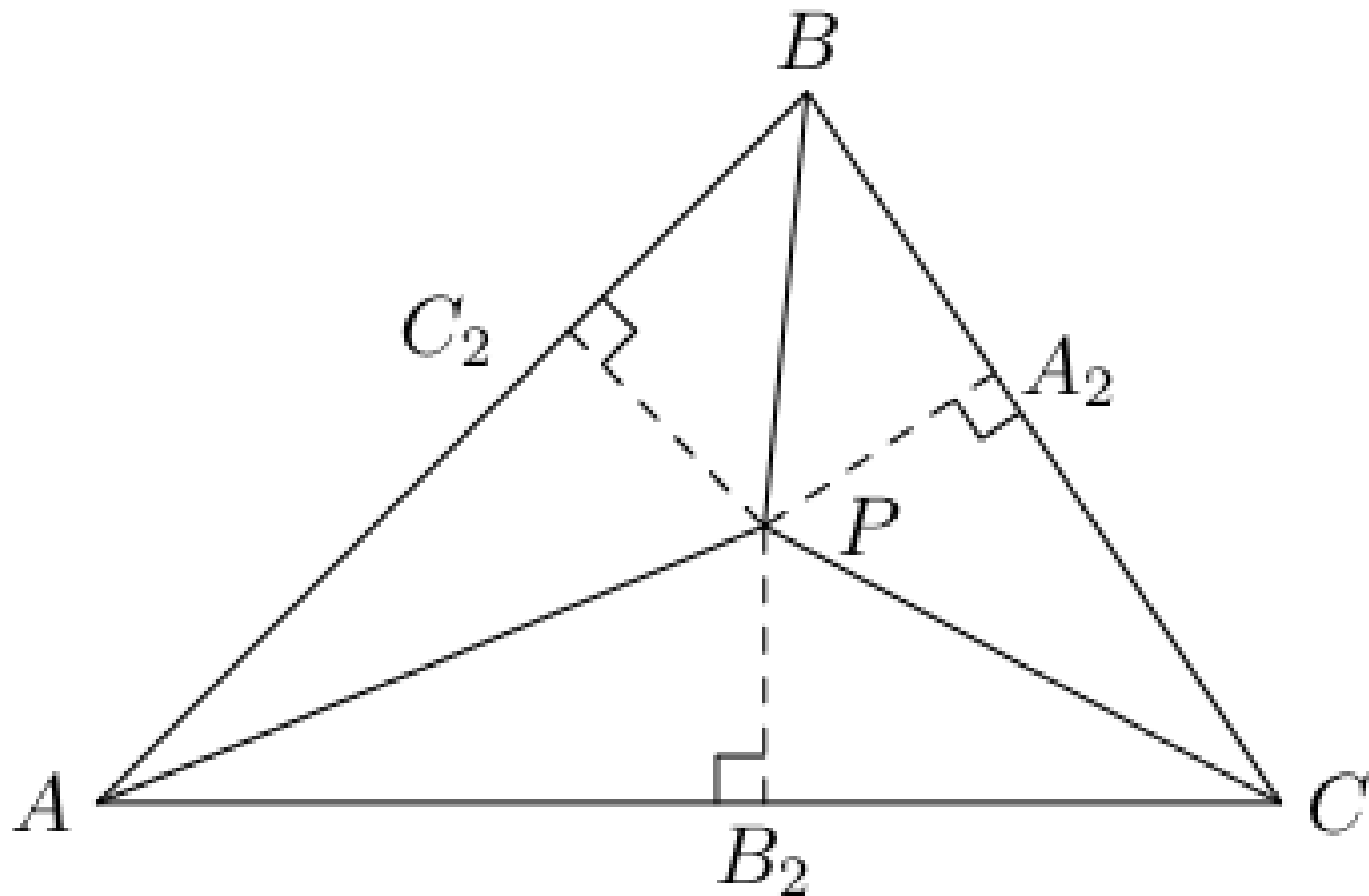
Figur 2.20
(Sida 89)



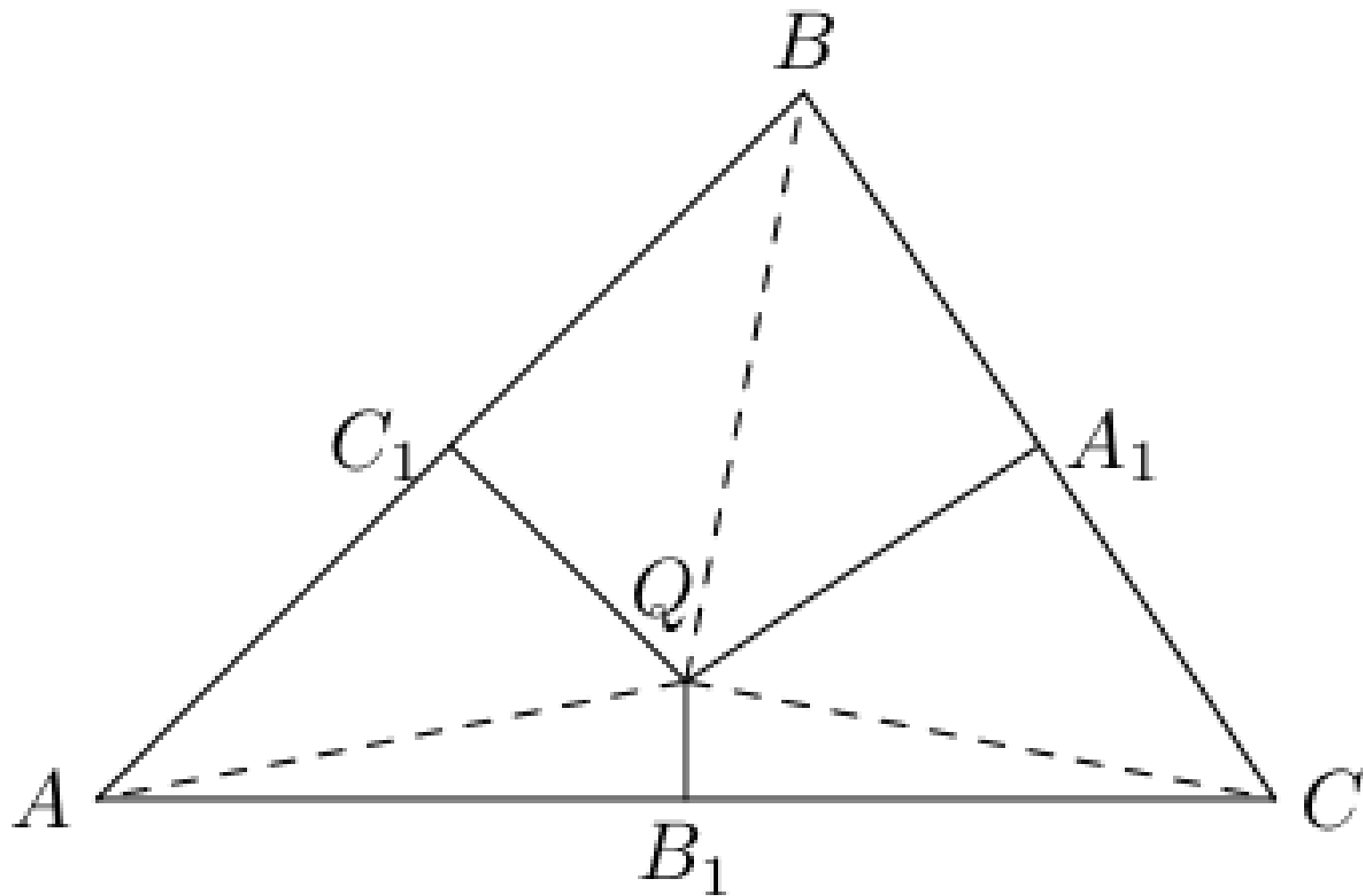
Figur 2.21
(Sida 90)



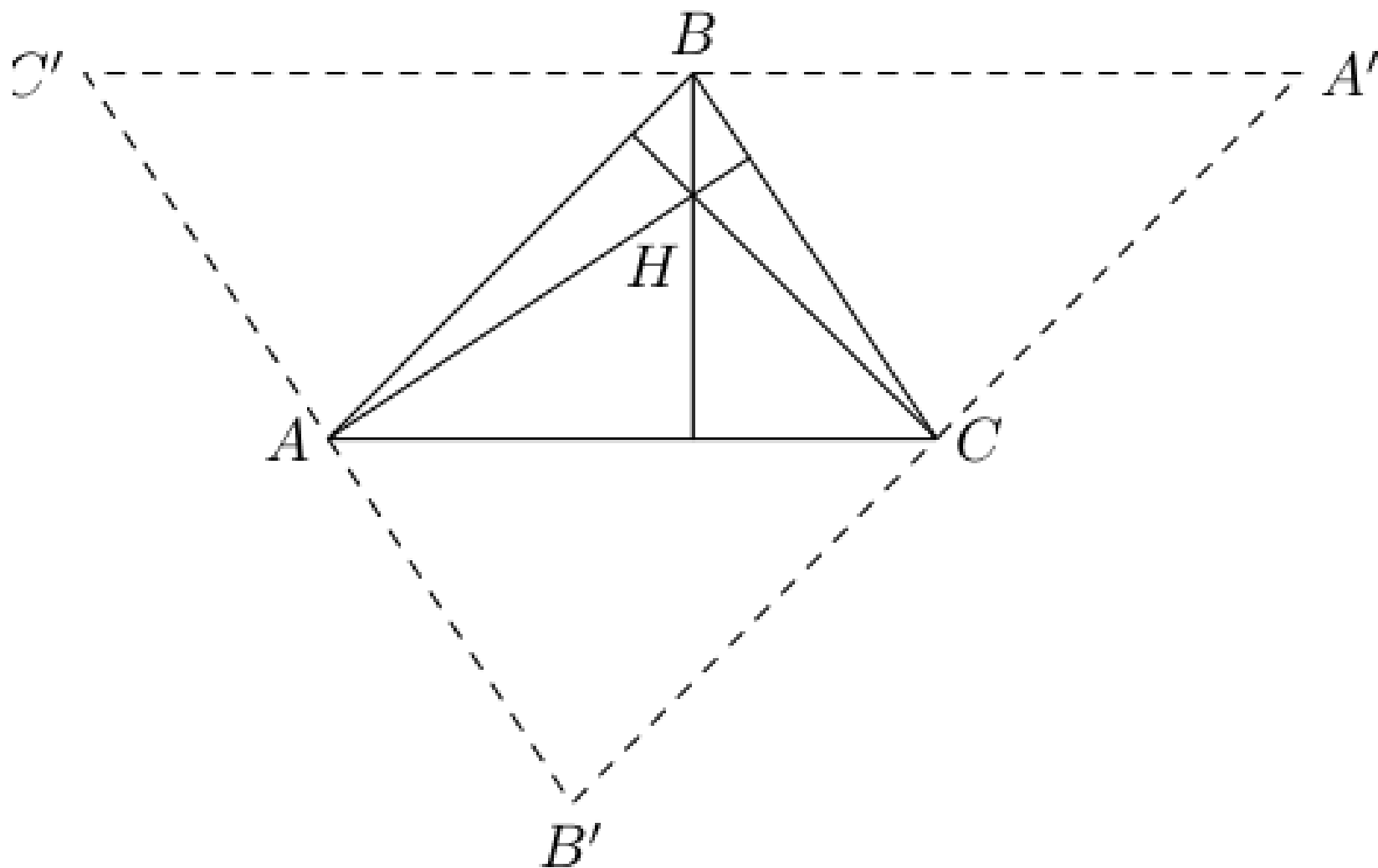
Figur 2.22
(Sida 92)



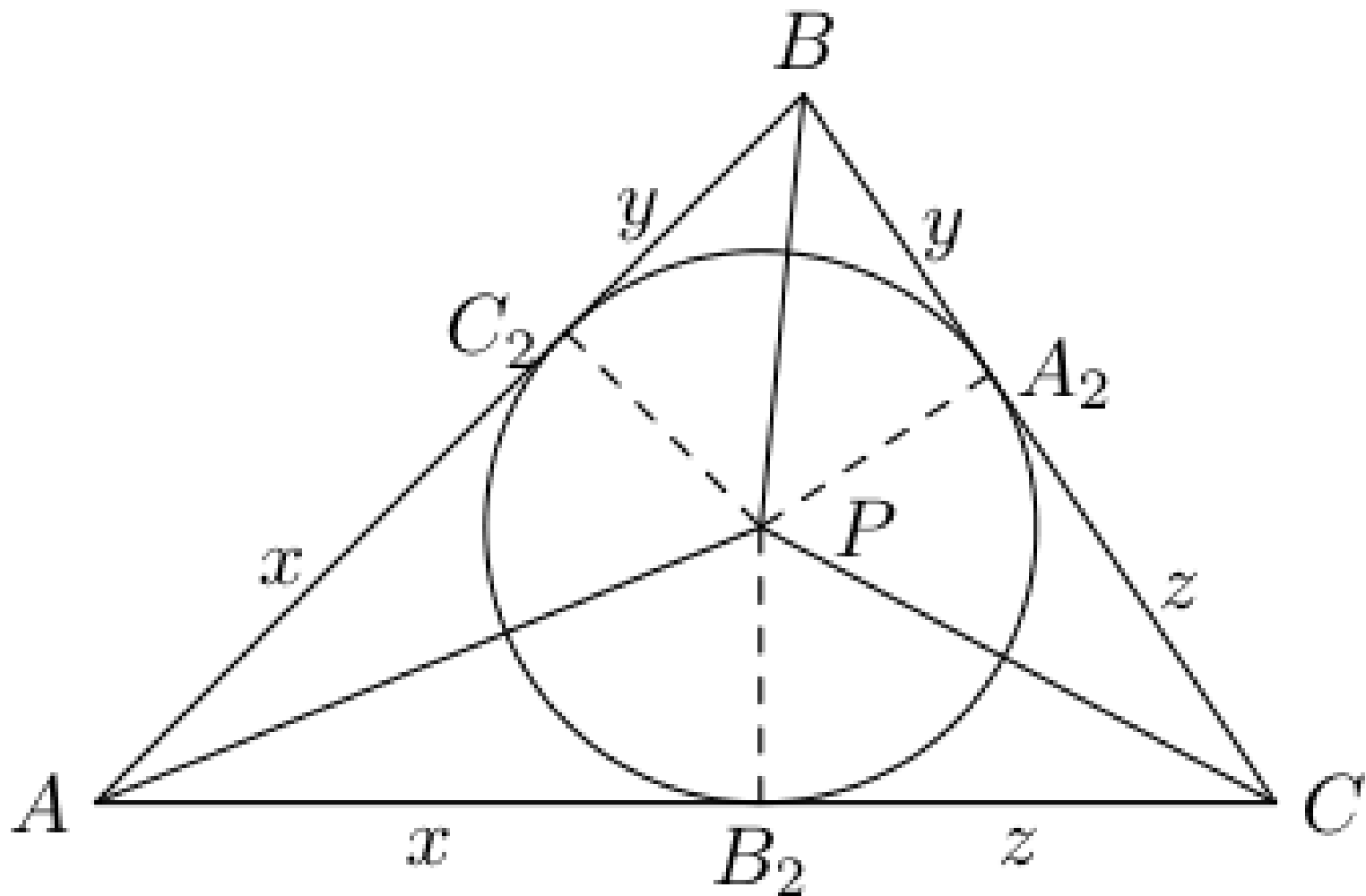
Figur 2.23
(Sida 92)



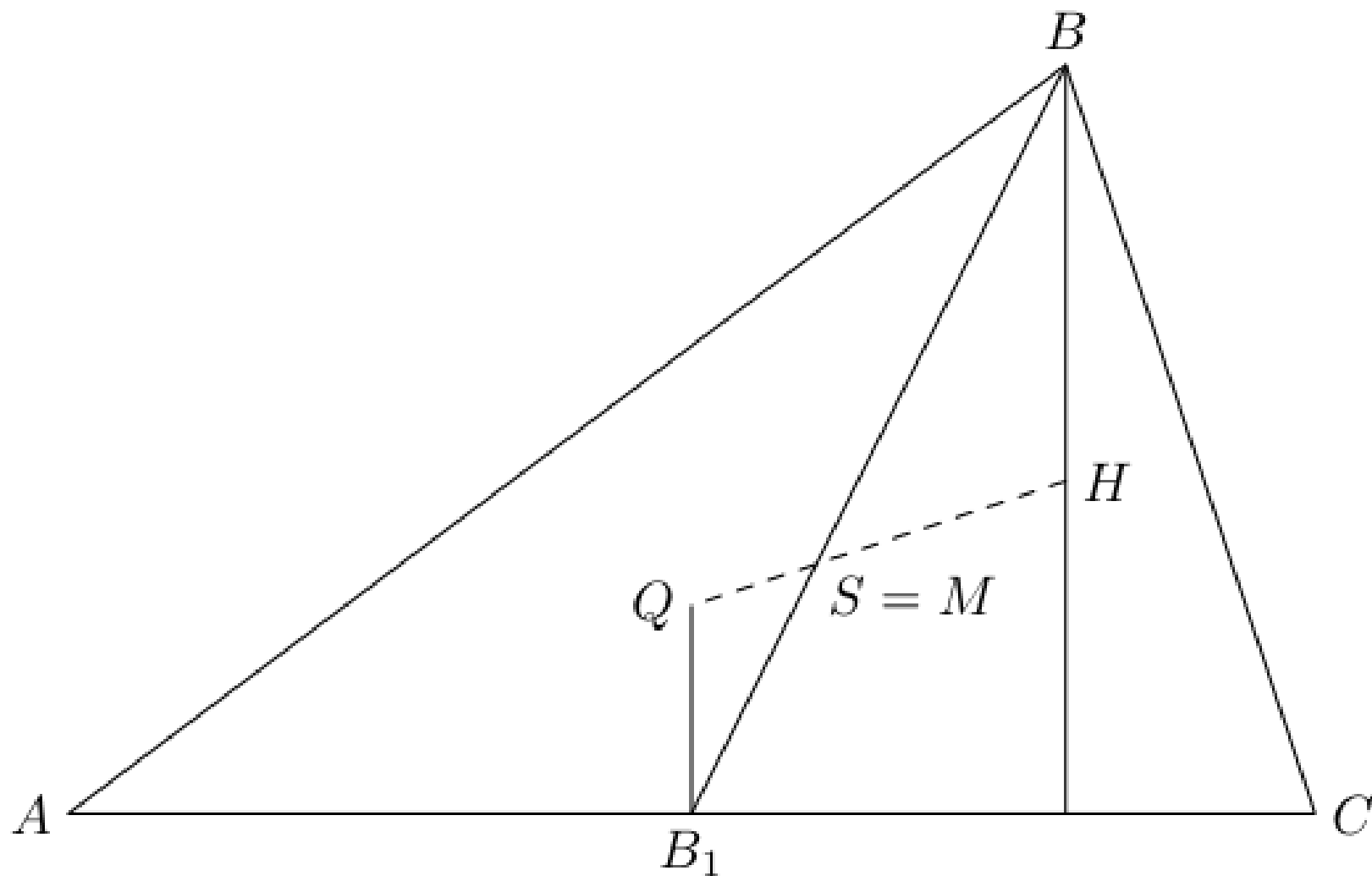
Figur 2.24
(Sida 93)



Figur 2.25
(Sida 94)

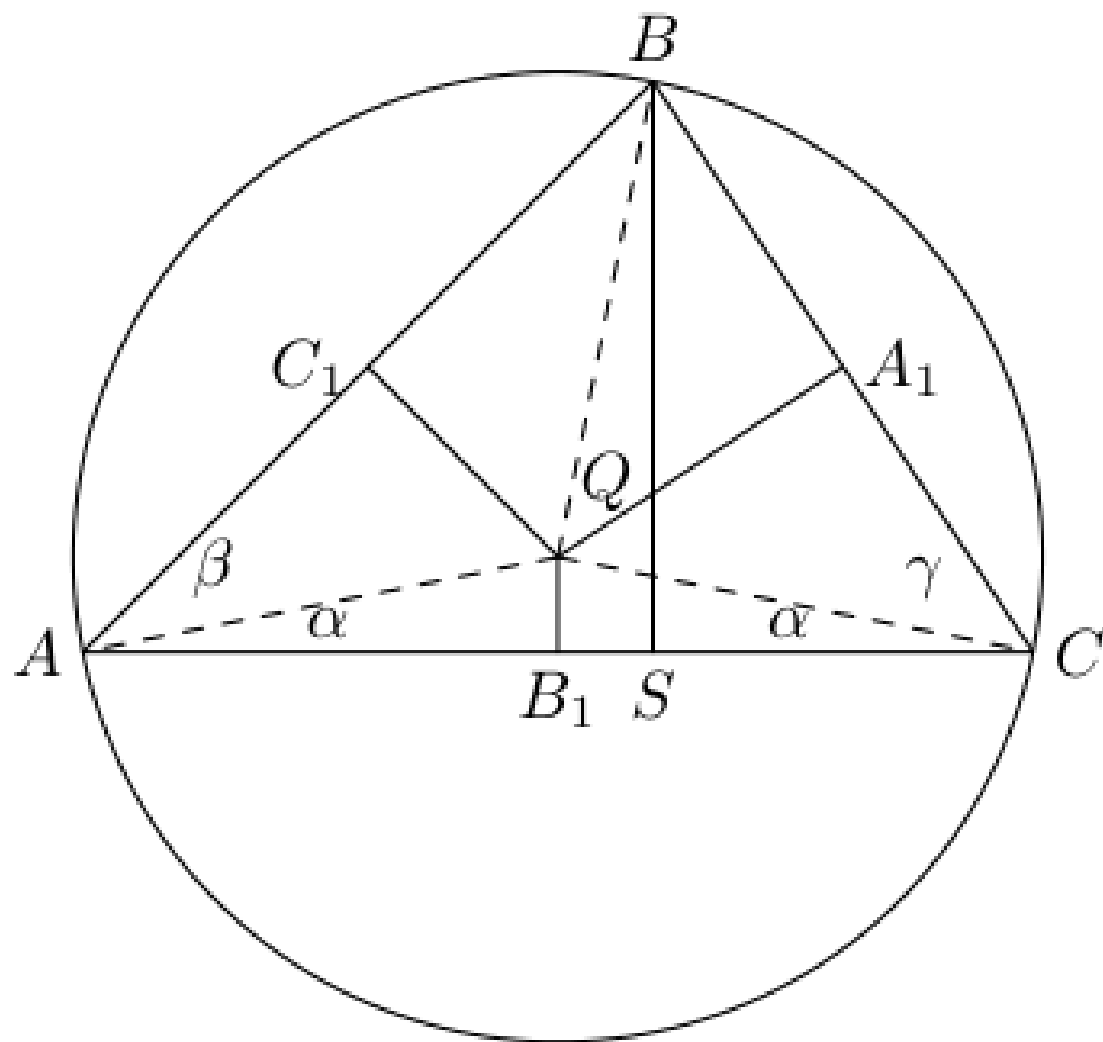


Figur 2.26
(Sida 95)

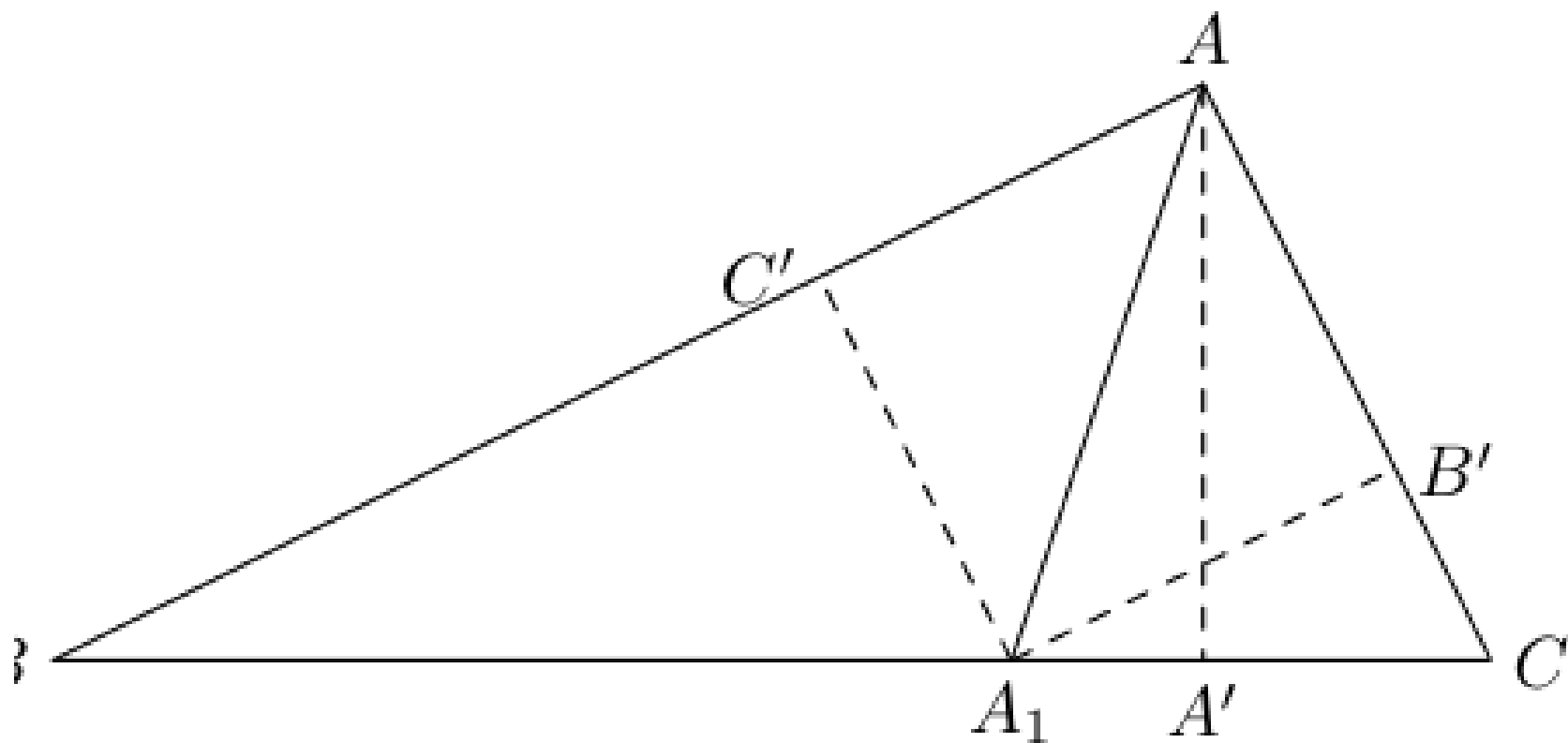


Figur 2.27 Den streckade linjen är Eulers linje.

(Sida 96)

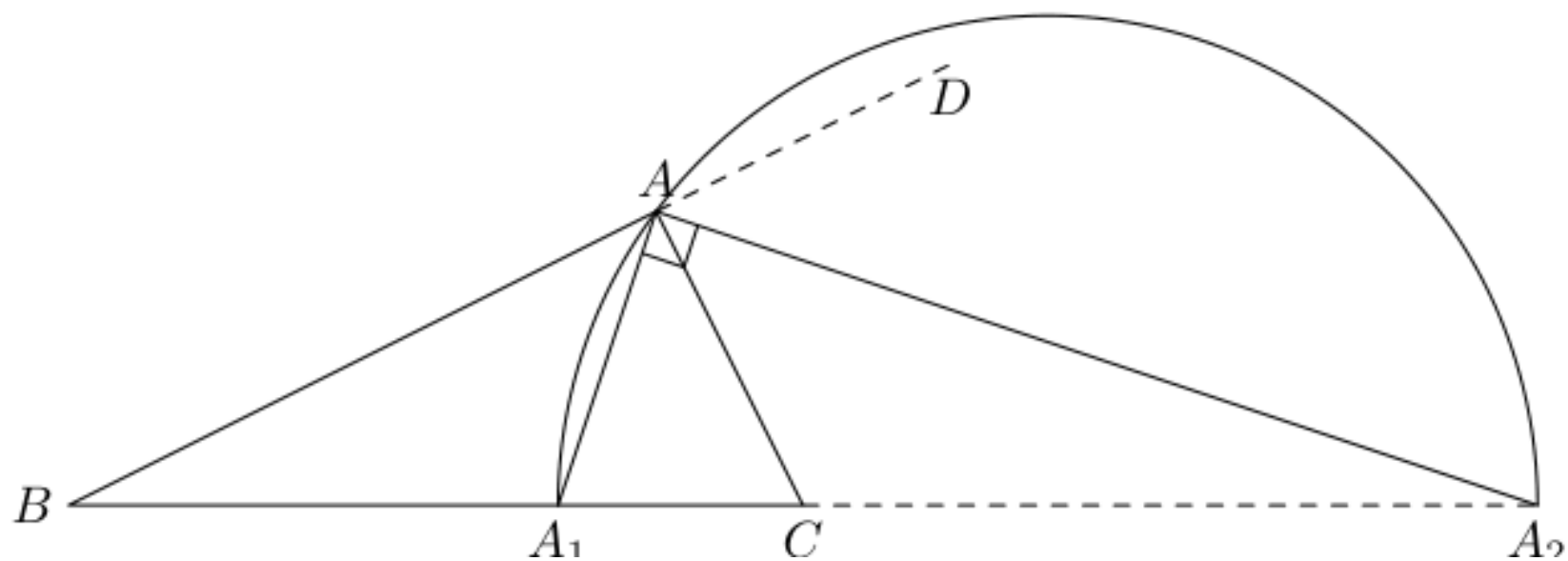


Figur 2.28
(Sida 97)

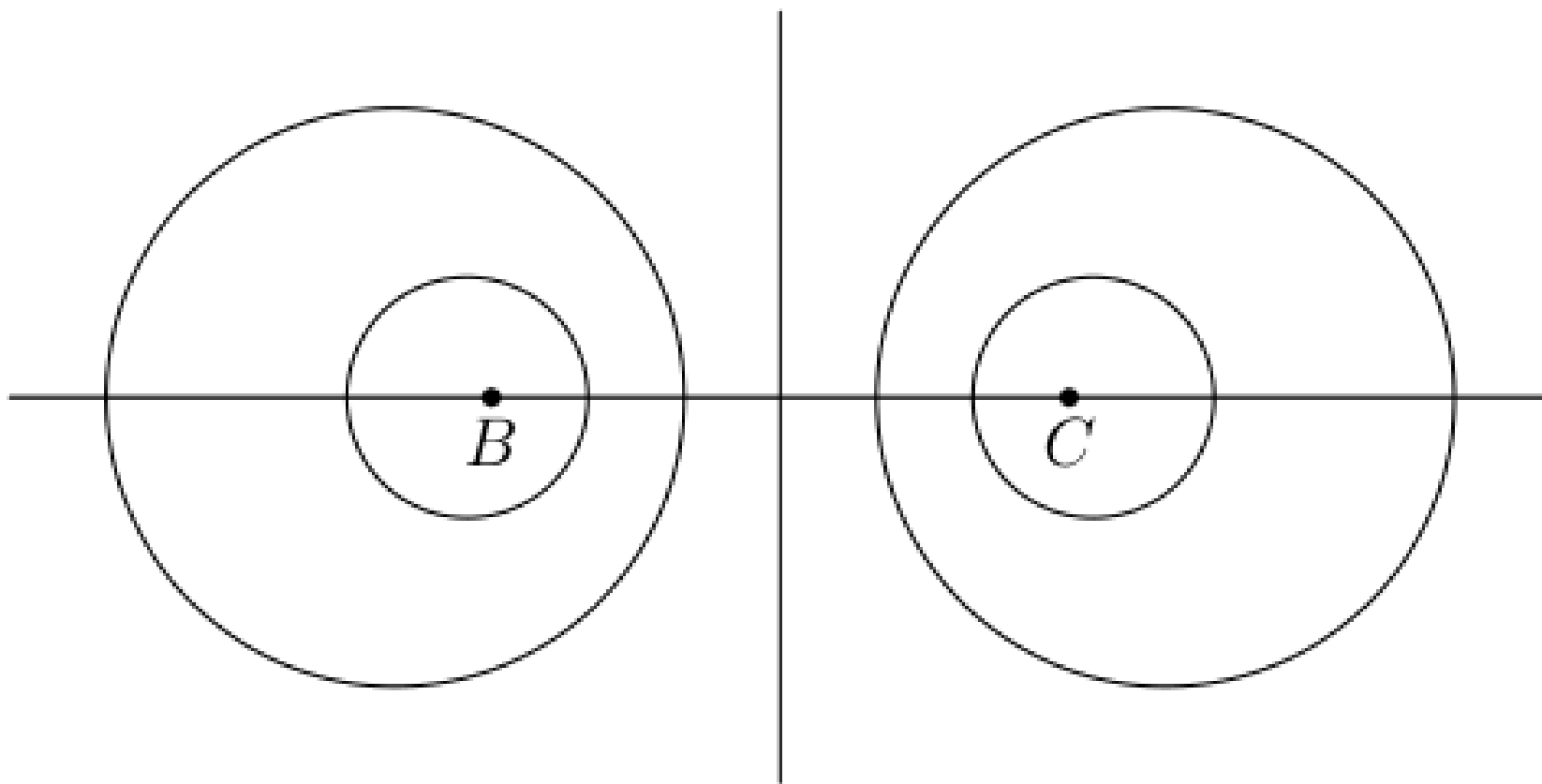


Figur 2.29
(Sida 99)

$k.$

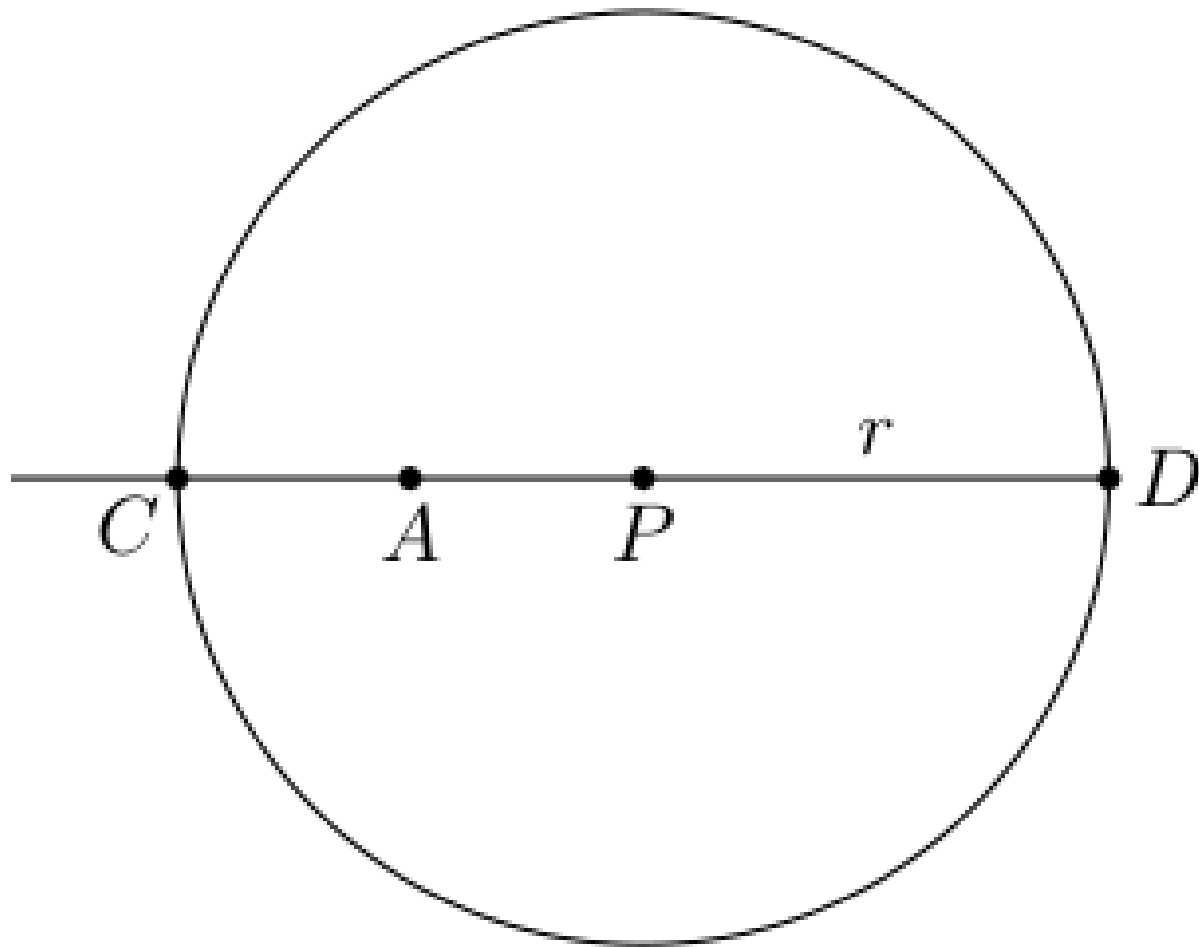


Figur 2.30 Eftersom vinkeln vid A är rät så ligger A på en cirkel med diametern A_1A_2 . Vi har ritat ut
(Sida 100)

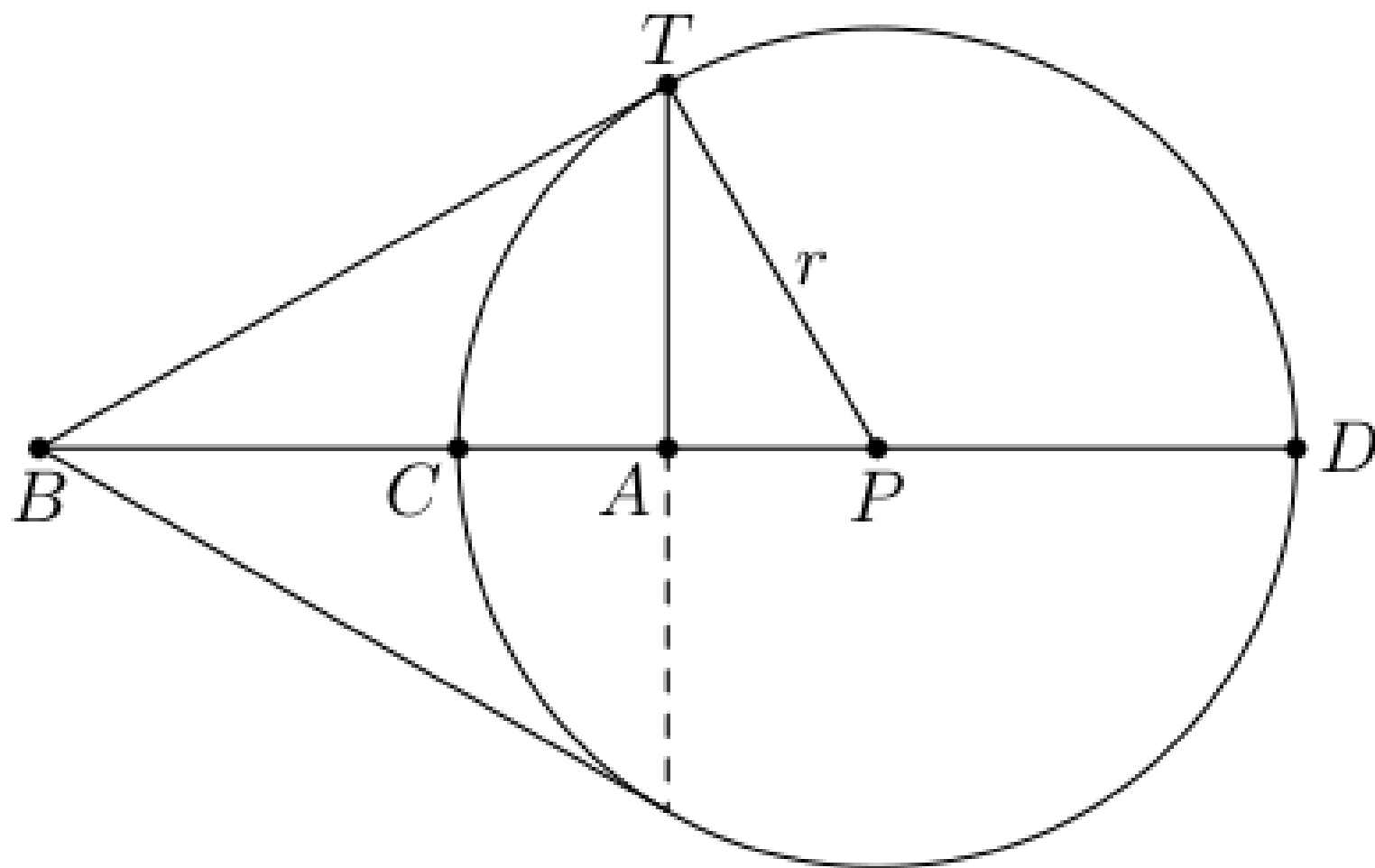


Figur 2.31
(Sida 101)

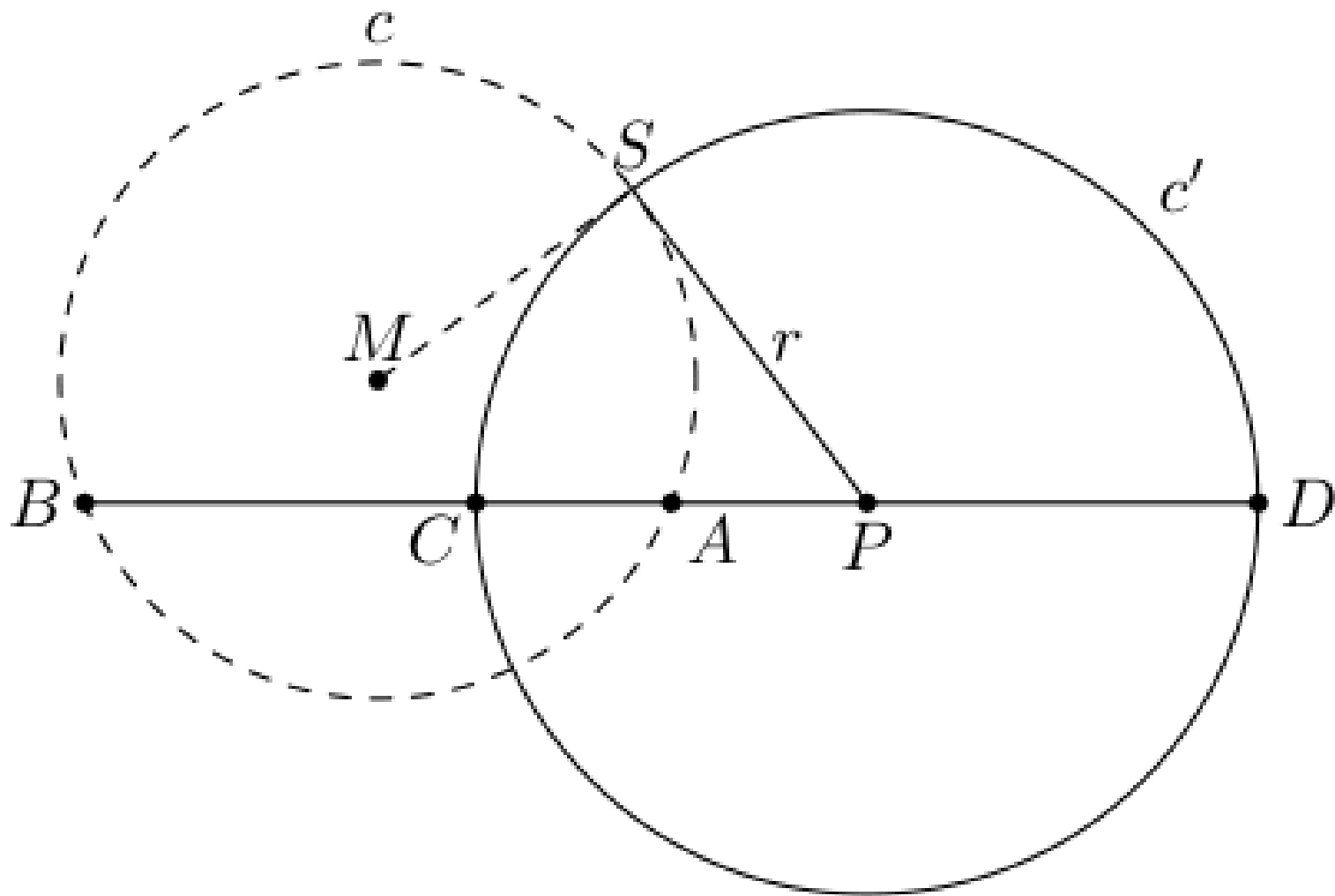
kallas *harmoniska punktpar*. Likhet



Figur 2.32 Cirkeln genom C och D är harmonisk cirkel till punkterna A och B. Dess medelpunkt är P och
(Sida 102)

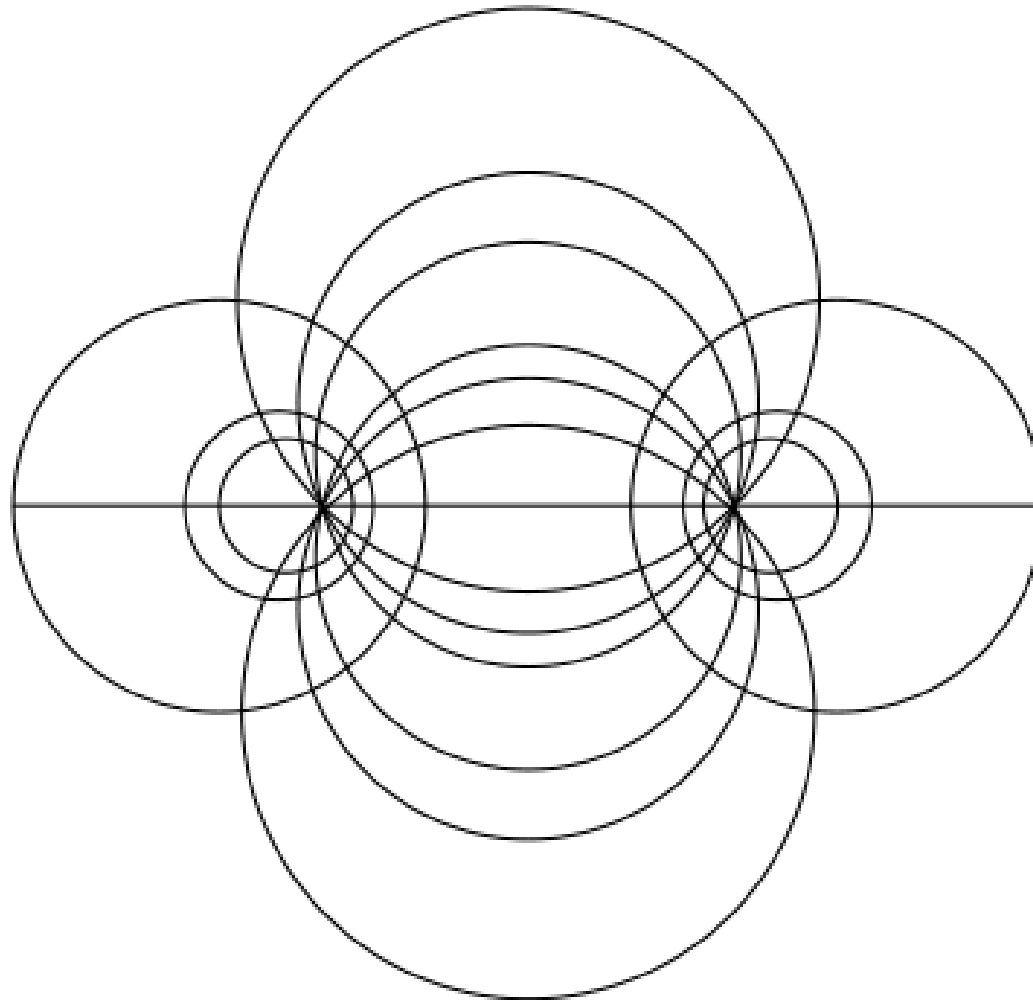


Figur 2.33 Sträckan AP är x och sträckan BP är y .



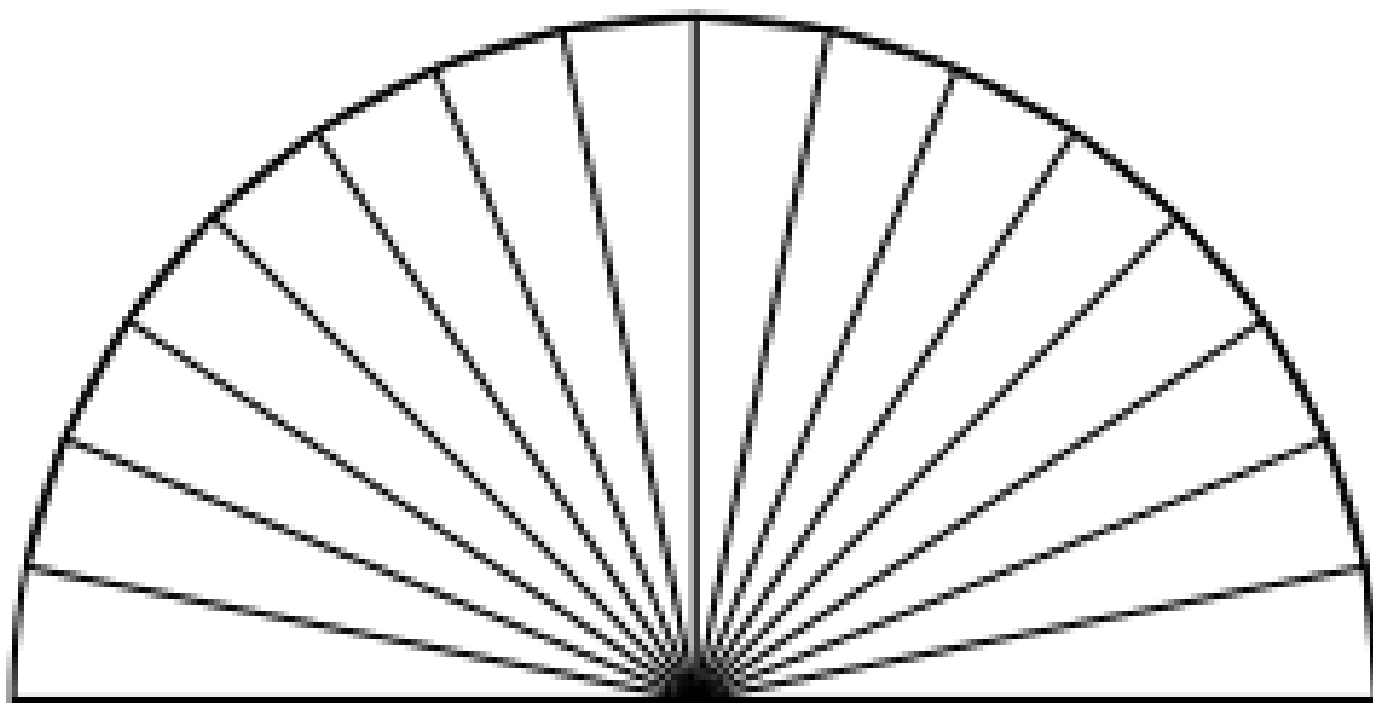
Figur 2.34 Den streckade cirkeln genom A och B och med medelpunkten M är ortogonal mot den harmoniska
(Sida 104)

figur 2.35 visas två ortogonala cirkelknippen.

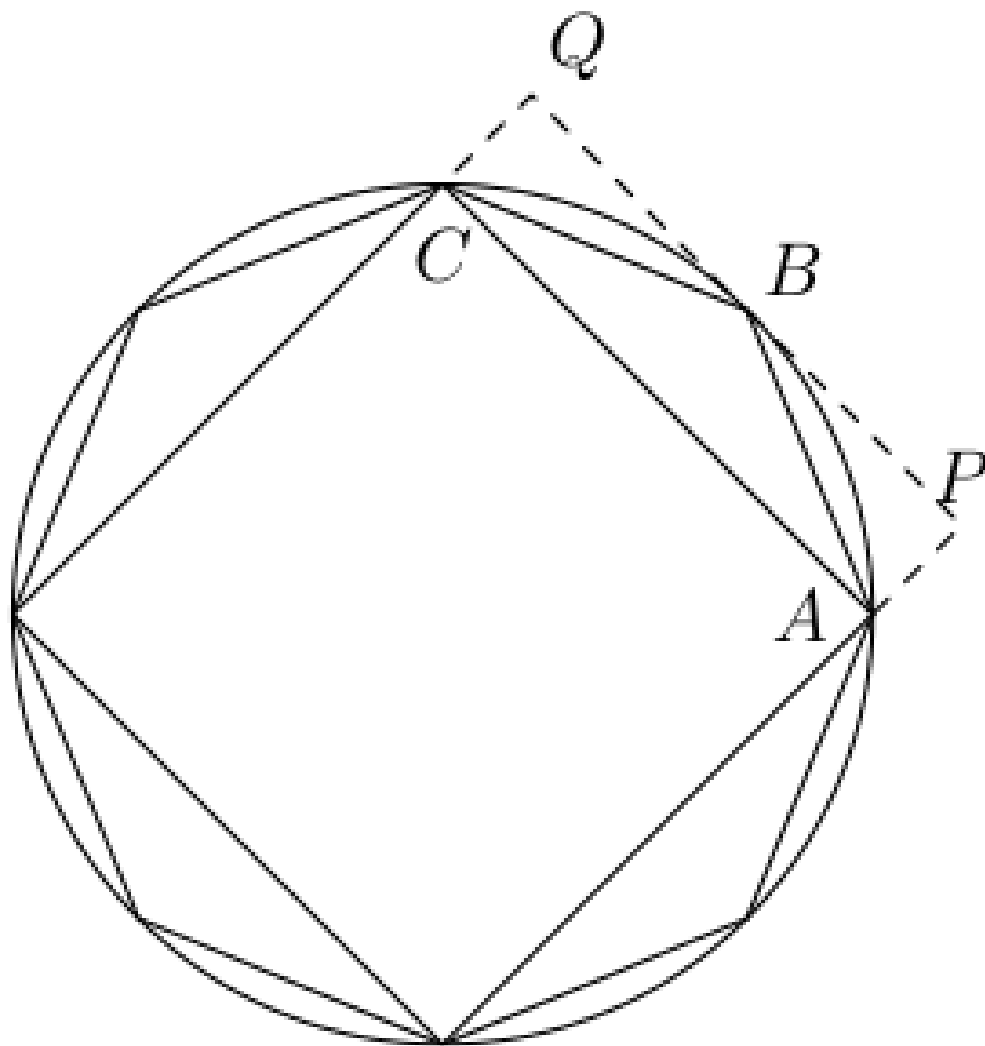


Figur 2.35 Figuren visar två ortogonala cirkelknippen.

h det passar inte in i *Elementa*.

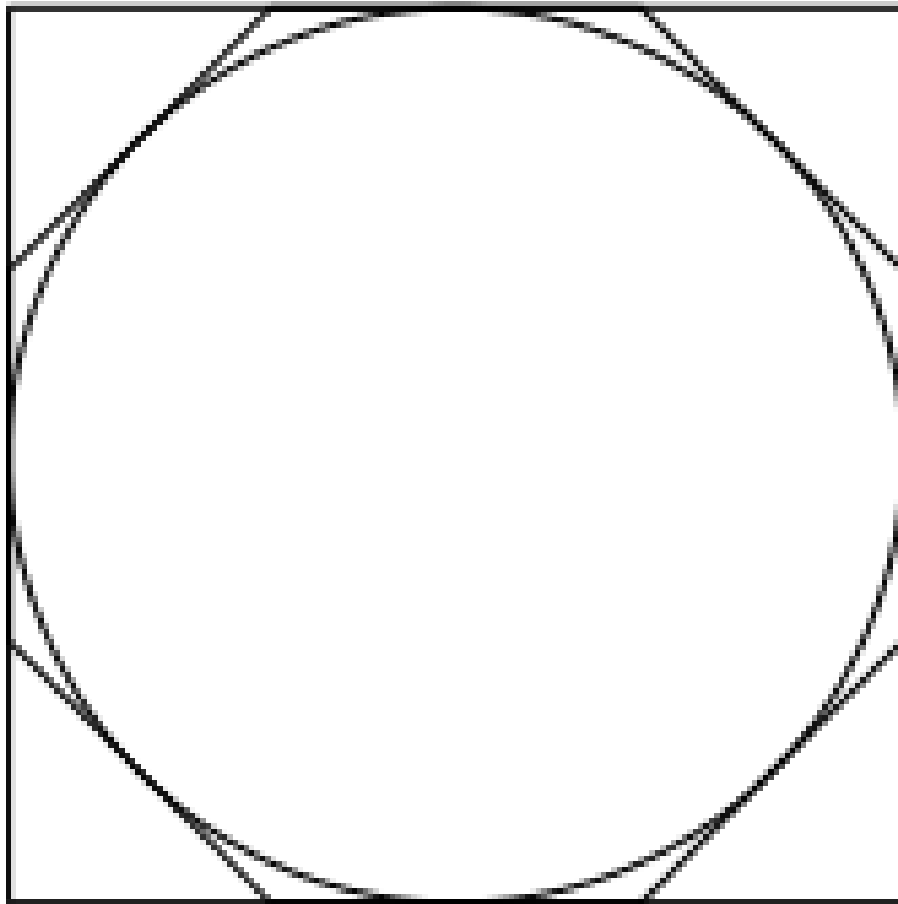


Figur 2.36 Figuren visar en halv regelbunden 32-hörning som "nästan" sammanfaller med en halvcirke
(Sida 106)



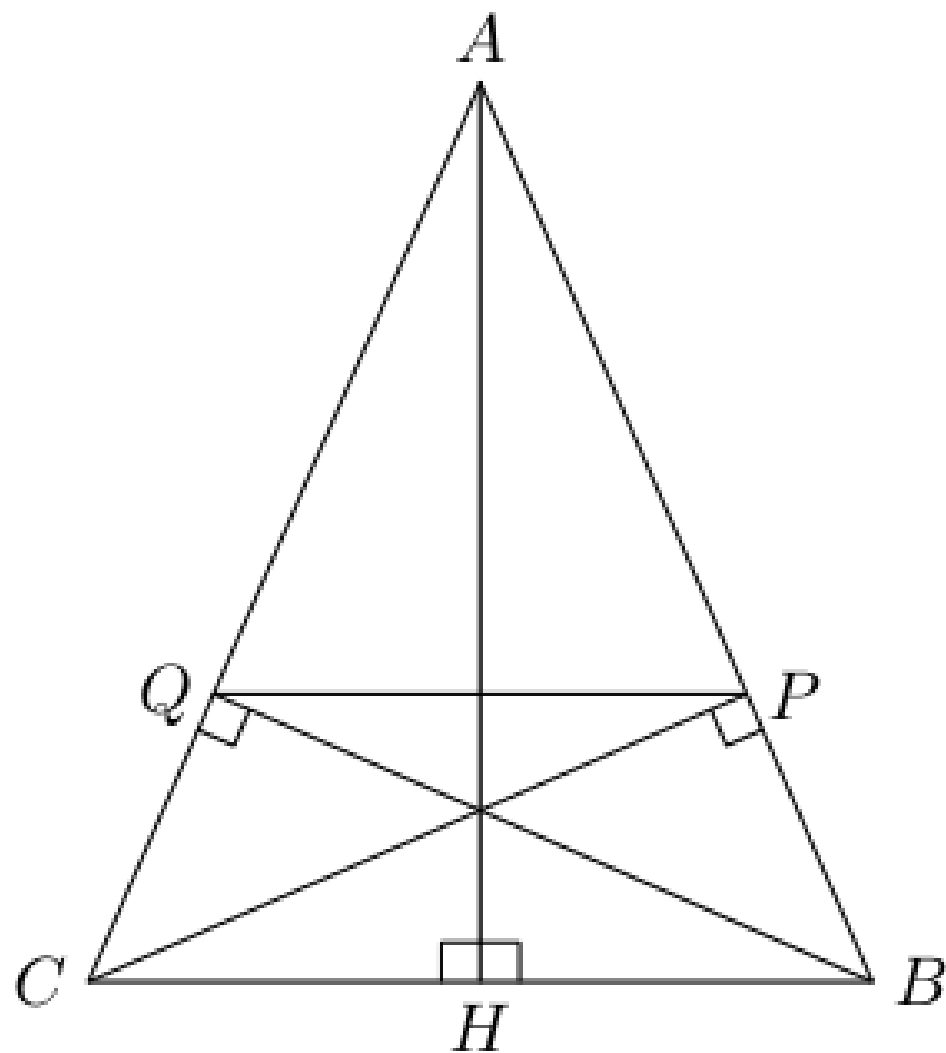
Figur 2.37 När vi övergår från en fyrhörning till en åttahörning kommer skillnaden mellan cirkeln och
(Sida 108)

Attahörnin $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$



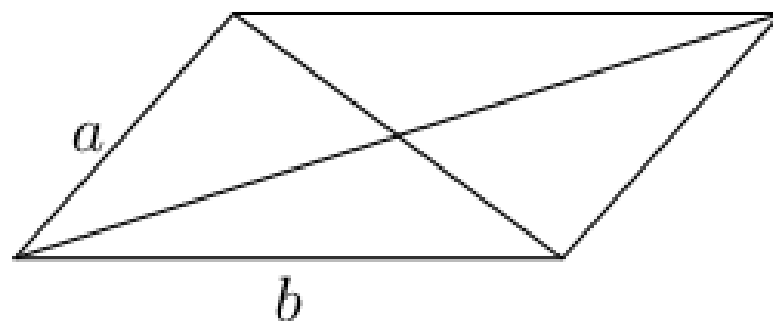
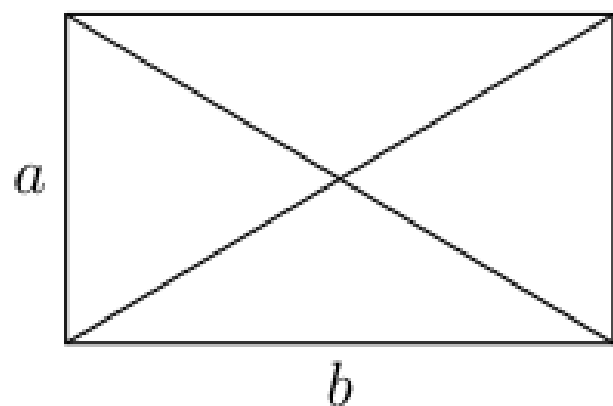
Figur 2.38 I figuren visas en omskriven regelbunden fyrhörning och en omskrivenregelbunden åttahörnin

(Sida 108)



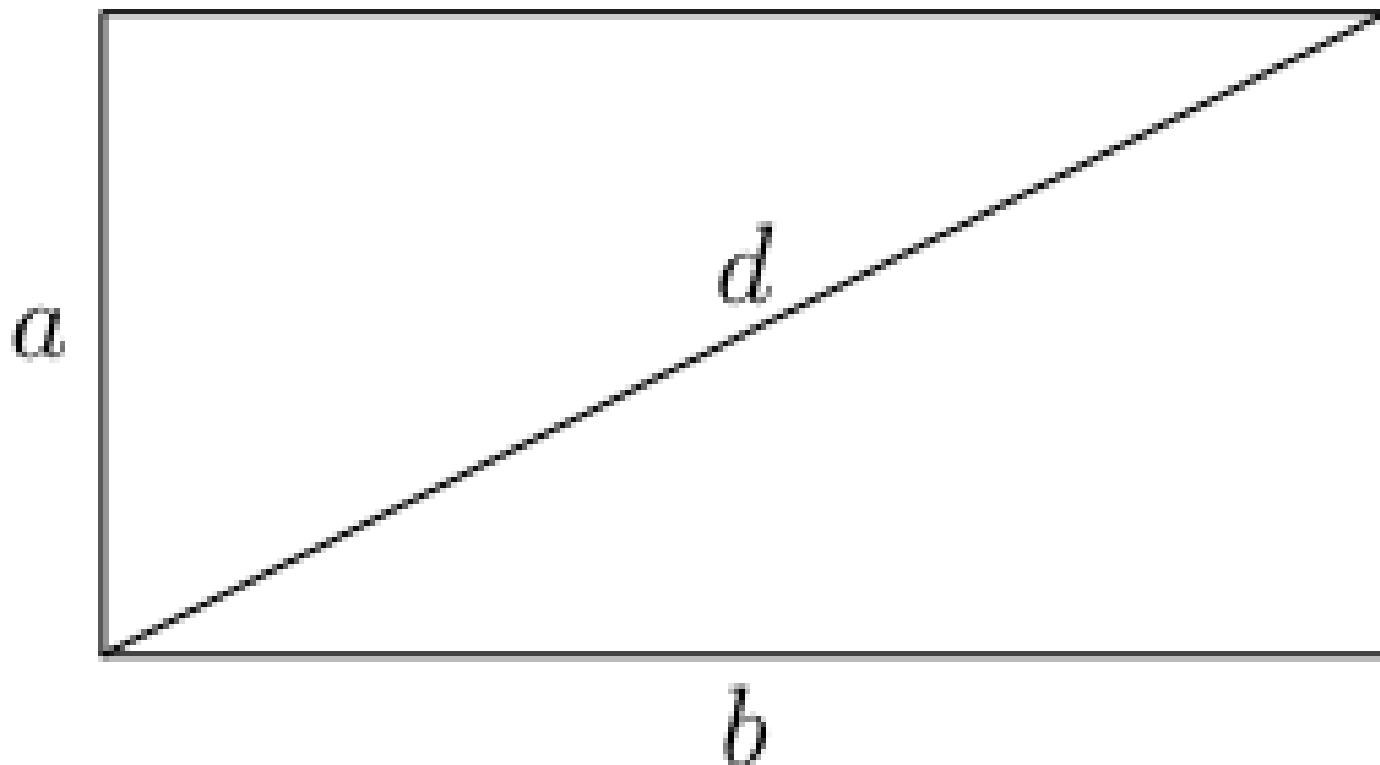
Figur 3.1
(Sida 115)

e lika långa. Om sidorna och en av diagonalerna är givna så är

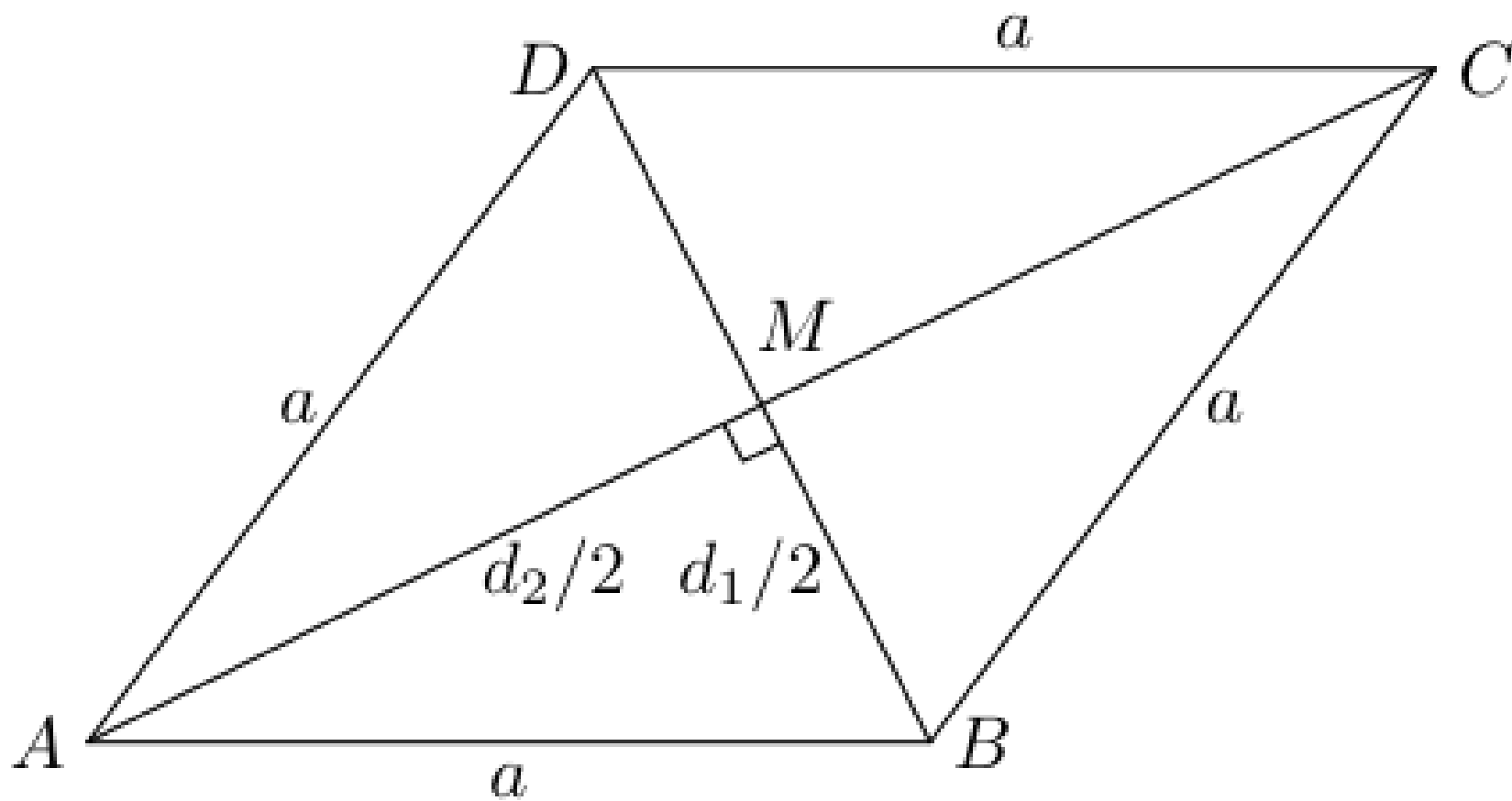


Figur 3.2
(Sida 117)

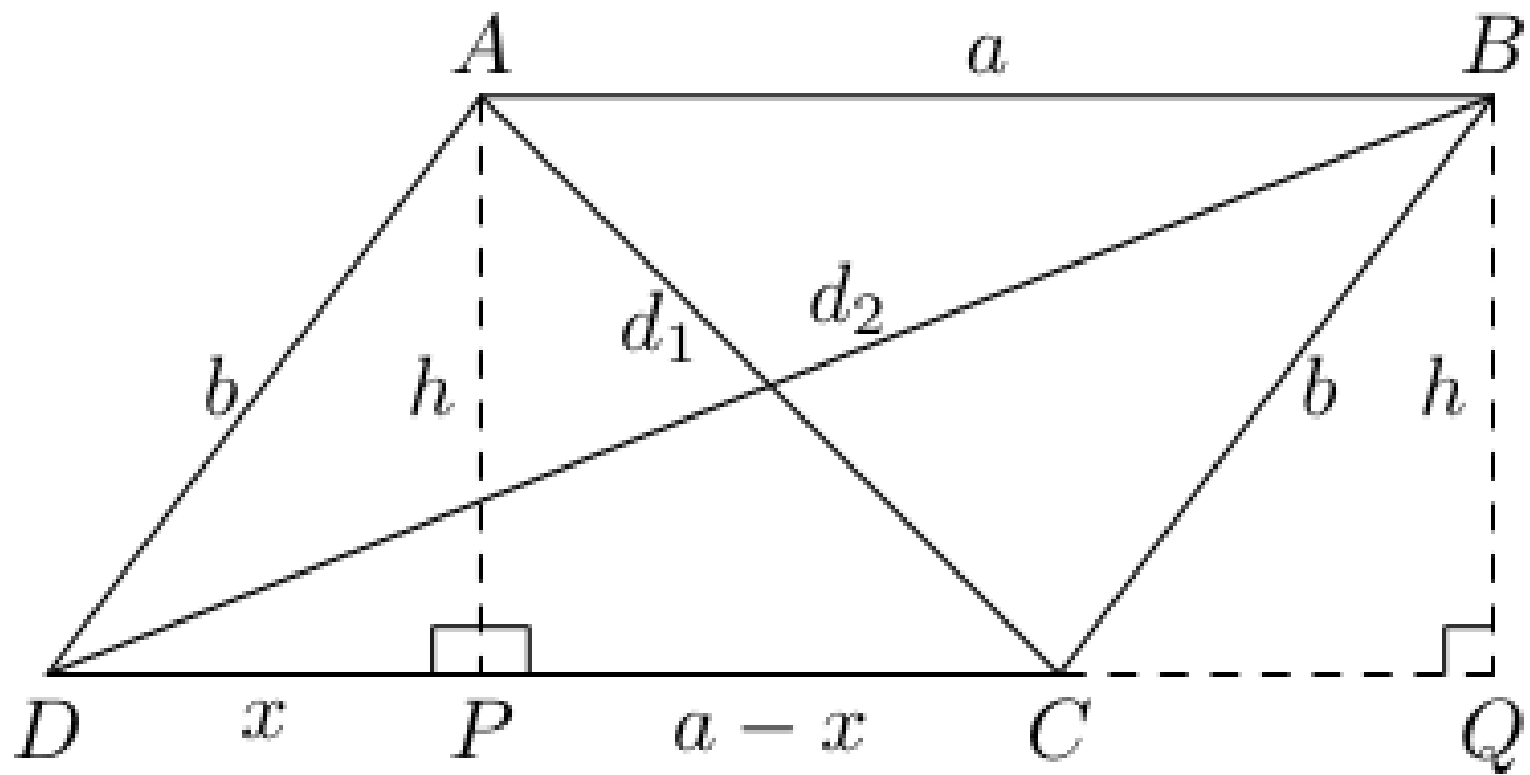
$d_2 = d$ och Pythagoras sats ger



Figur 3.3
(Sida 118)

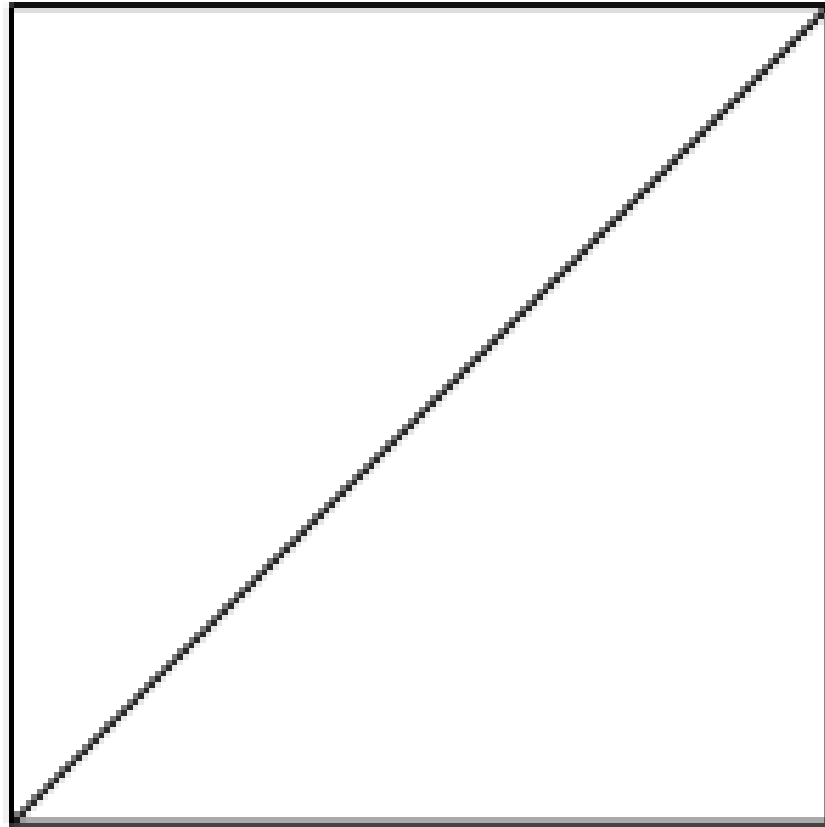


Figur 3.4
(Sida 118)



Figur 3.5
(Sida 119)

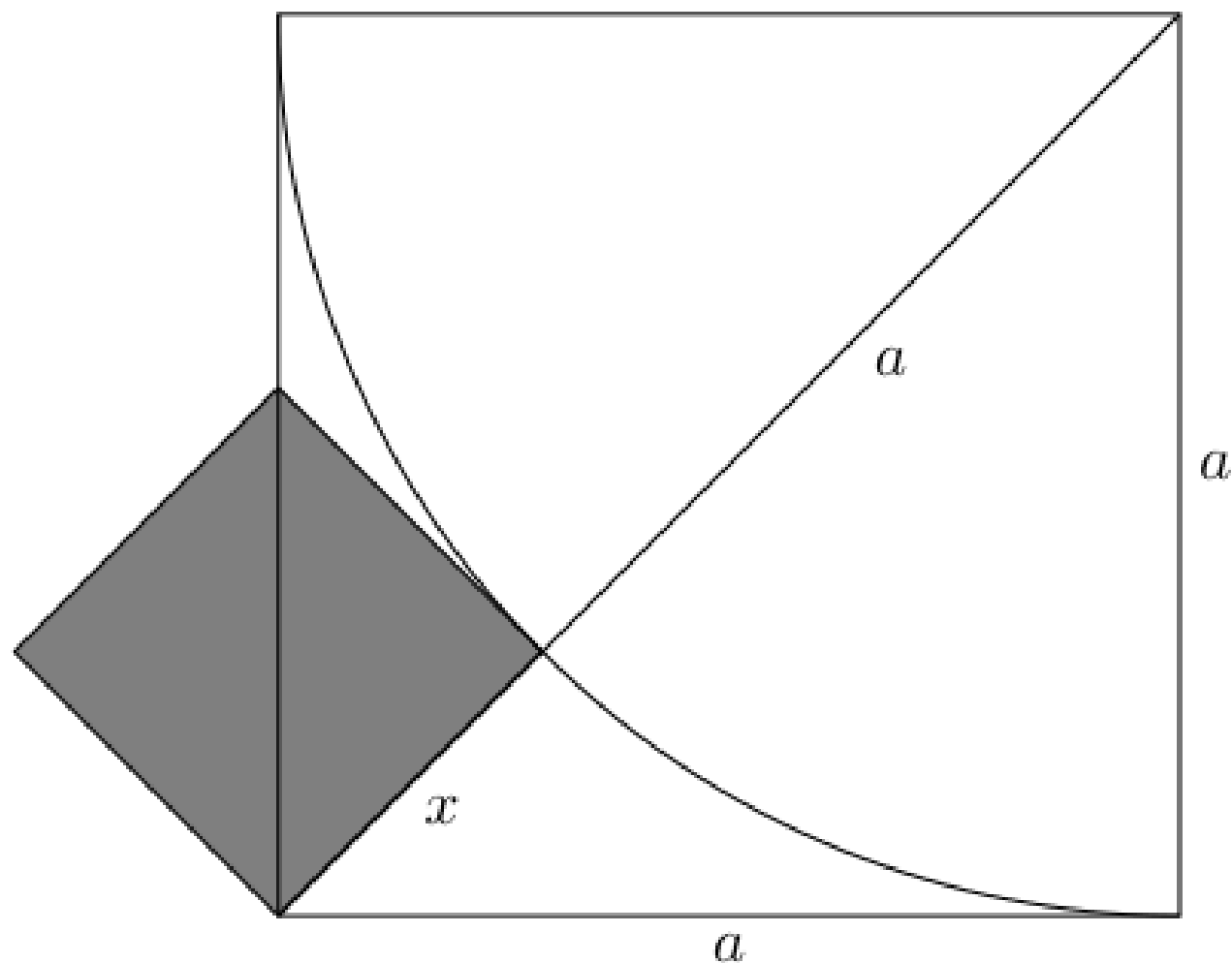
2.6.6 KONSTRUKTIONSPRODIE.



Figur 3.6 Den givna sträckan ses till vänster och den sökta kvadraten till höger.

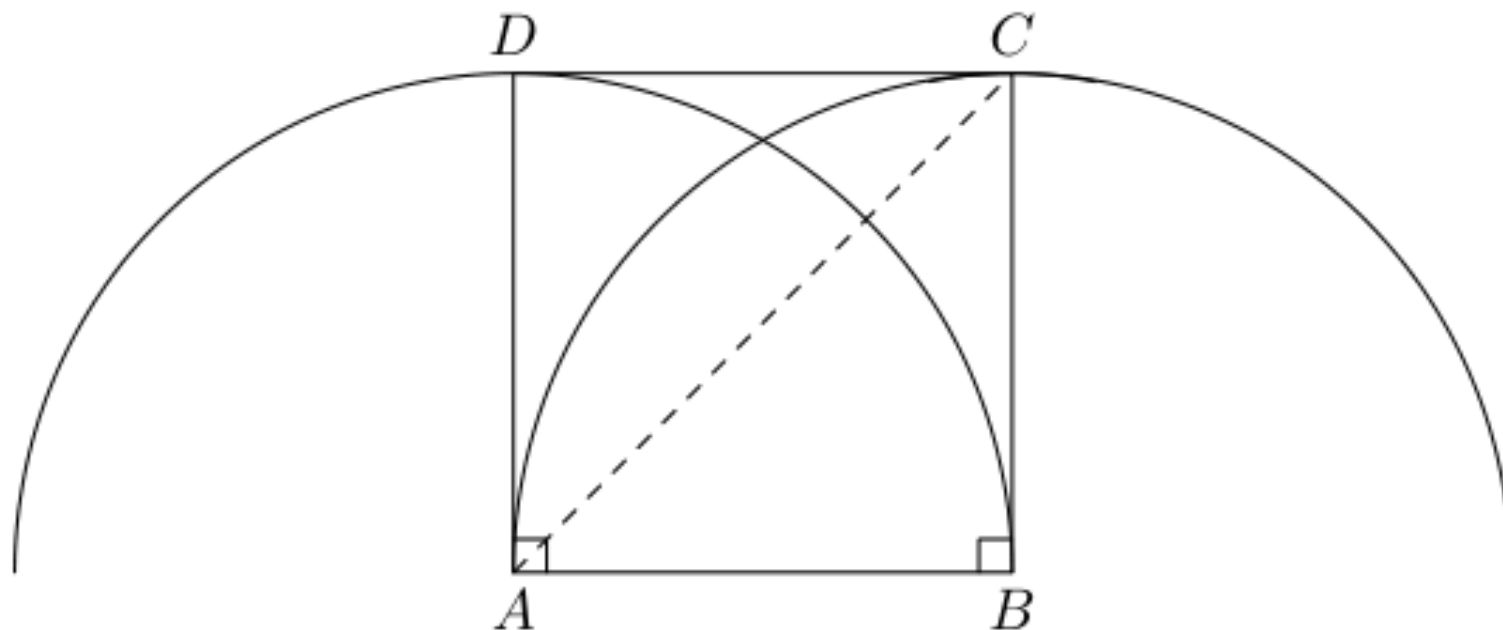
(Sida 121)

Geometri – ett område för problemlösning

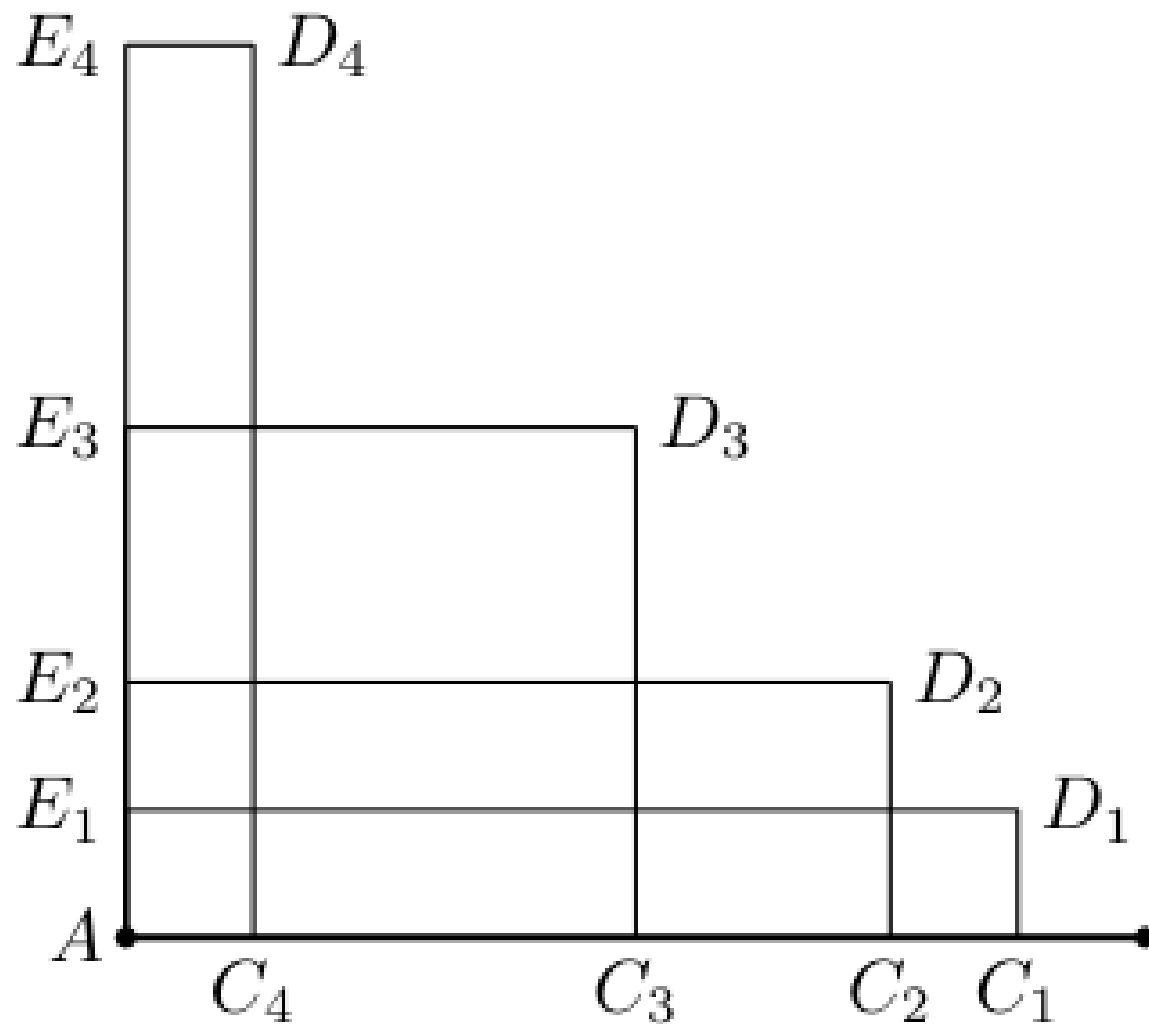


Figur 3.7 Den sökta kvadraten är skuggad.

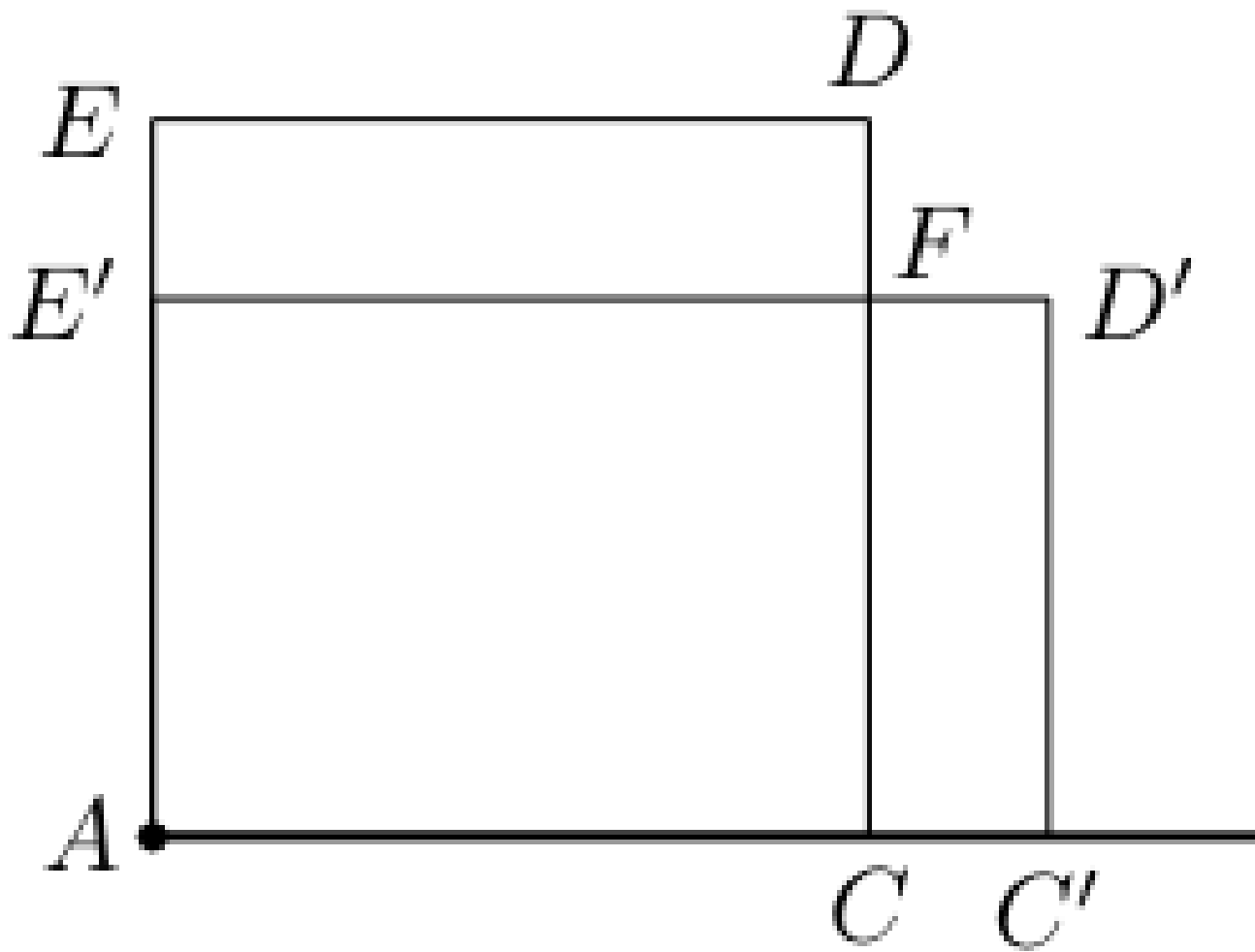
(Sida 122)



Figur 3.8 Triangeln ABC är enligt konstruktionen likbent och rätvinklig. Vinkeln CAB är då 45° . Då är
(Sida 122)



Figur 3.9 I figuren har vi ritat fyra rektanglar, som alla har halva omkretsen likamed sträckan AB . K

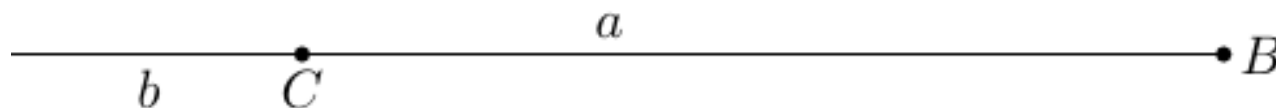


Figur 3.10
(Sida 124)

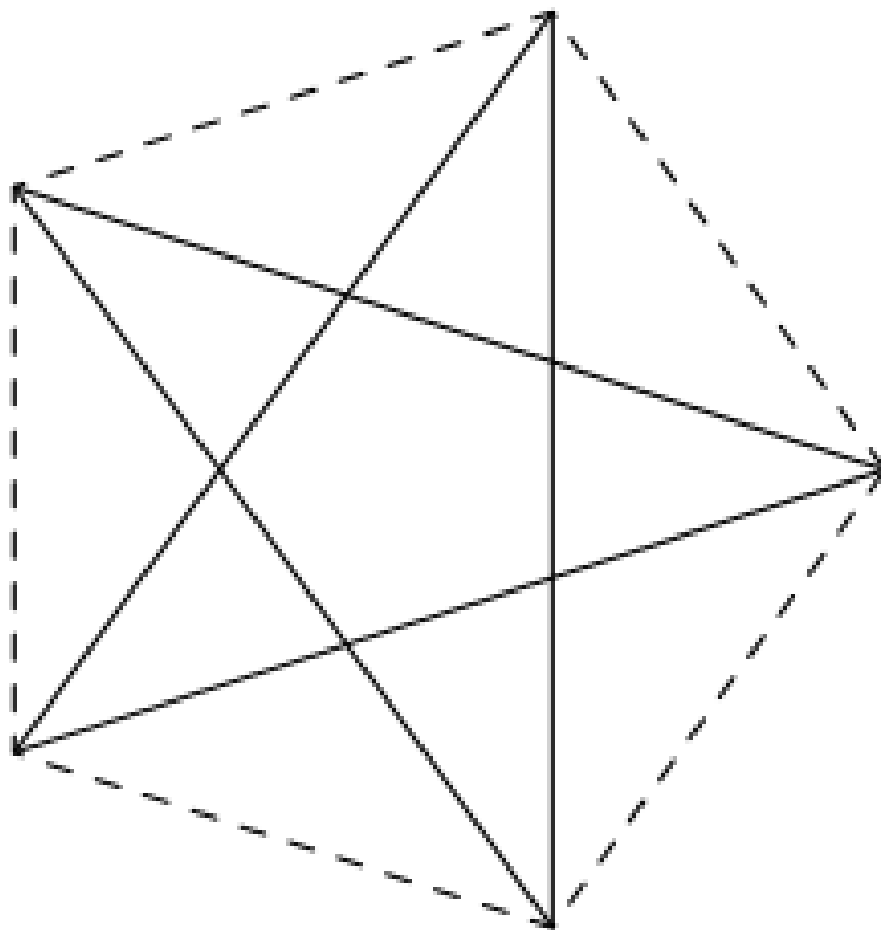
3.5 Ett optimeringsproblem

måste $FD = FD'$. Vi jämför de båda rektanglarna $E'FDE$ och $F'D'E'$ och observerar att sidorna FD och FD' är lika stora. Men $DE = CD > FC = D'C'$ så måste arean av $E'FDE$ vara större än arean av $F'D'E'$ och härav följer att kvadraten $ACDE$ har större area än rektangeln $AC'D'E'$. Kvadraten har alltså större area än varje rektangel med samma omkrets och vårt påstående är bevisat.

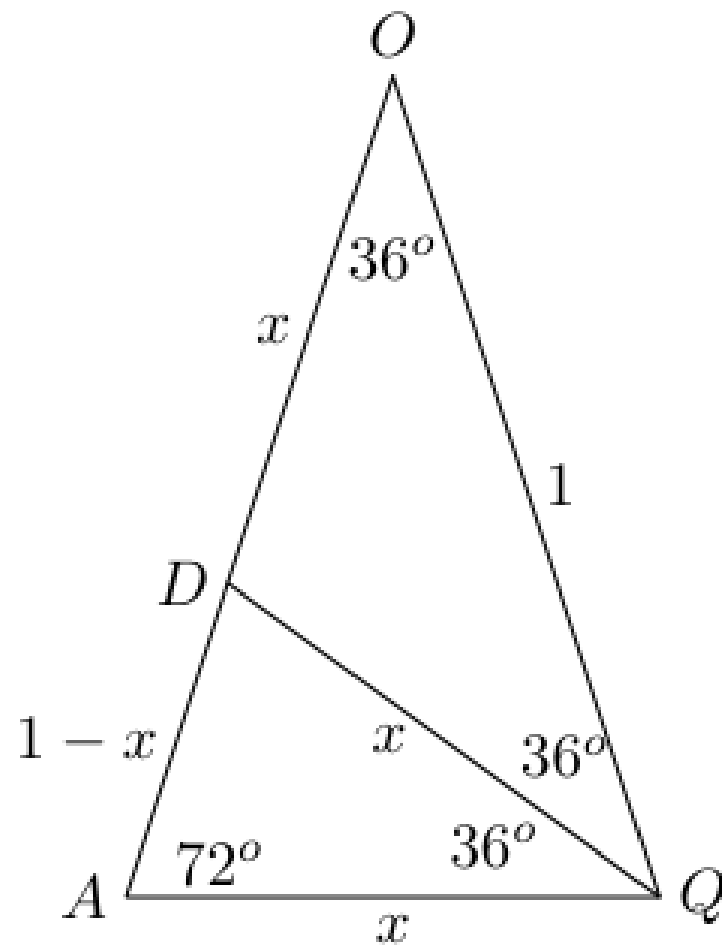
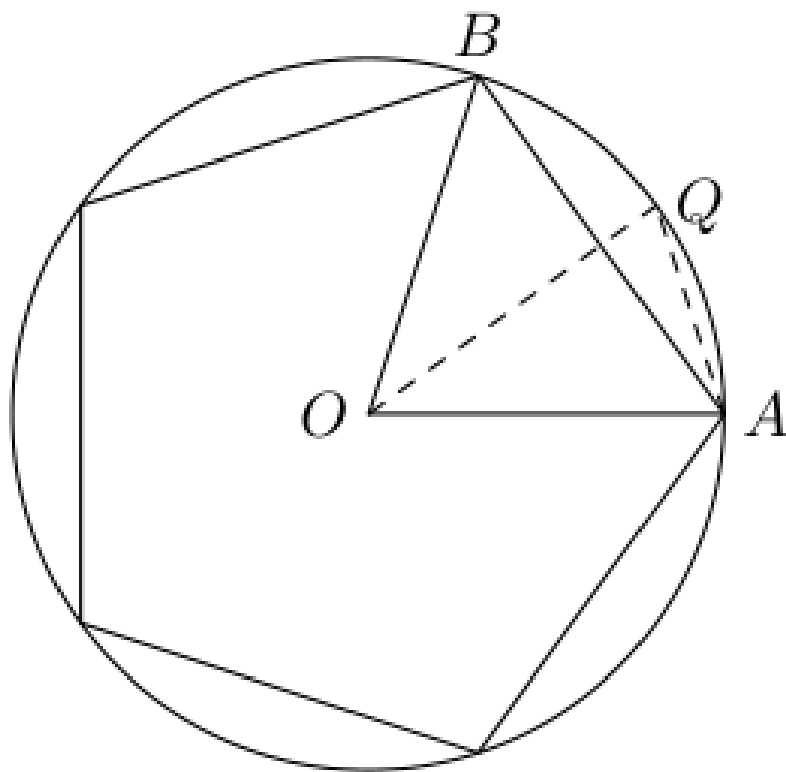
Brevet till den franske teologen och matematikern Marin Mersenne från Pierre Fermat en metod att lösa vårt problem som är principiellt korrekt. Mersenne vidarebefordrar brevet till den franske filosofen René Descartes som fick det 1638. Brevet gav upphov till en polemik mellan matematikerna. Fermats lösning är följande¹



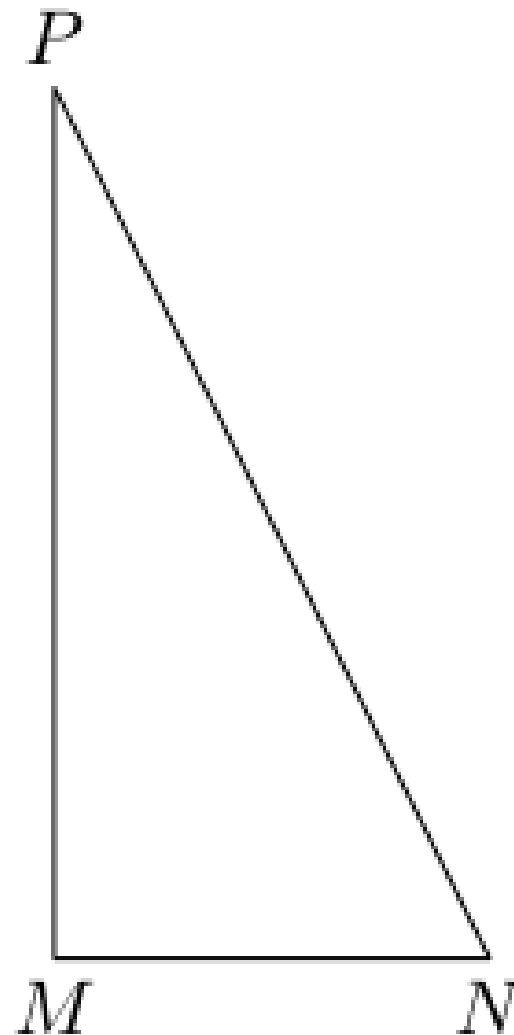
Figur 3.11
(Sida 125)



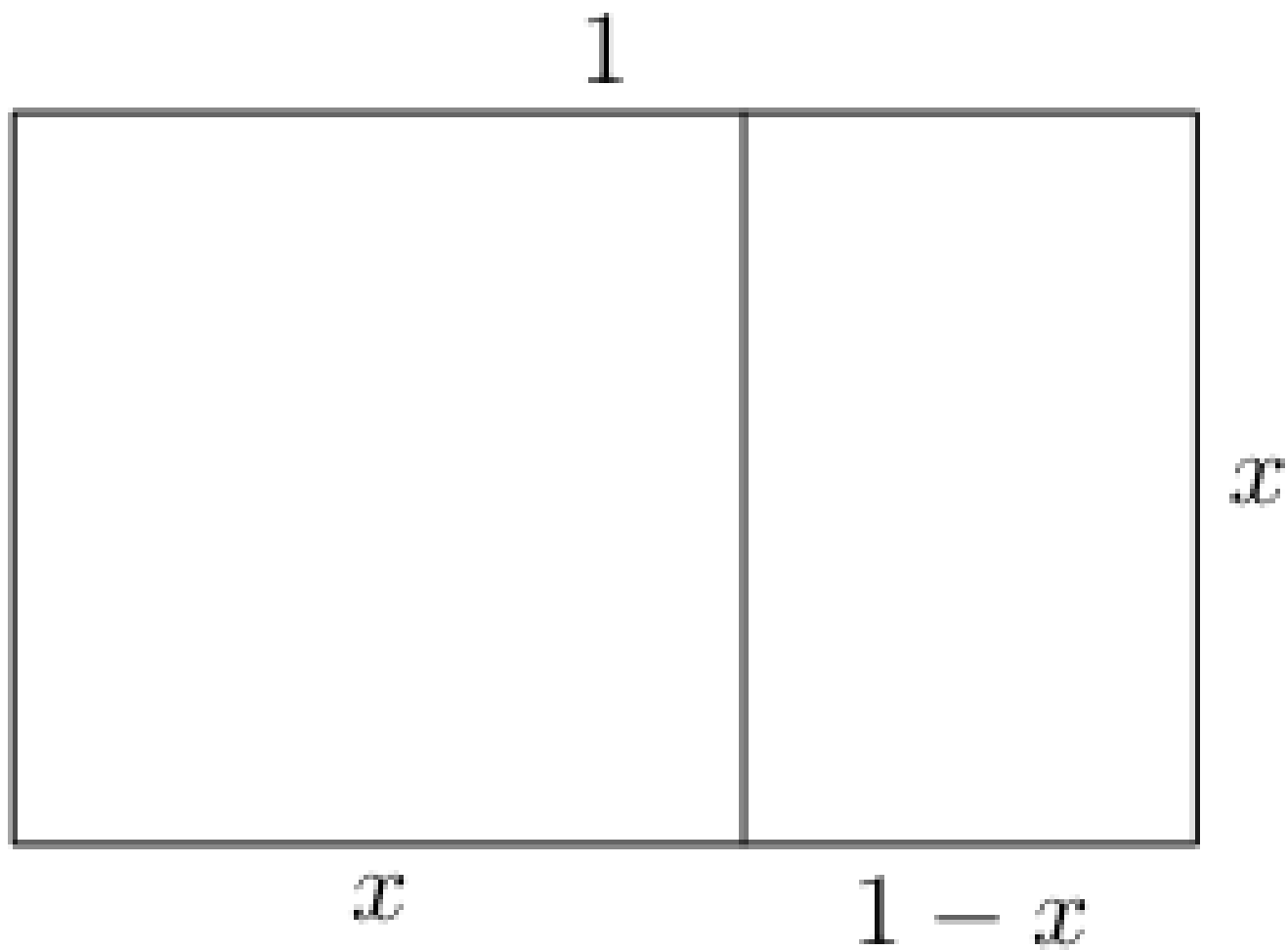
Figur 3.12
(Sida 126)



Figur 3.13 . Eftersom triangeln OAQ är likbent och vinkeln O är 36° så är vinklarna vid basen vardera 72°
(Sida 127)

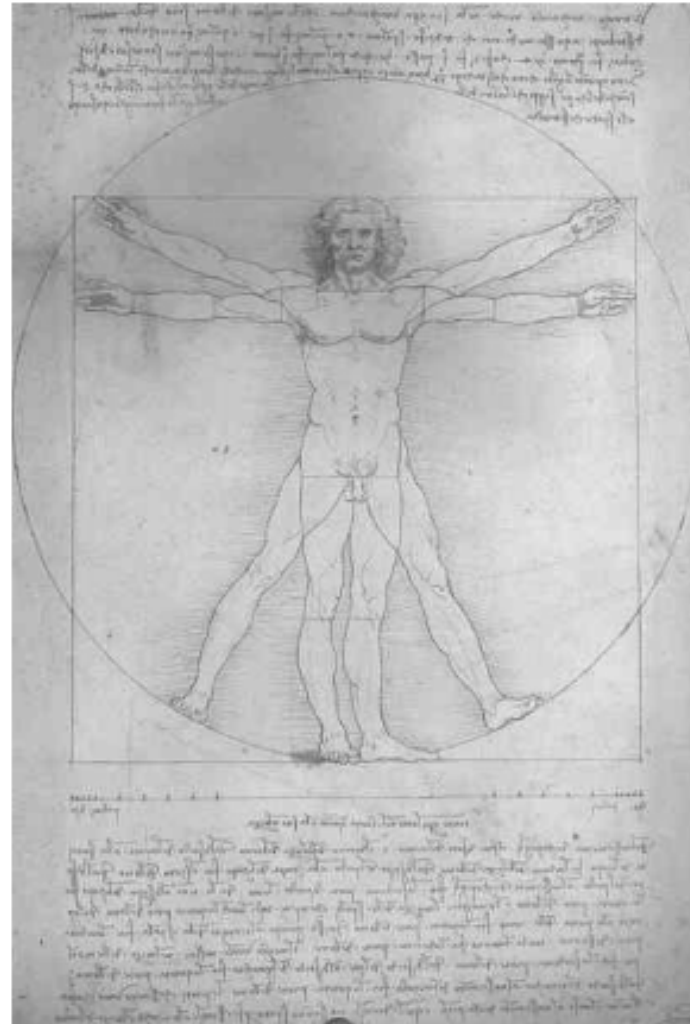


Figur 3.14 Sträckan MN har längden 1. Konstruera en linje genom M vinkelrät mot MN . Konstruera punkten
(Sida 128)

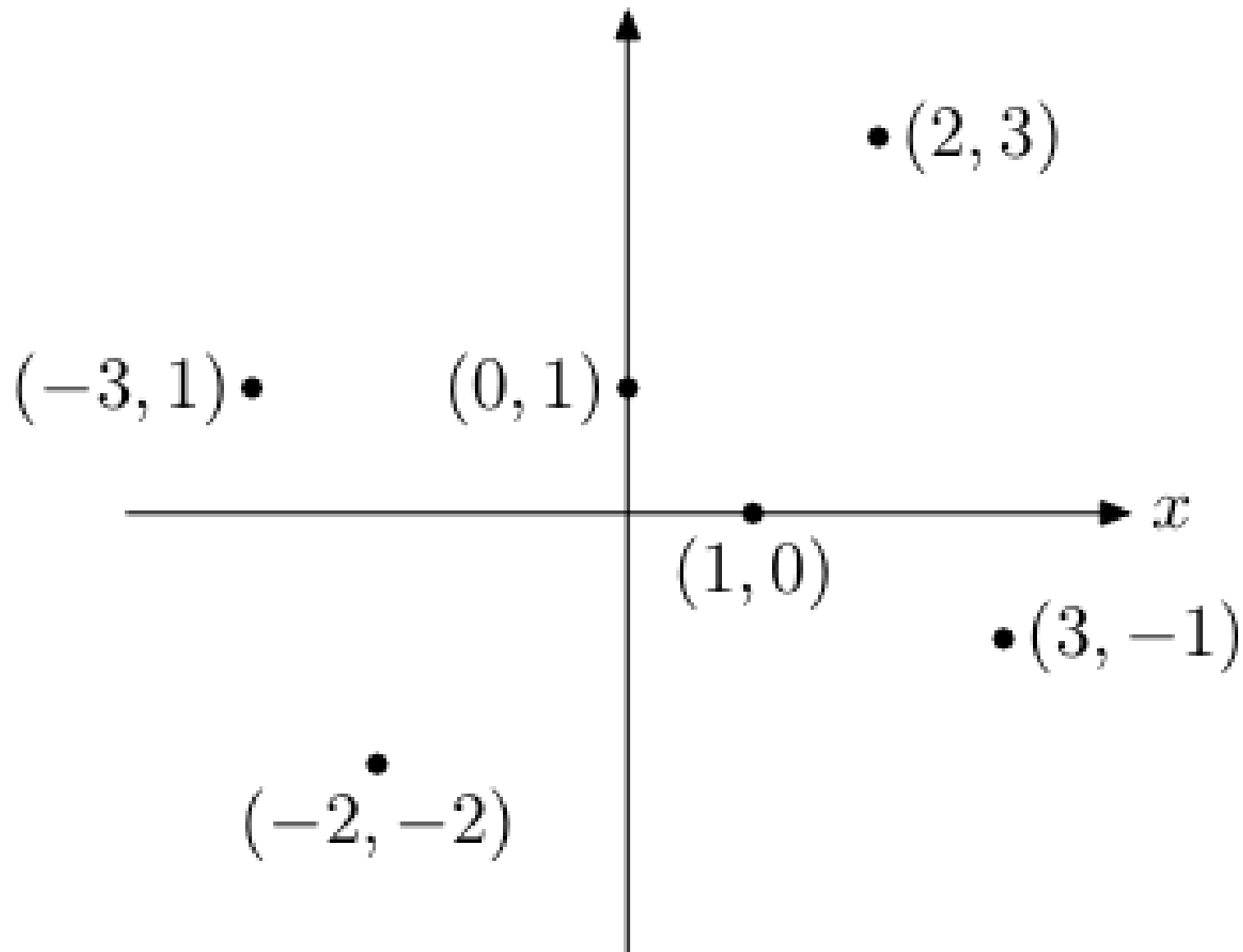


Figur 3.15 Från den stora rektangeln avlägsnas den vänstra delen som är en kvadrat. Den rektangel som
(Sida 129)

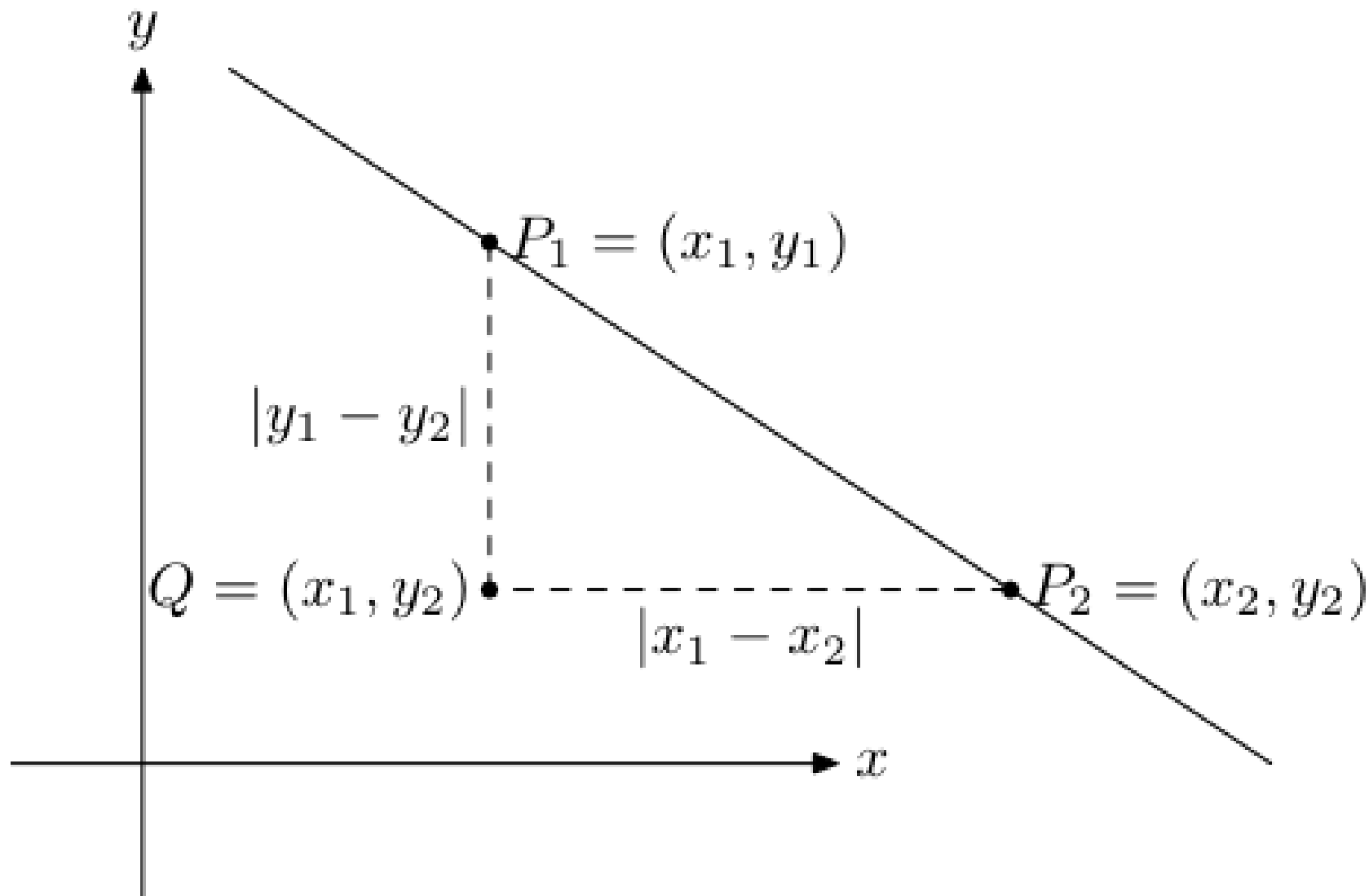
ligger direkt av ekvationen 3.1.



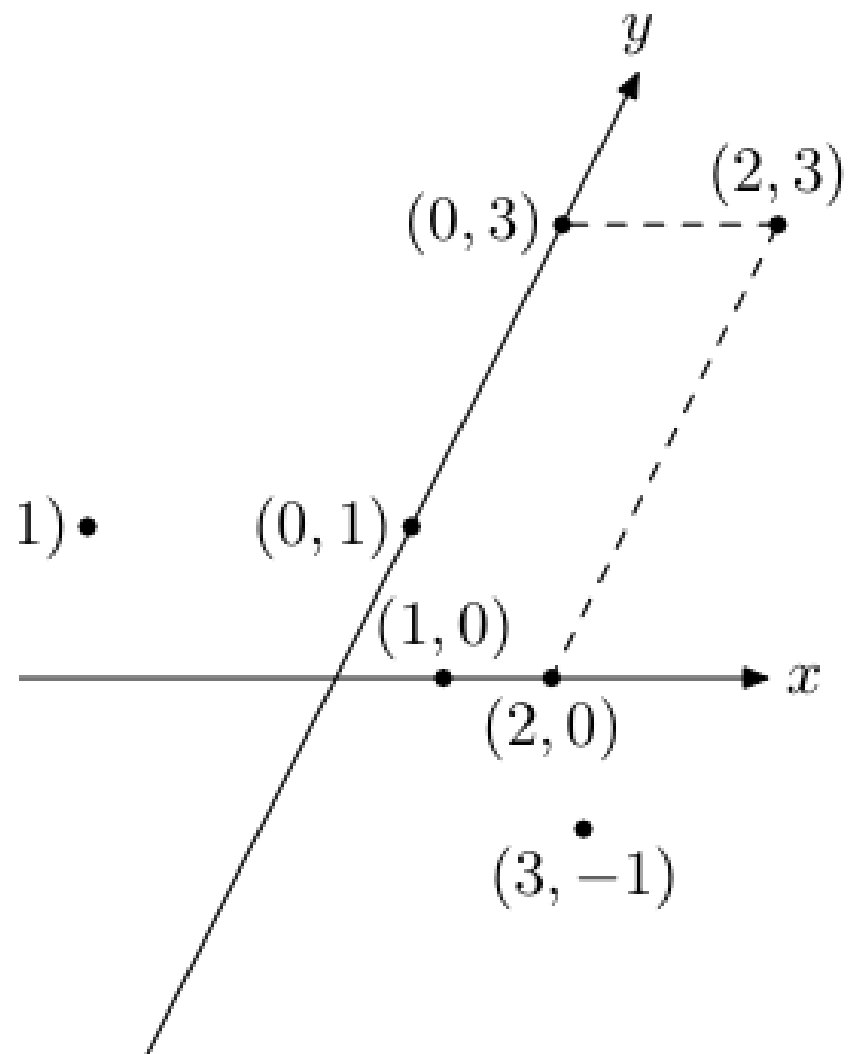
Figur 3.16| detta berömda arbete från 1490 använder sig Leonardo da Vinci av gyllene snittet för att
(Sida 130)



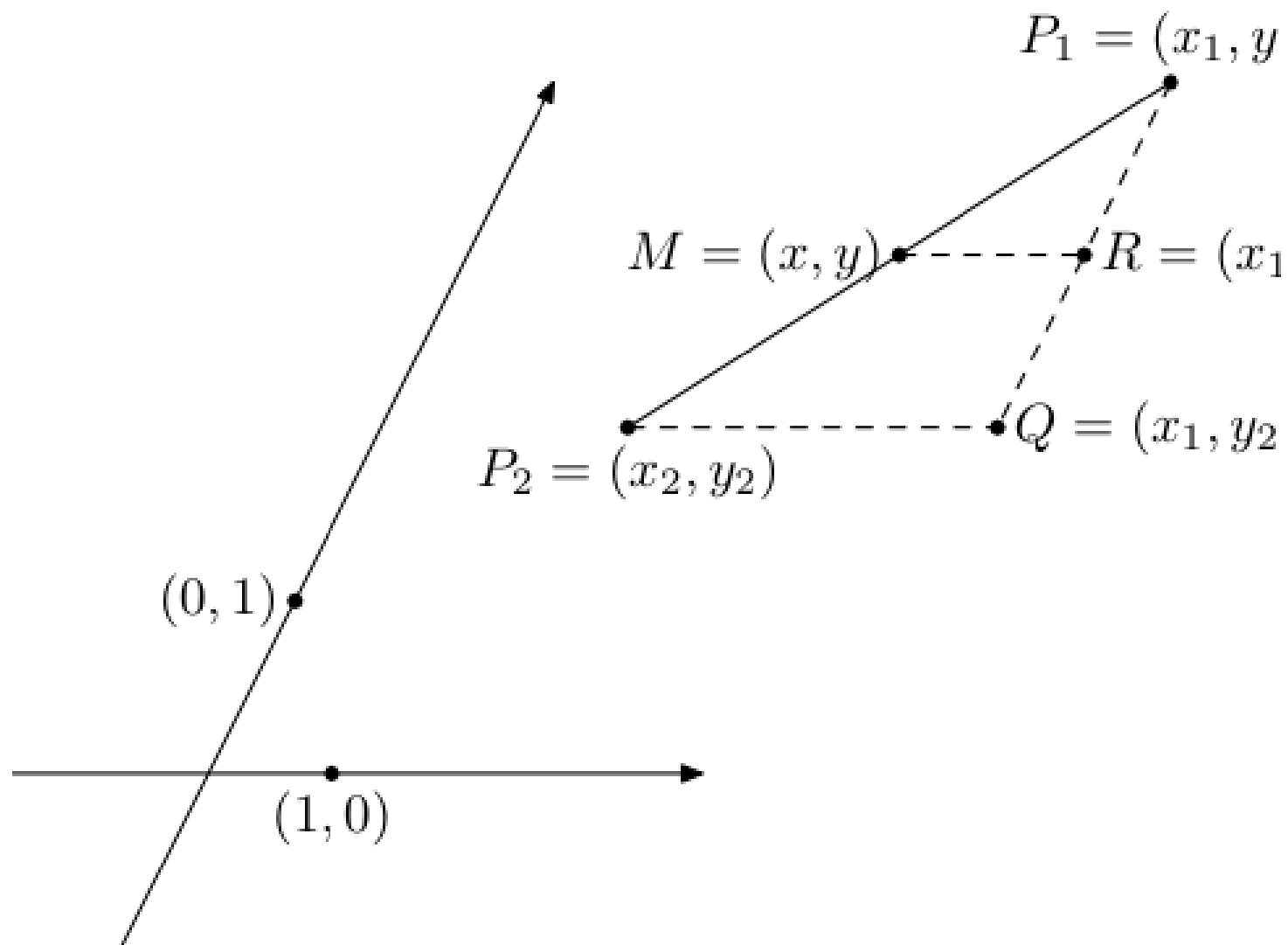
Figur 4.1
(Sida 138)



Figur 4.2
(Sida 139)

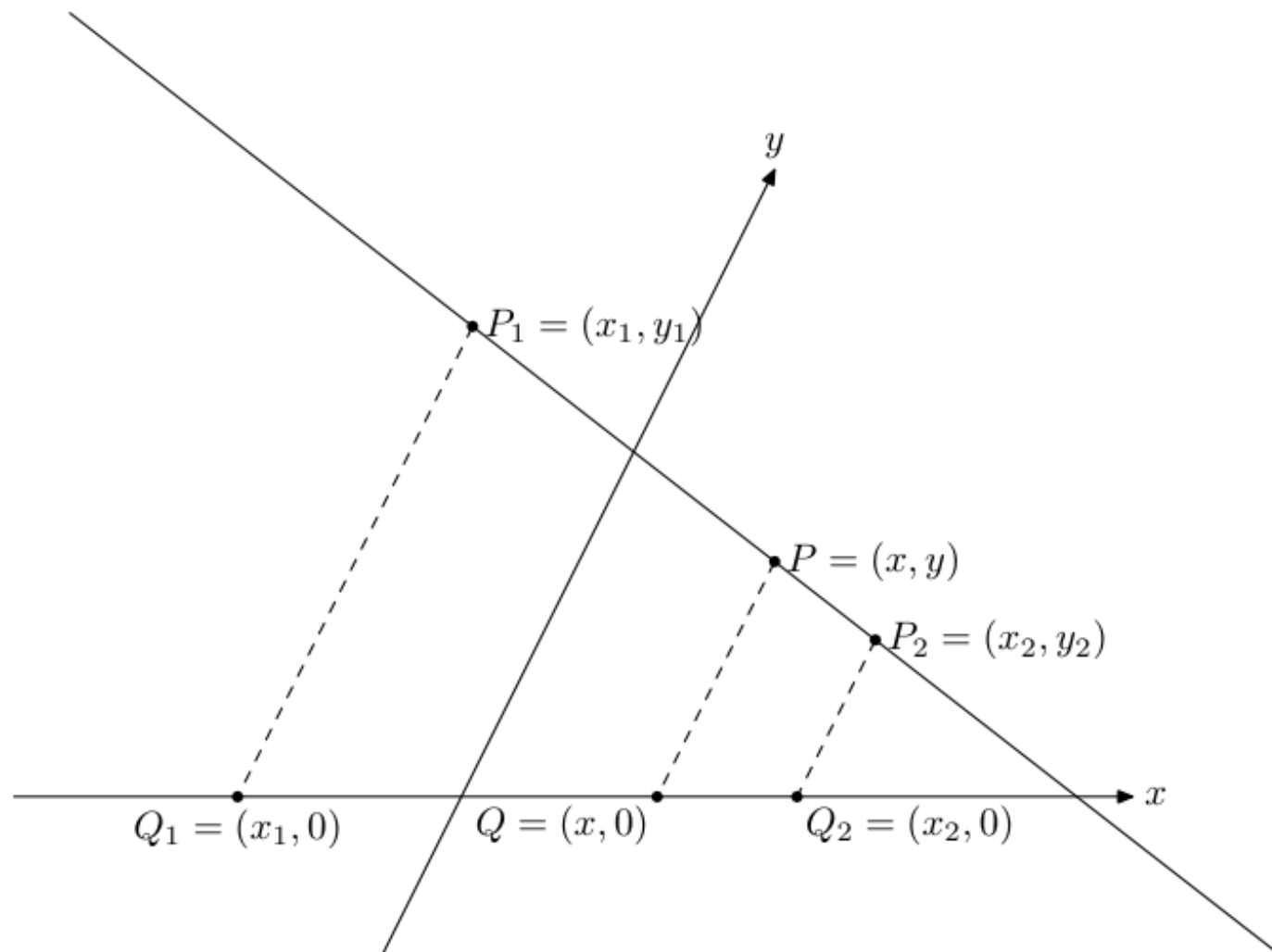


Figur 4.3
(Sida 140)

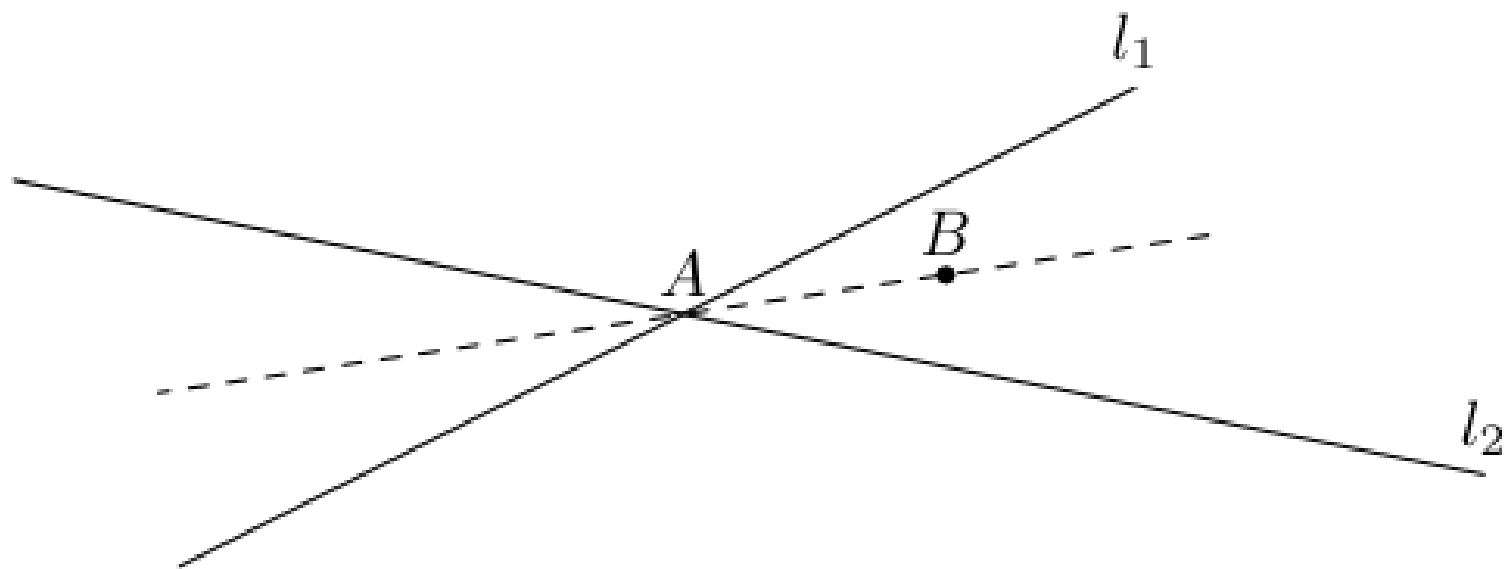


Figur 4.4
(Sida 141)

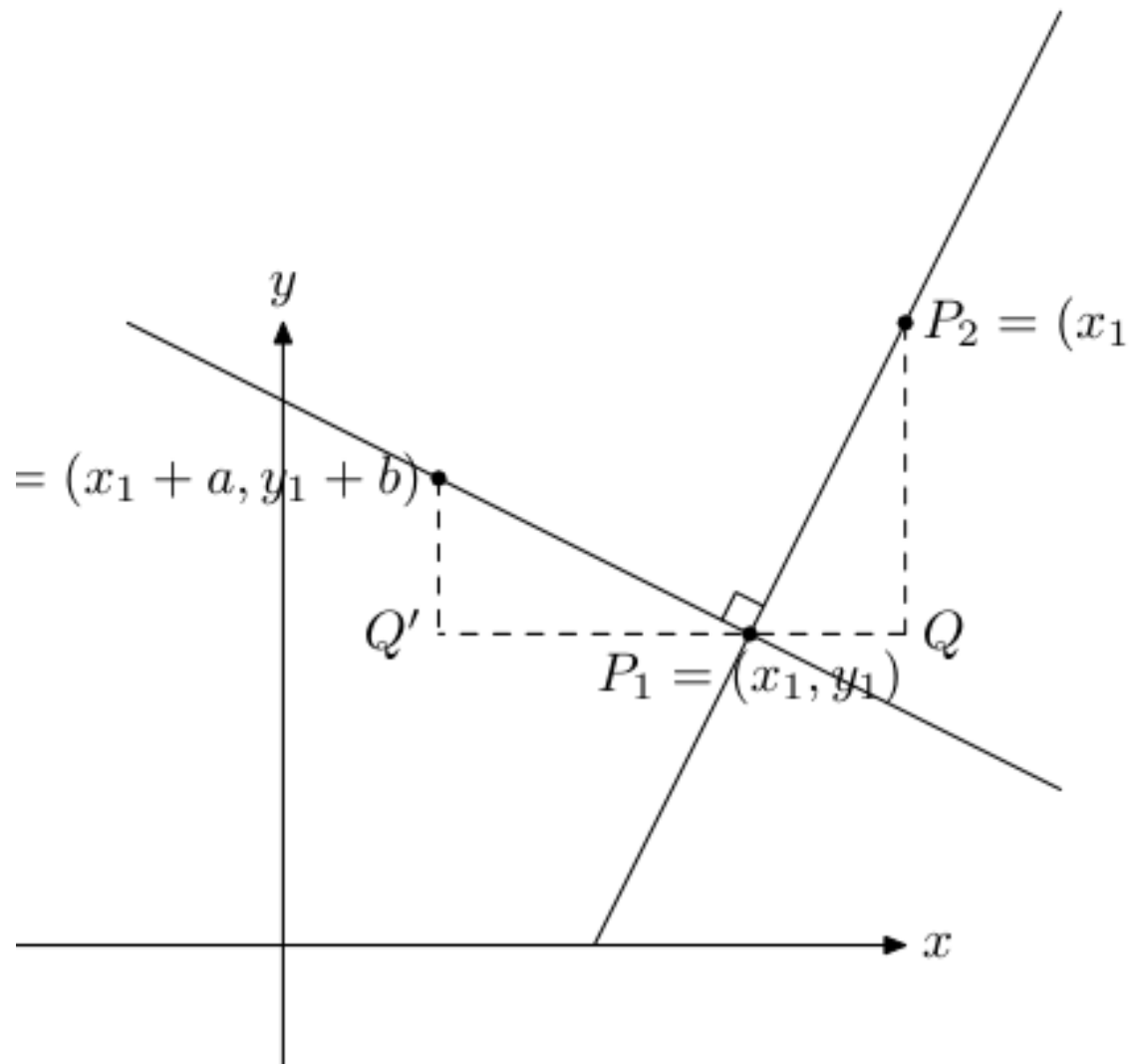
$t \sim 0$. vi projekciai punktina t_1, t_2 oca t pa x -axem. i projekcionina



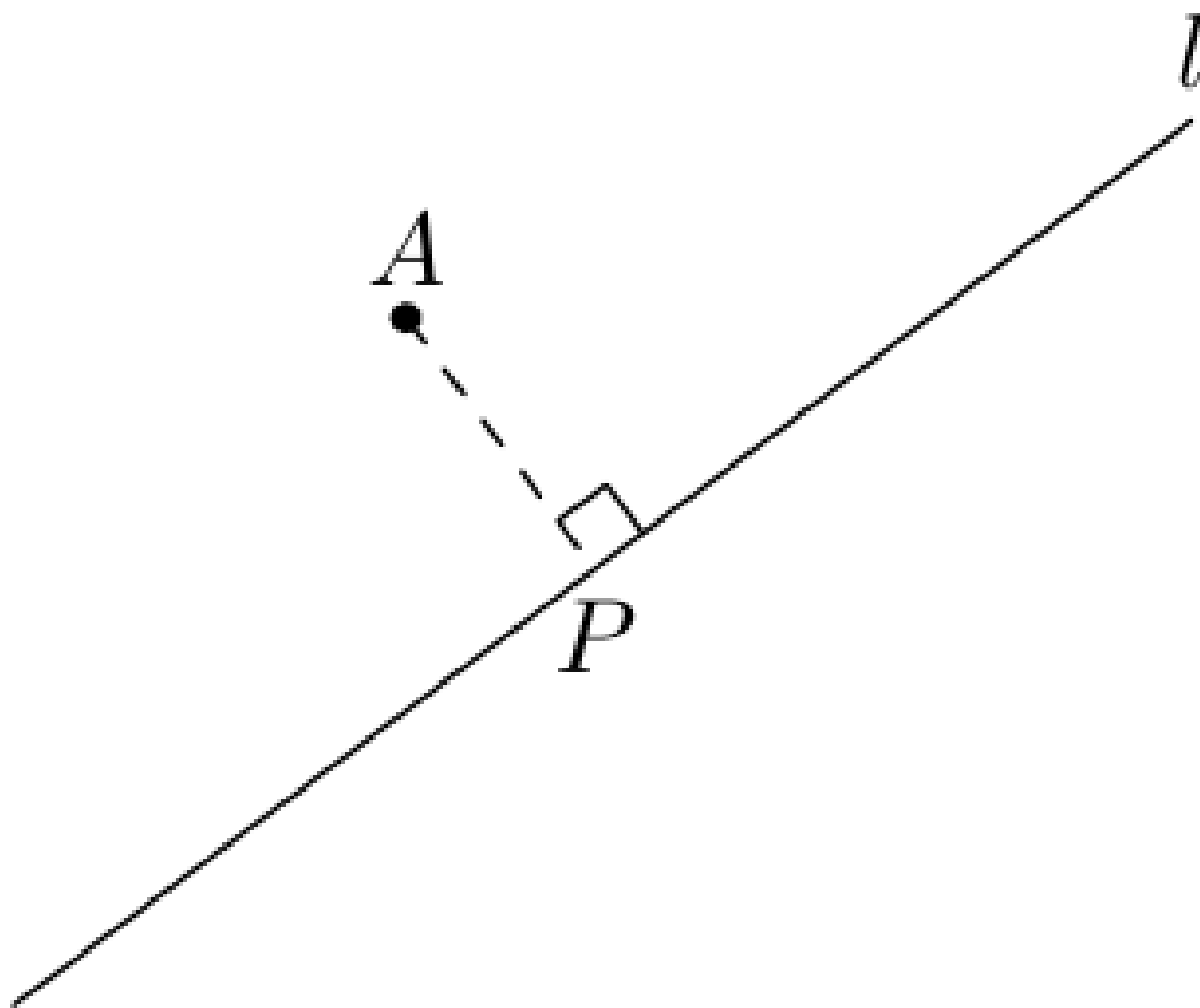
Figur 4.5
(Sida 142)



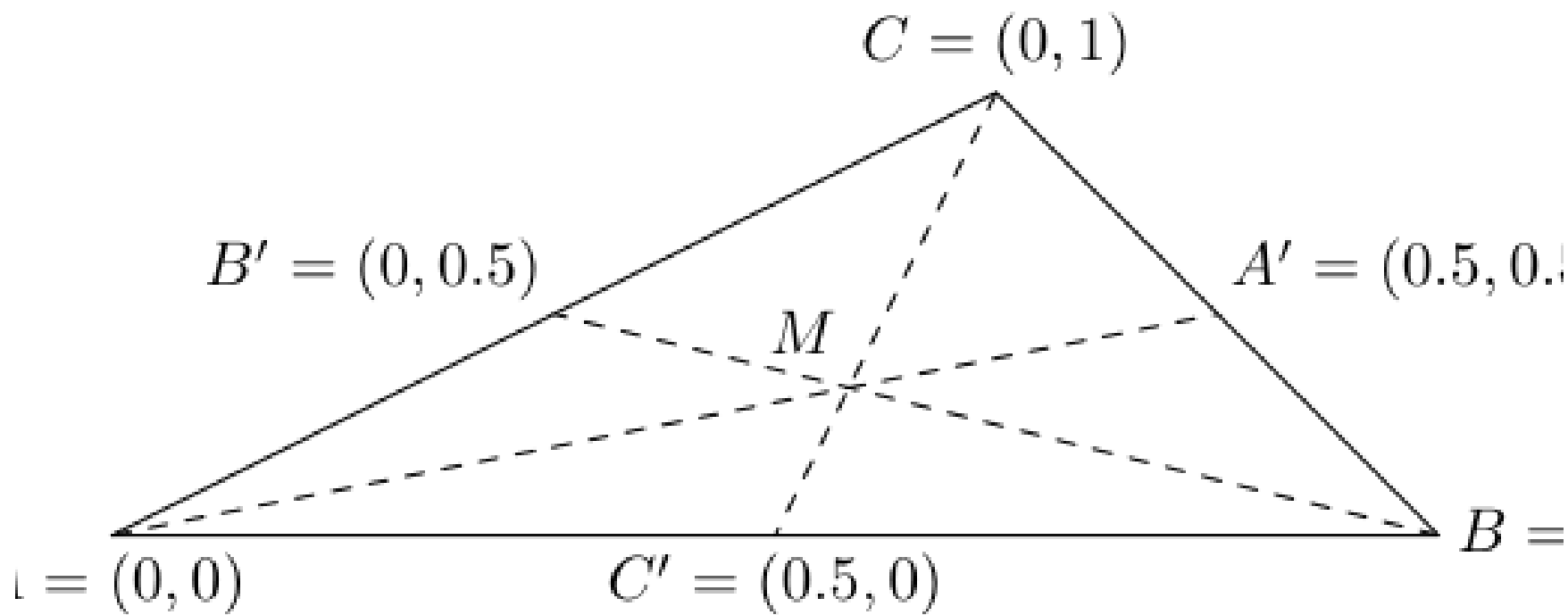
Figur 4.6
(Sida 145)



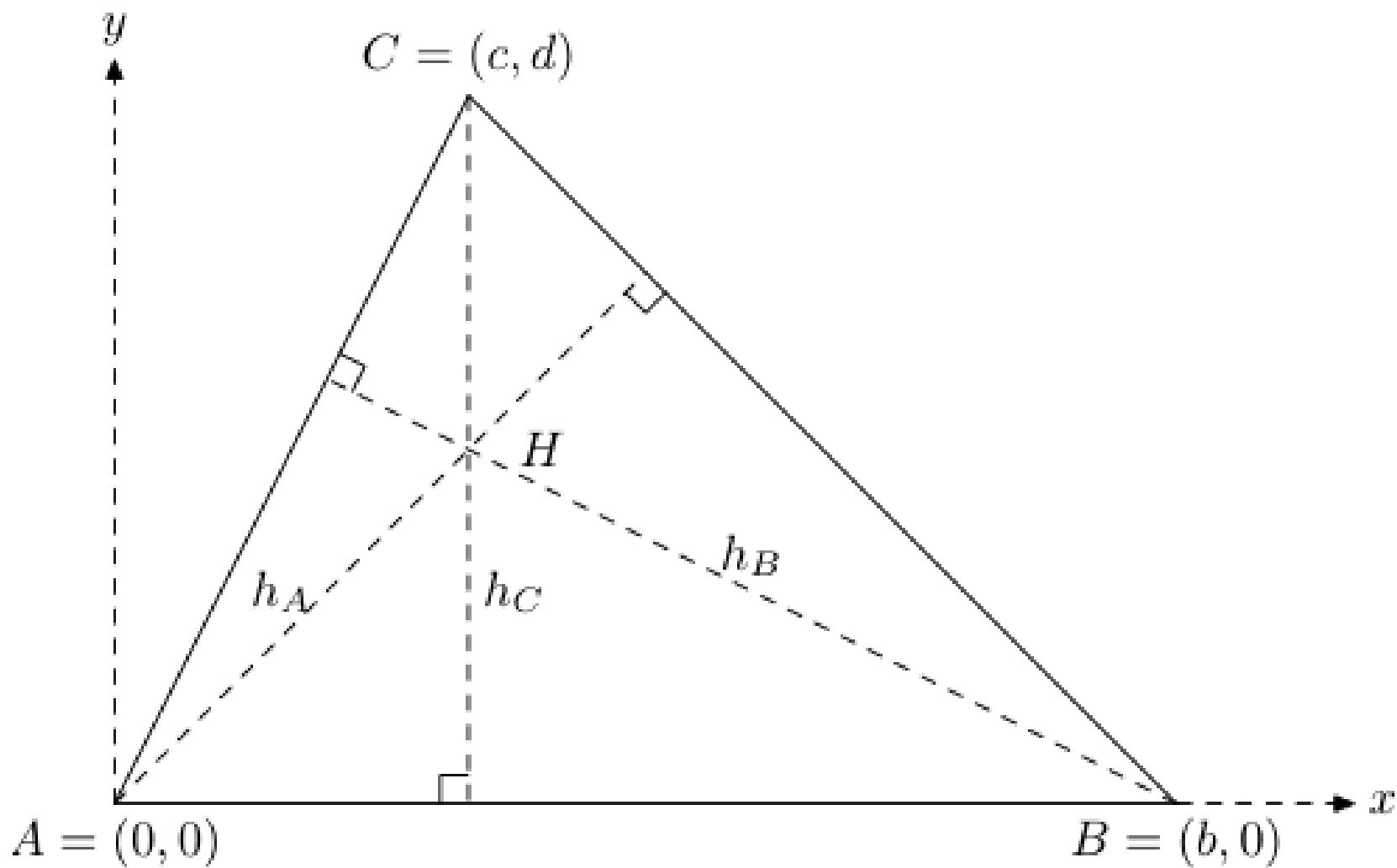
Figur 4.7 I vår figur har a och b olika tecken, $a < 0$ och $b > 0$. Läsaren kan självrita en figur där a



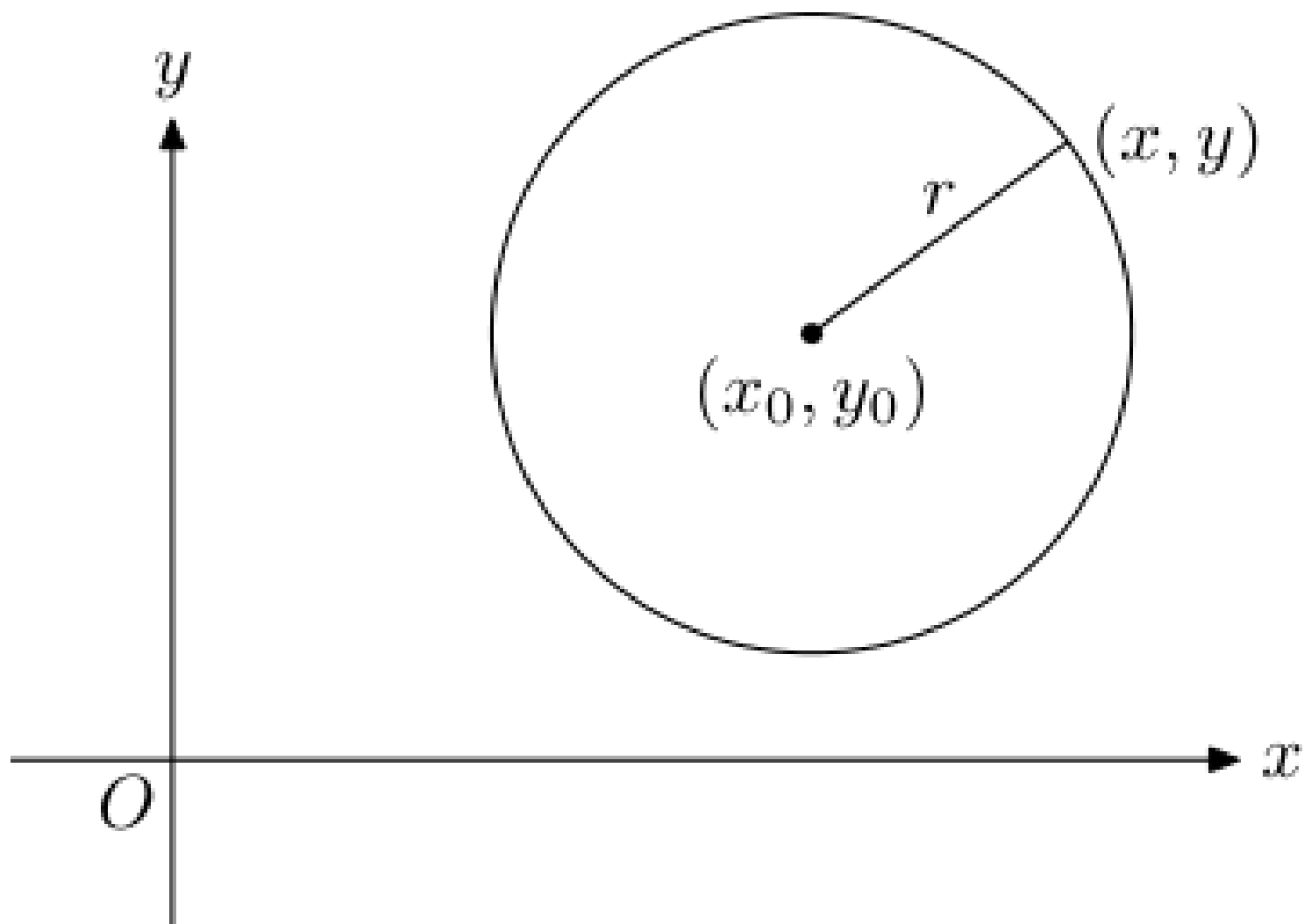
Figur 4.8
(Sida 149)



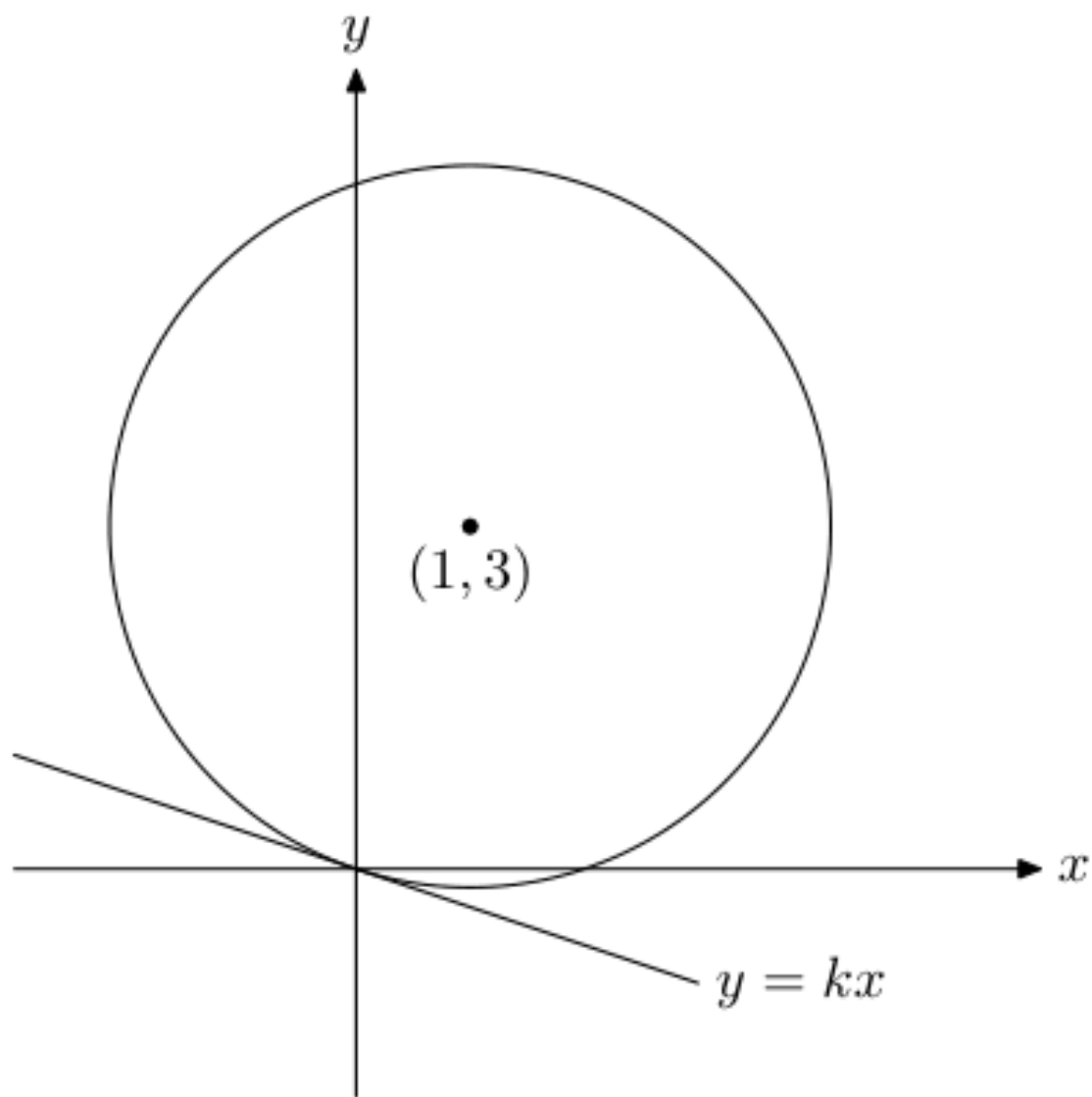
Figur 4.9
(Sida 150)



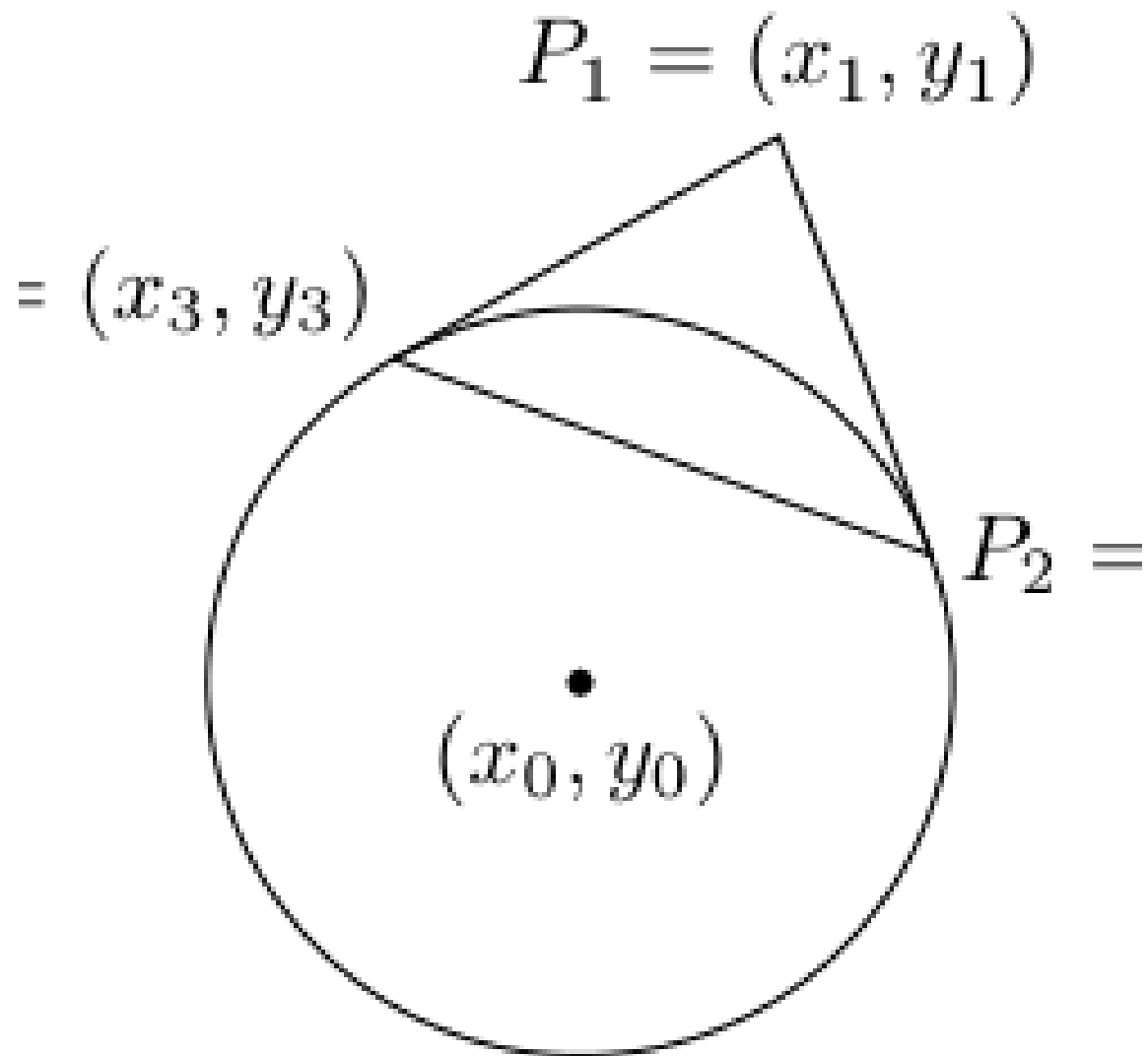
Figur 4.10
(Sida 151)



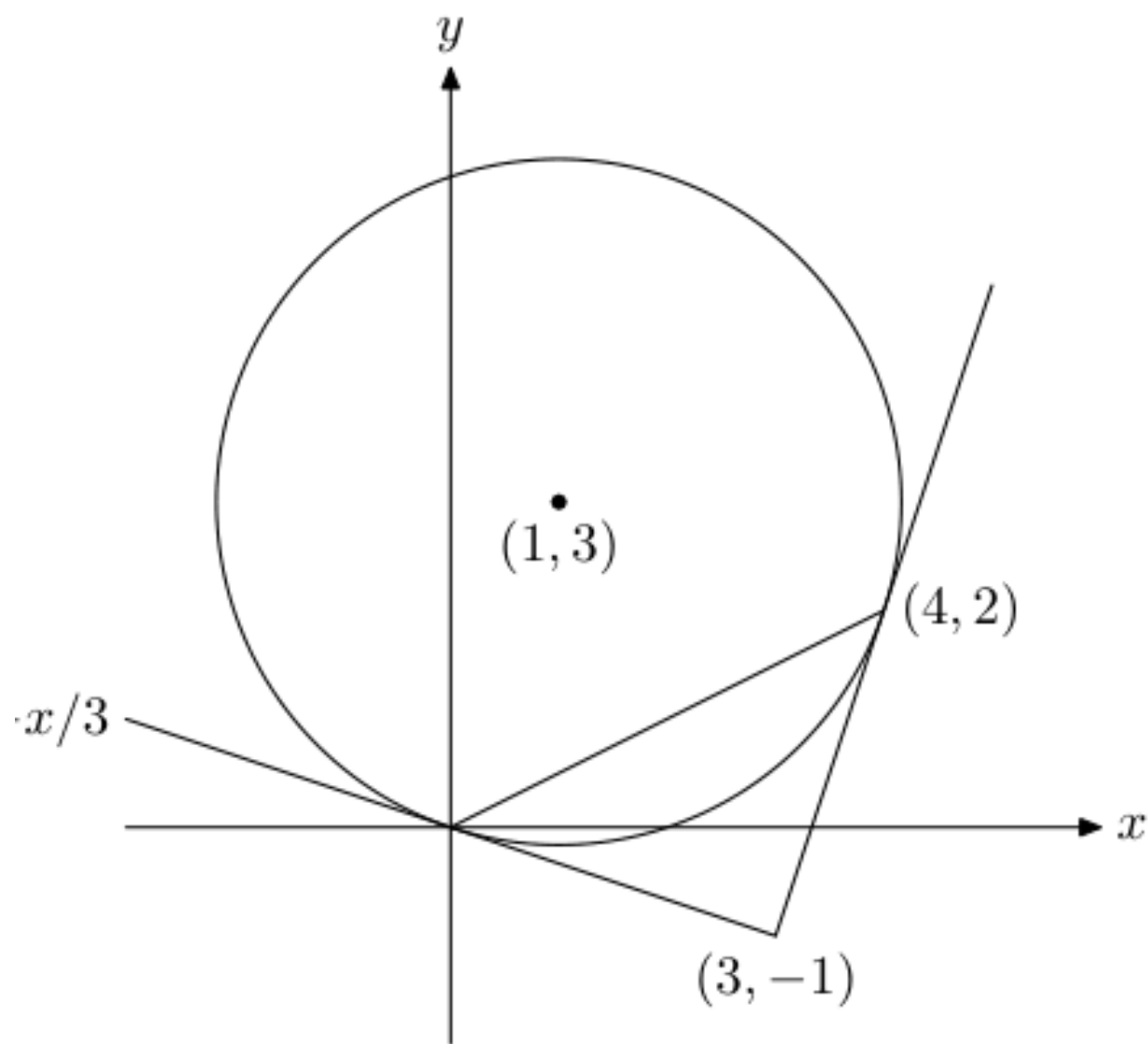
Figur 4.11
(Sida 154)



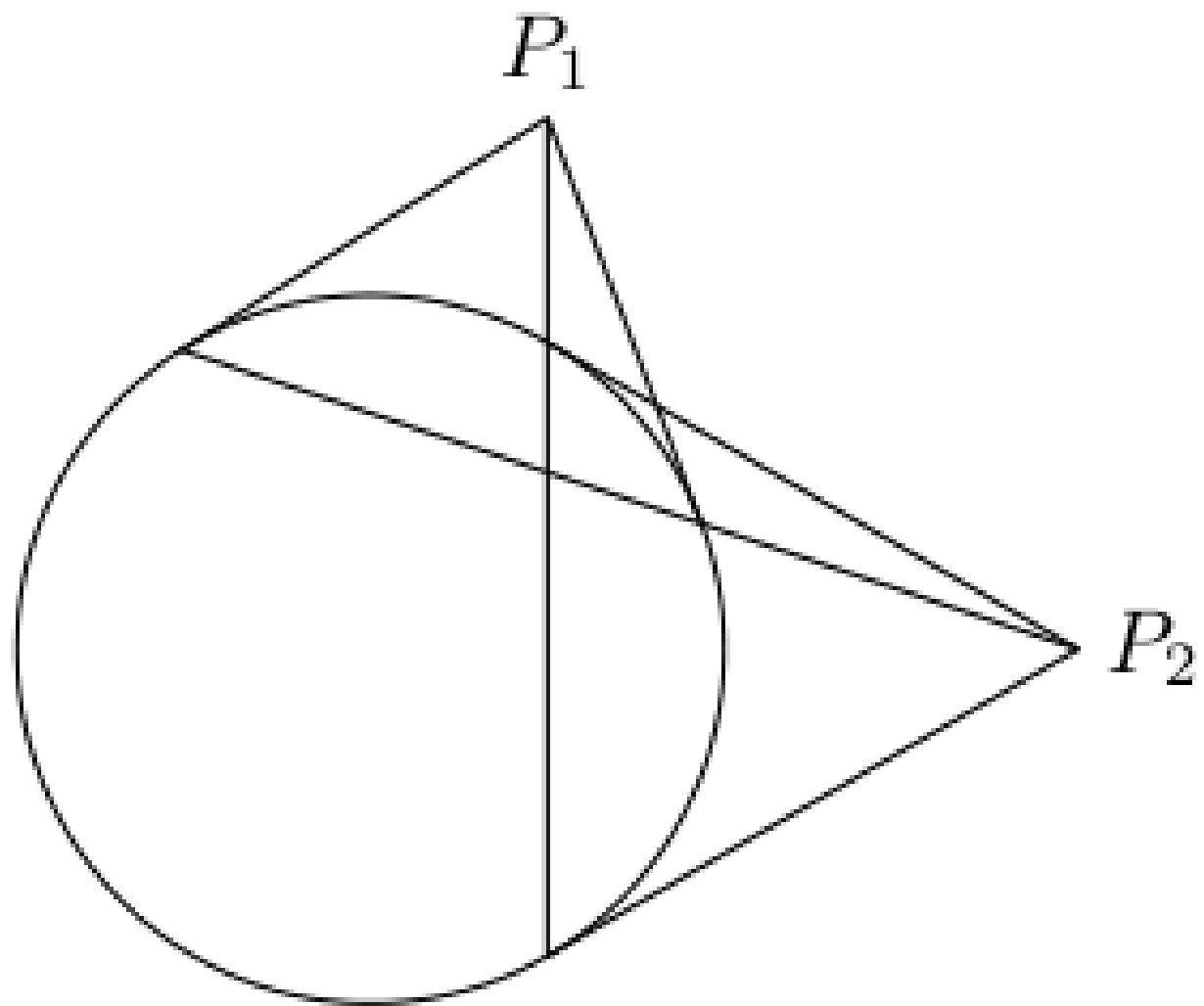
Figur 4.12
(Sida 156)



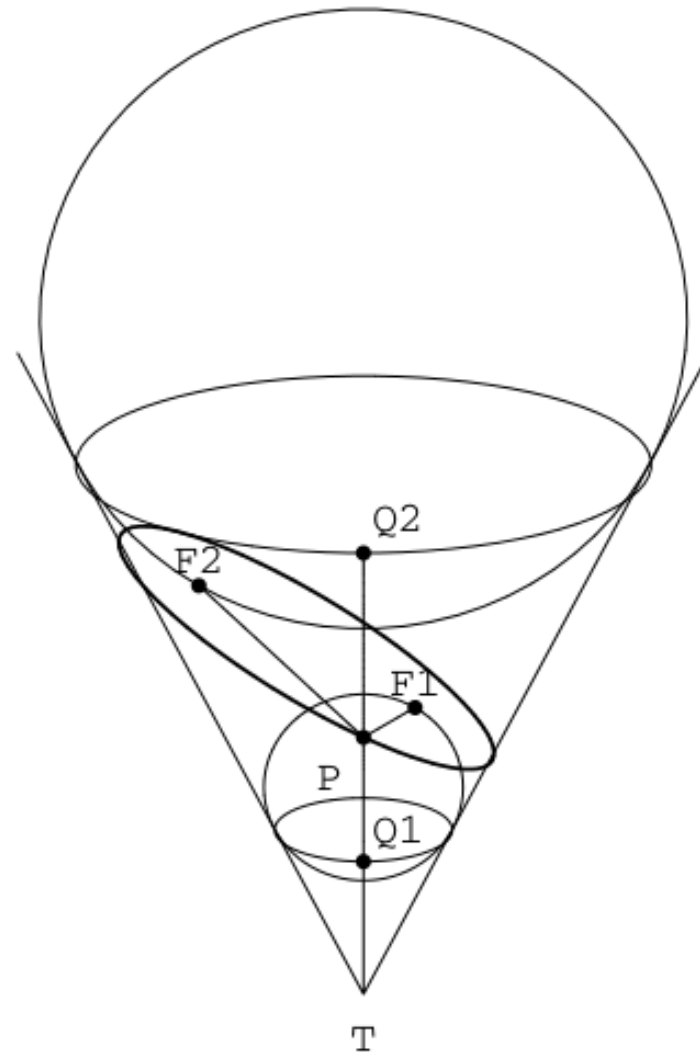
Figur 4.13
(Sida 158)



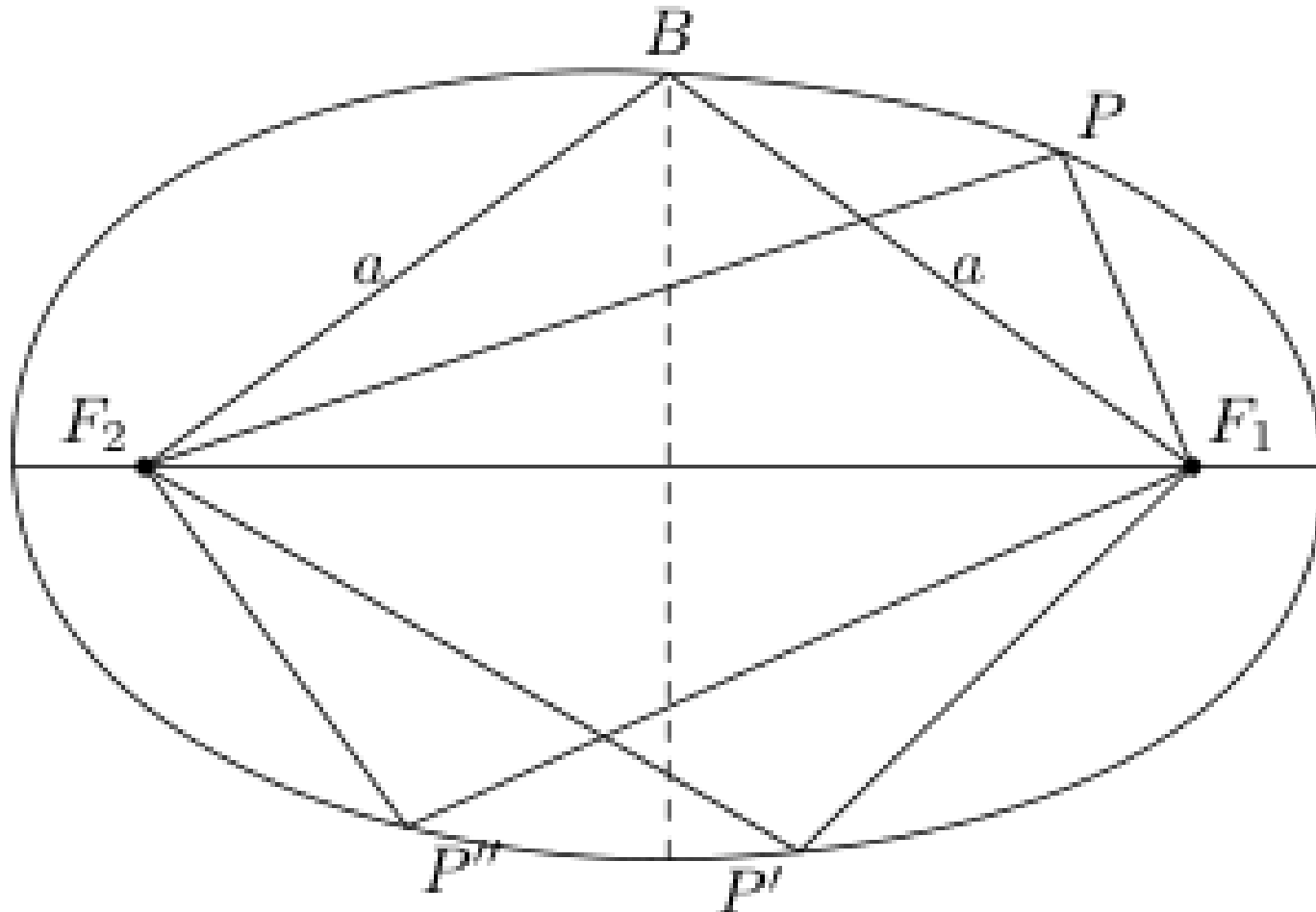
Figur 4.14
(Sida 160)



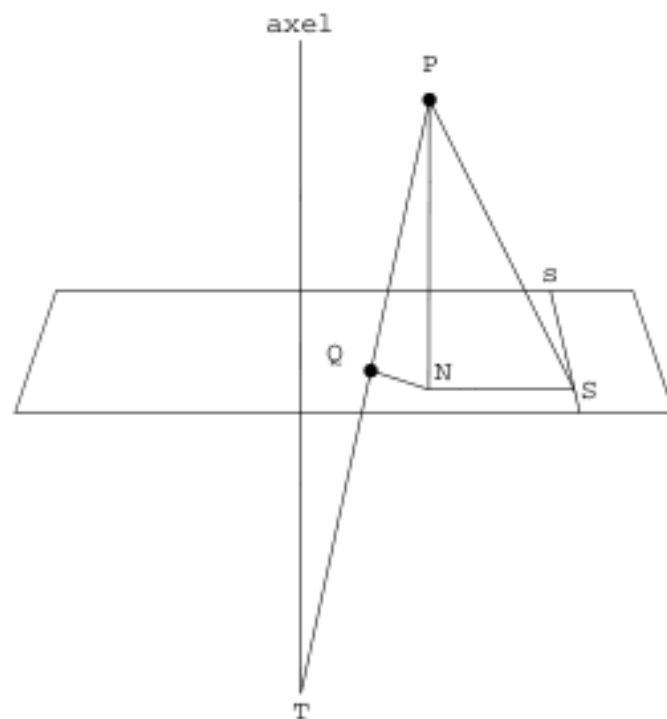
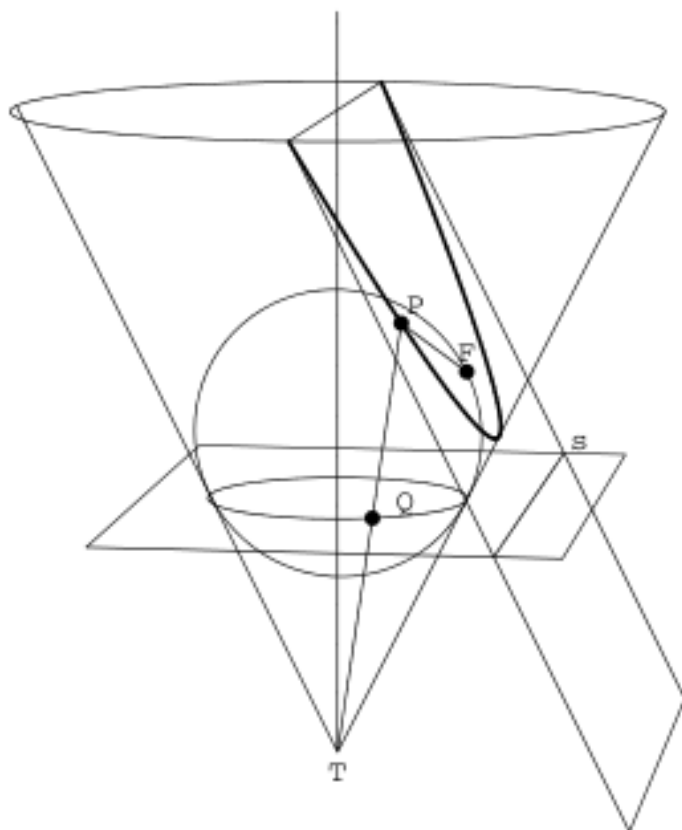
Figur 4.15 Punkten P_2 ligger på tangentkordan till P_1 och P_1 ligger på tangent-kordan till P_2 .



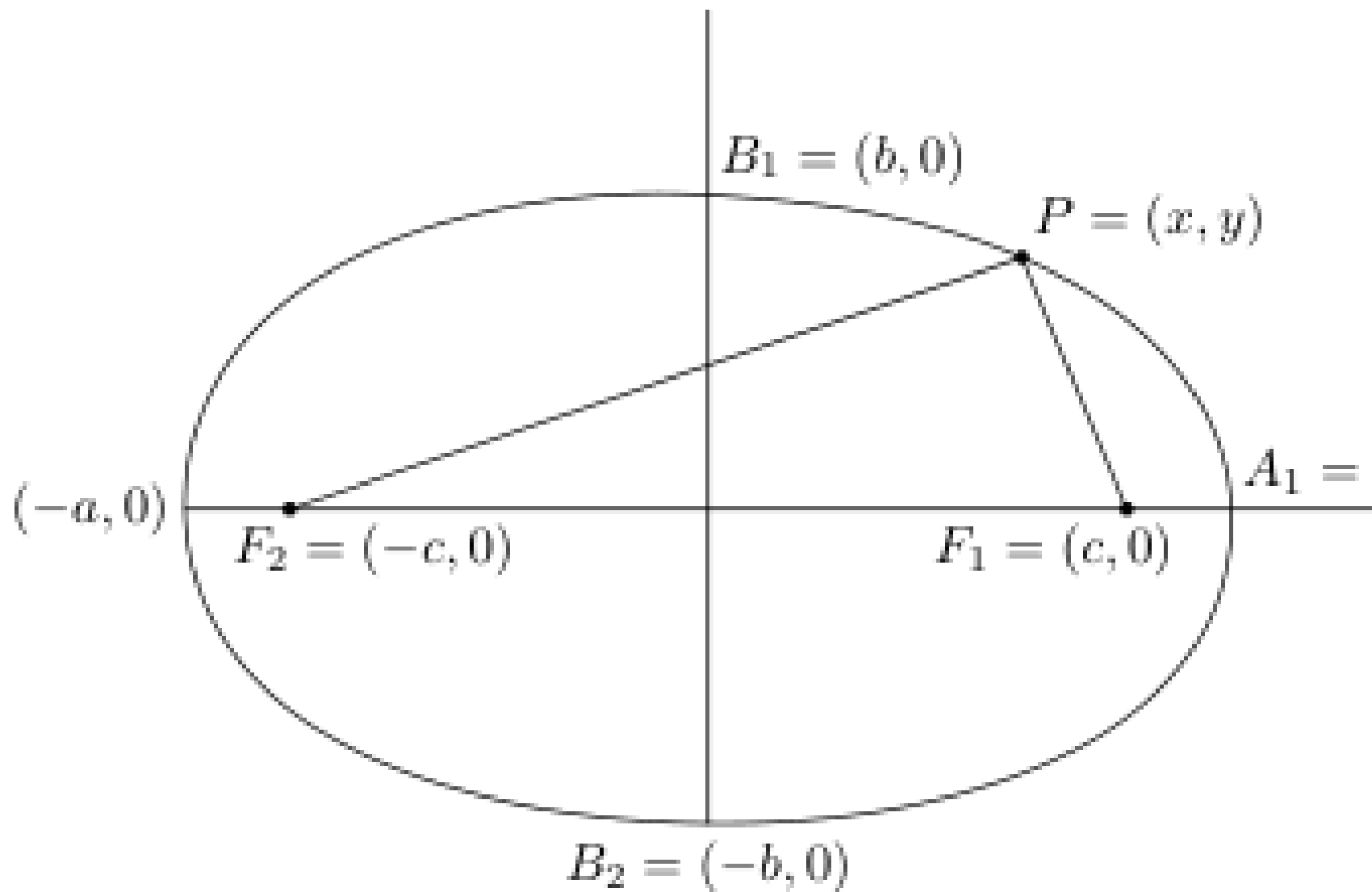
Figur 4.16 Brännpunktsradien $PF1$ och sträckan $PQ1$ är båda tangenter från punkten P på ellipsen till en
(Sida 164)



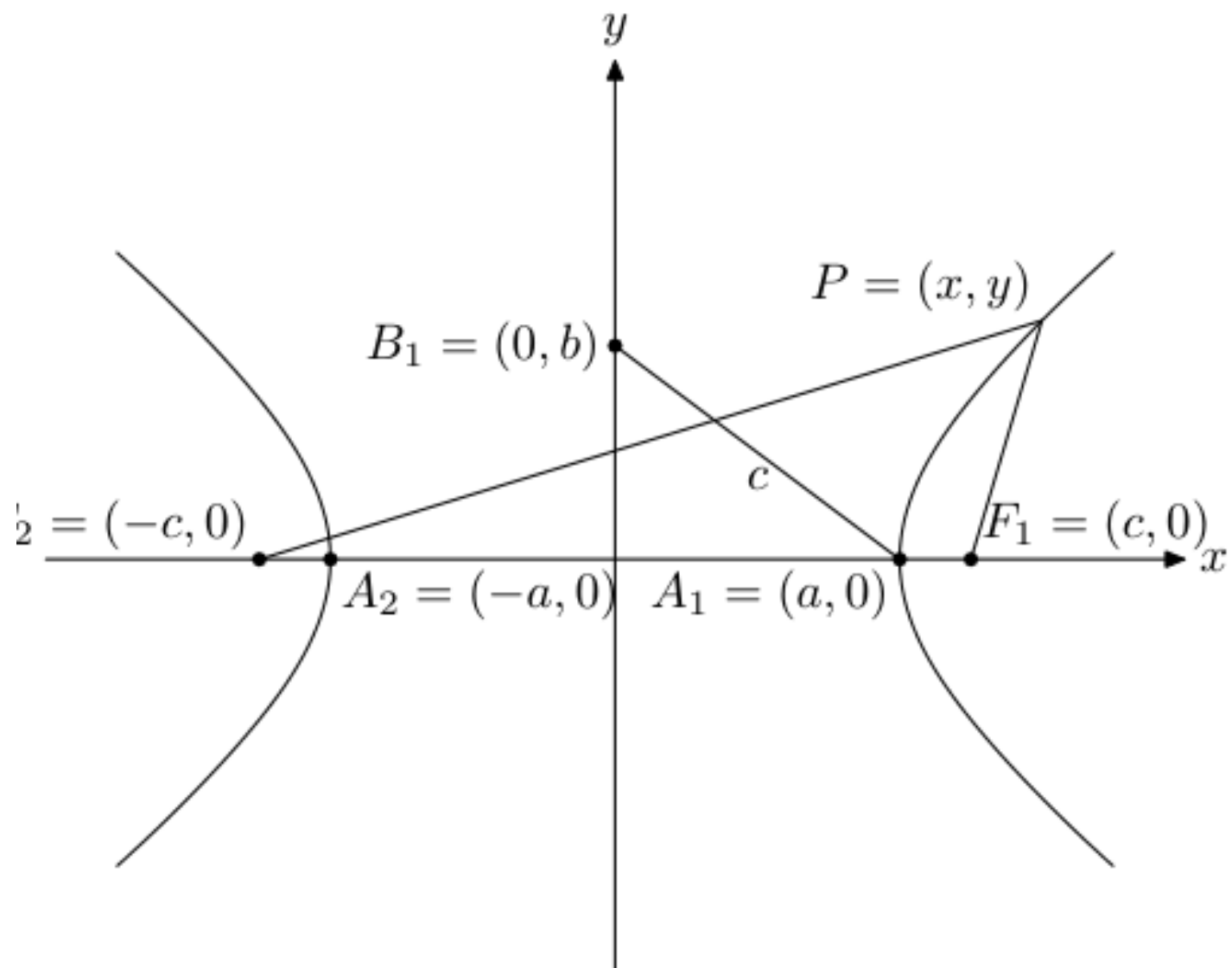
Figur 4.17 Ett snöre av längden $2a$ är fäst med häftstift i ellipsens brännpunkter F_1 och F_2 . Snöret s



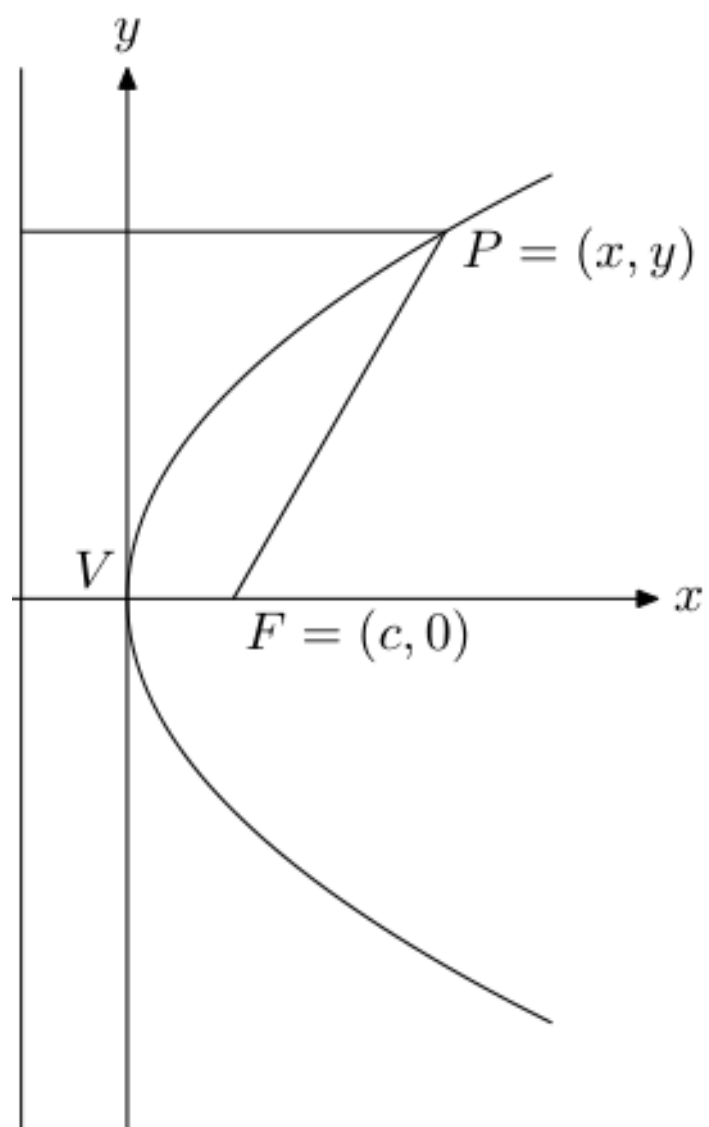
Figur 4.18I den vänstra figuren är P en punkt på parabeln och Dandelinssfärentangerar parabelns plan
(Sida 166)



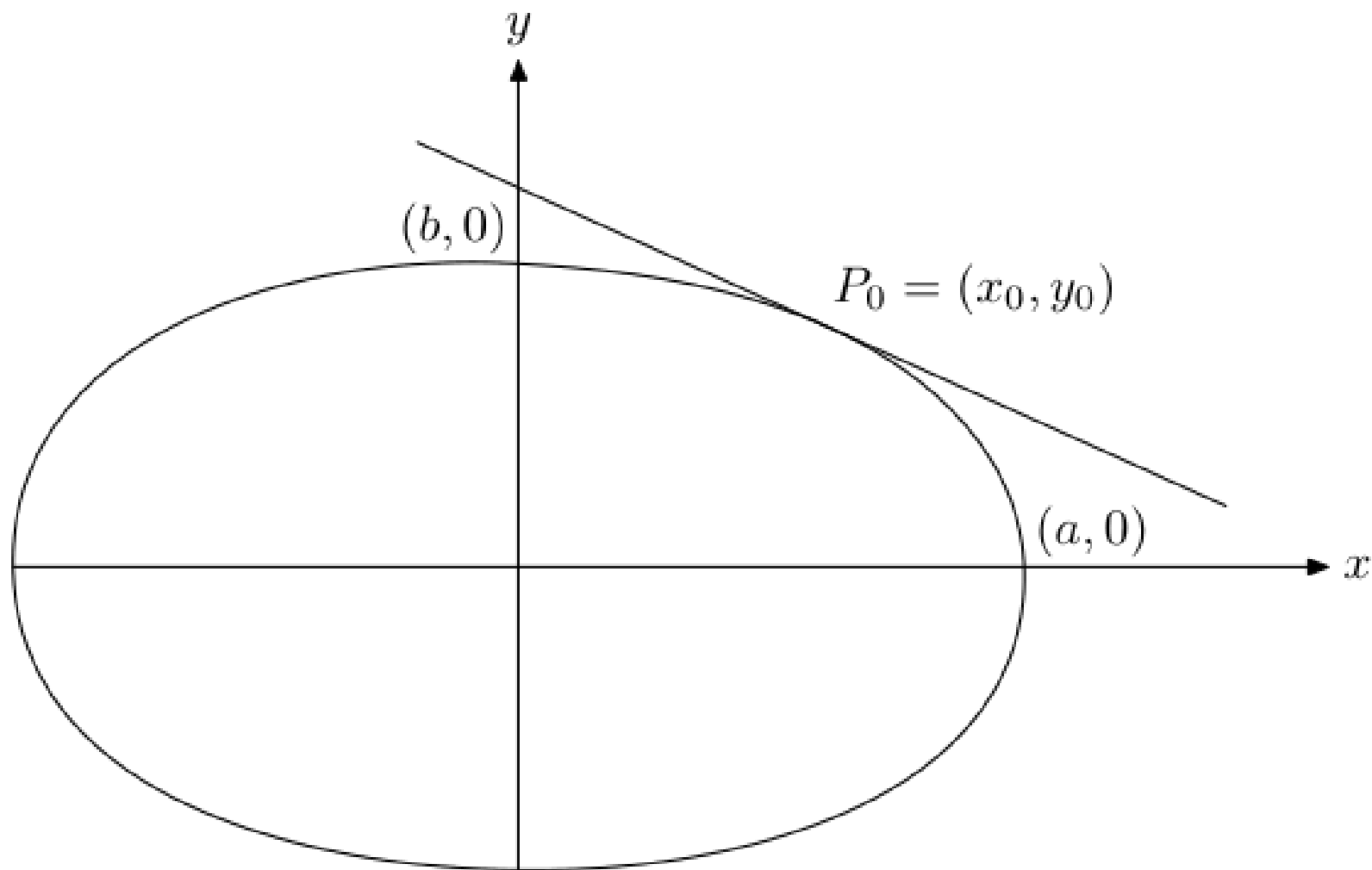
Figur 4.19
(Sida 167)



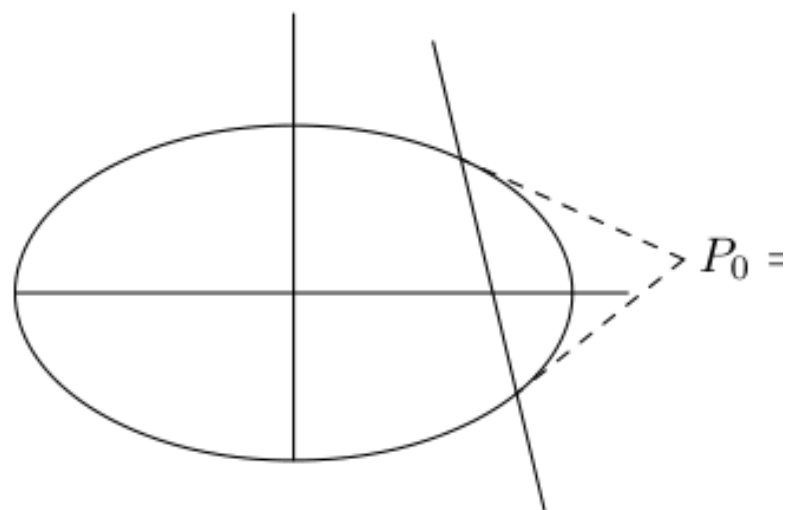
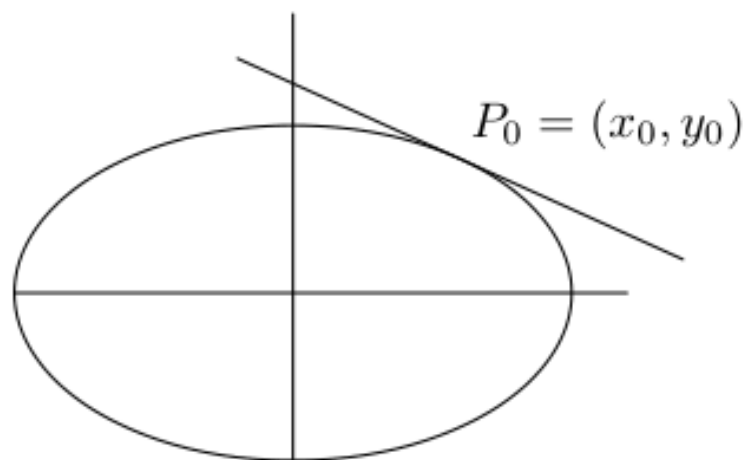
Figur 4.20
(Sida 168)



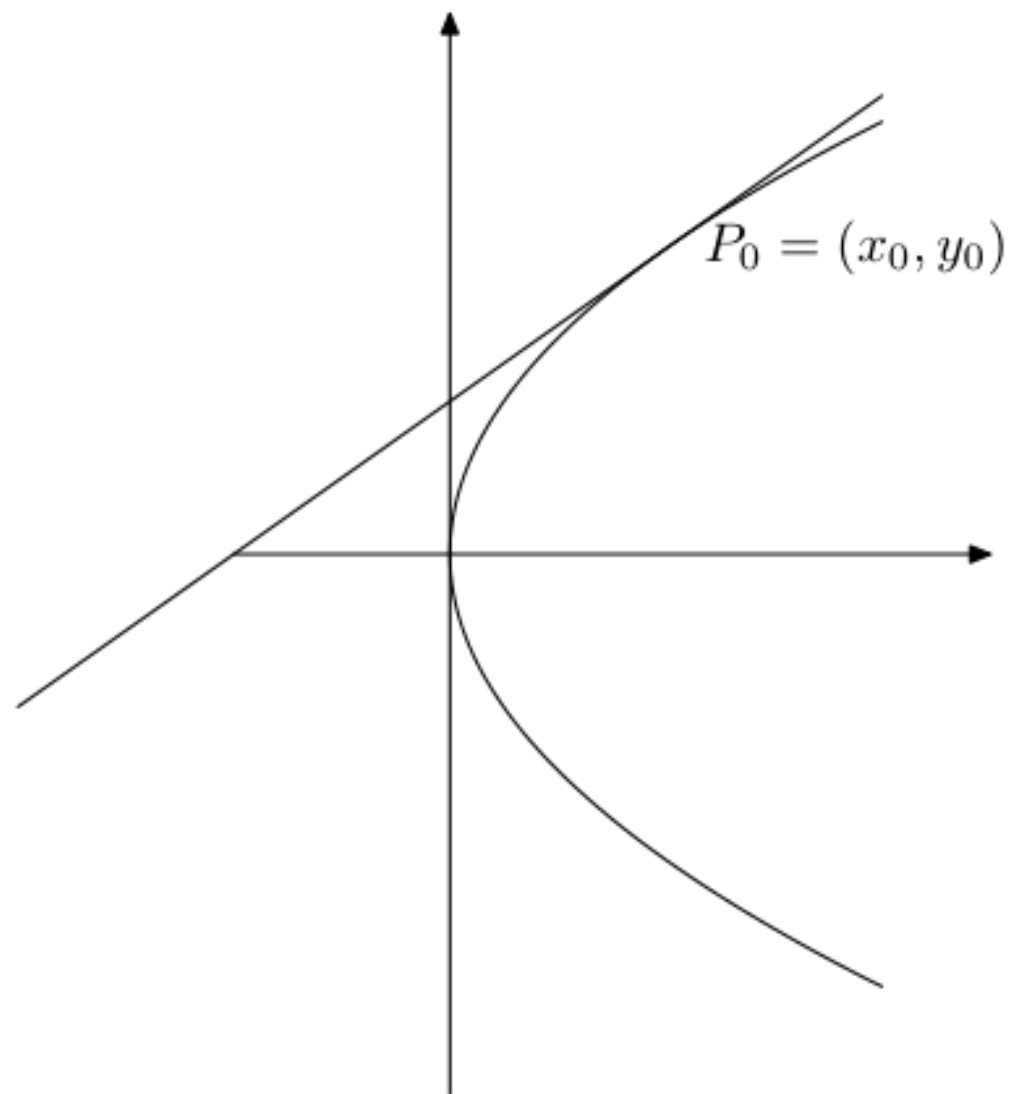
Figur 4.21
(Sida 170)



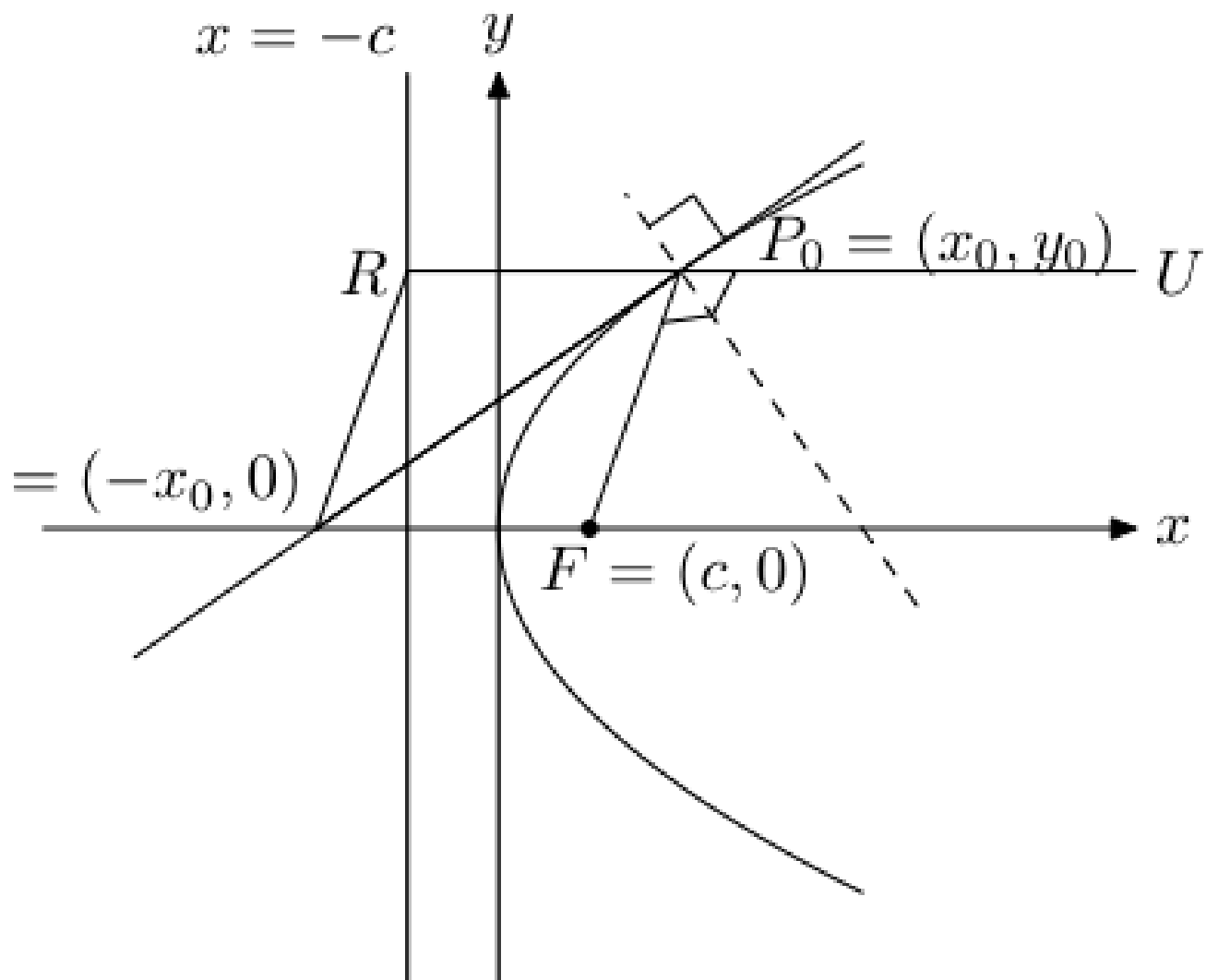
Figur 4.22
(Sida 172)



Figur 4.23
(Sida 174)

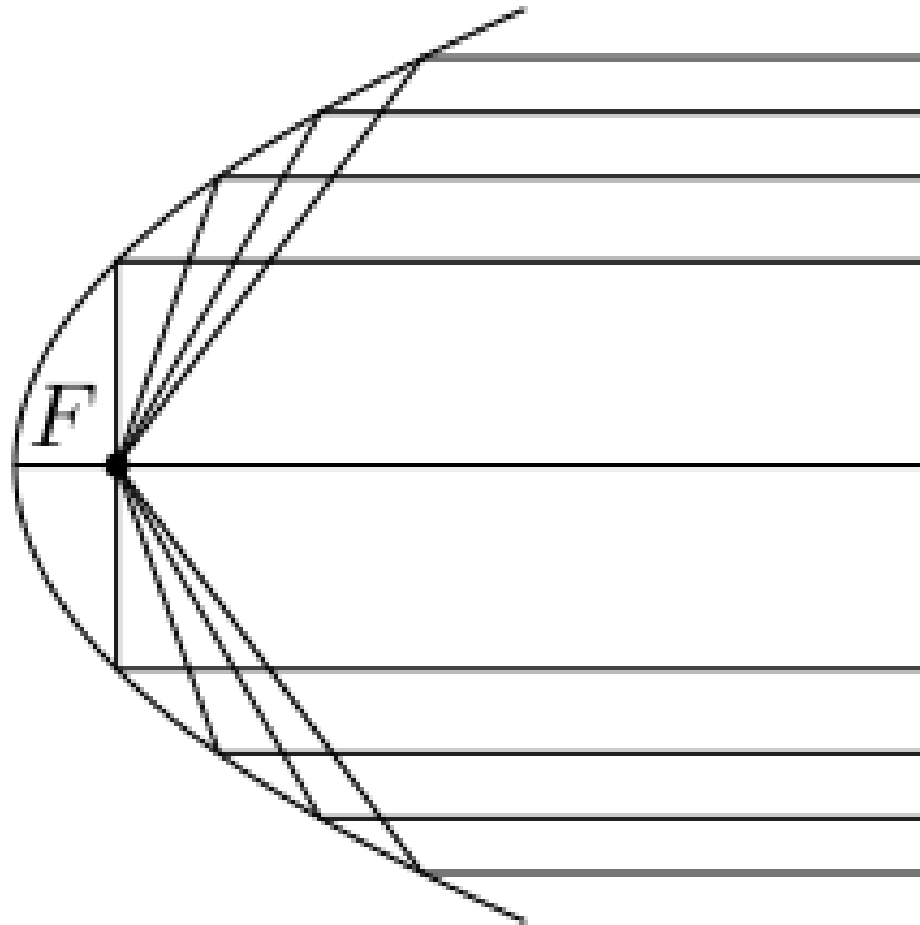


Figur 4.24
(Sida 175)



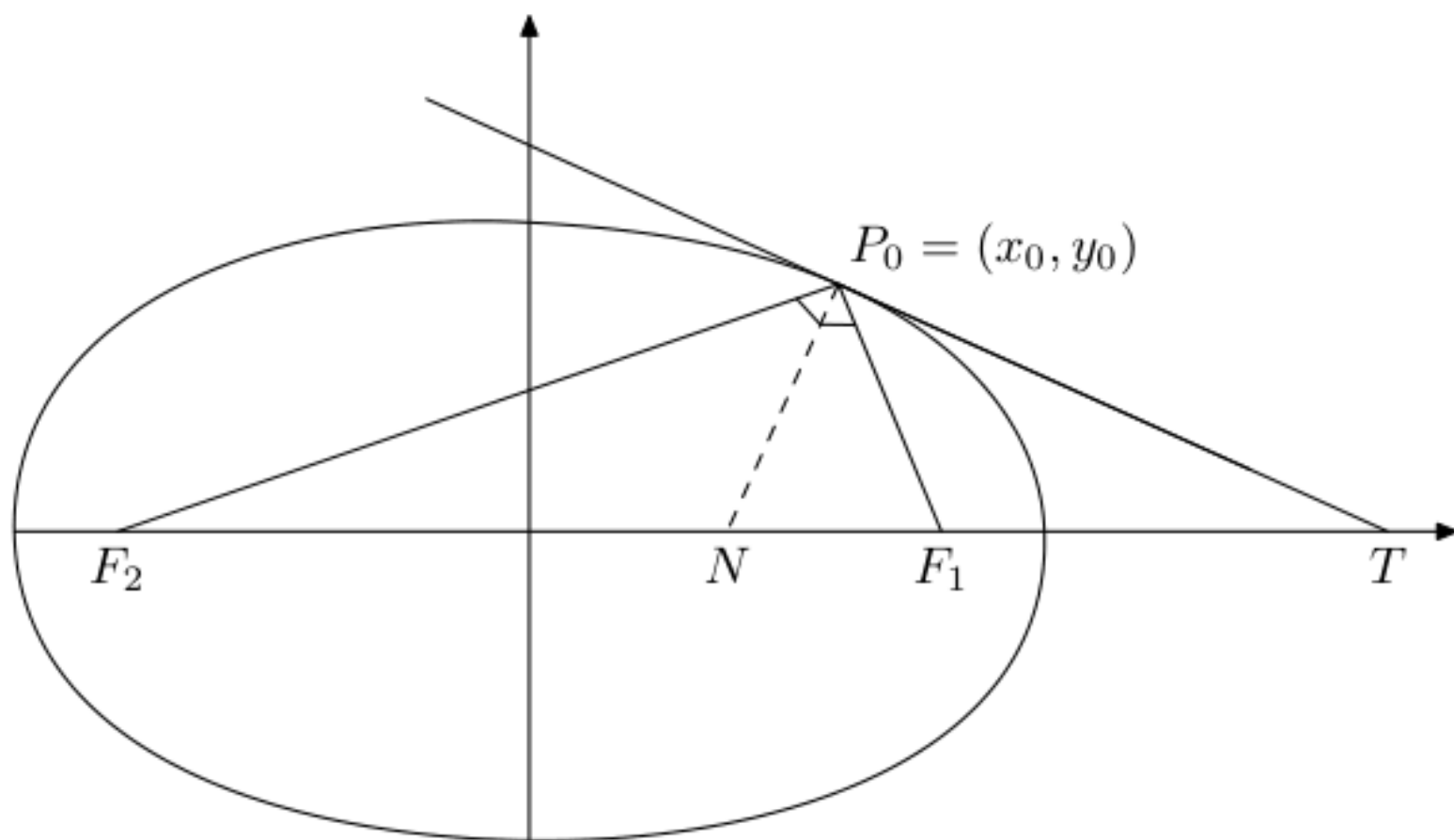
Figur 4.25 Den streckade normalen är bisektris till vinkeln mellan brännpunktsraden P_0F och en rät
(Sida 178)

4.3 Nagelsatten



Figur 4.26
(Sida 179)

skall nu bestämma den punkt där normalen i P_0 skär x -axeln. Ekvationen



Figur 4.27
(Sida 179)



Figur 5.1 I denna målning, som kallas Flagellanten eller Självplågaren, av Pierodella Franceska fram
(Sida 186)

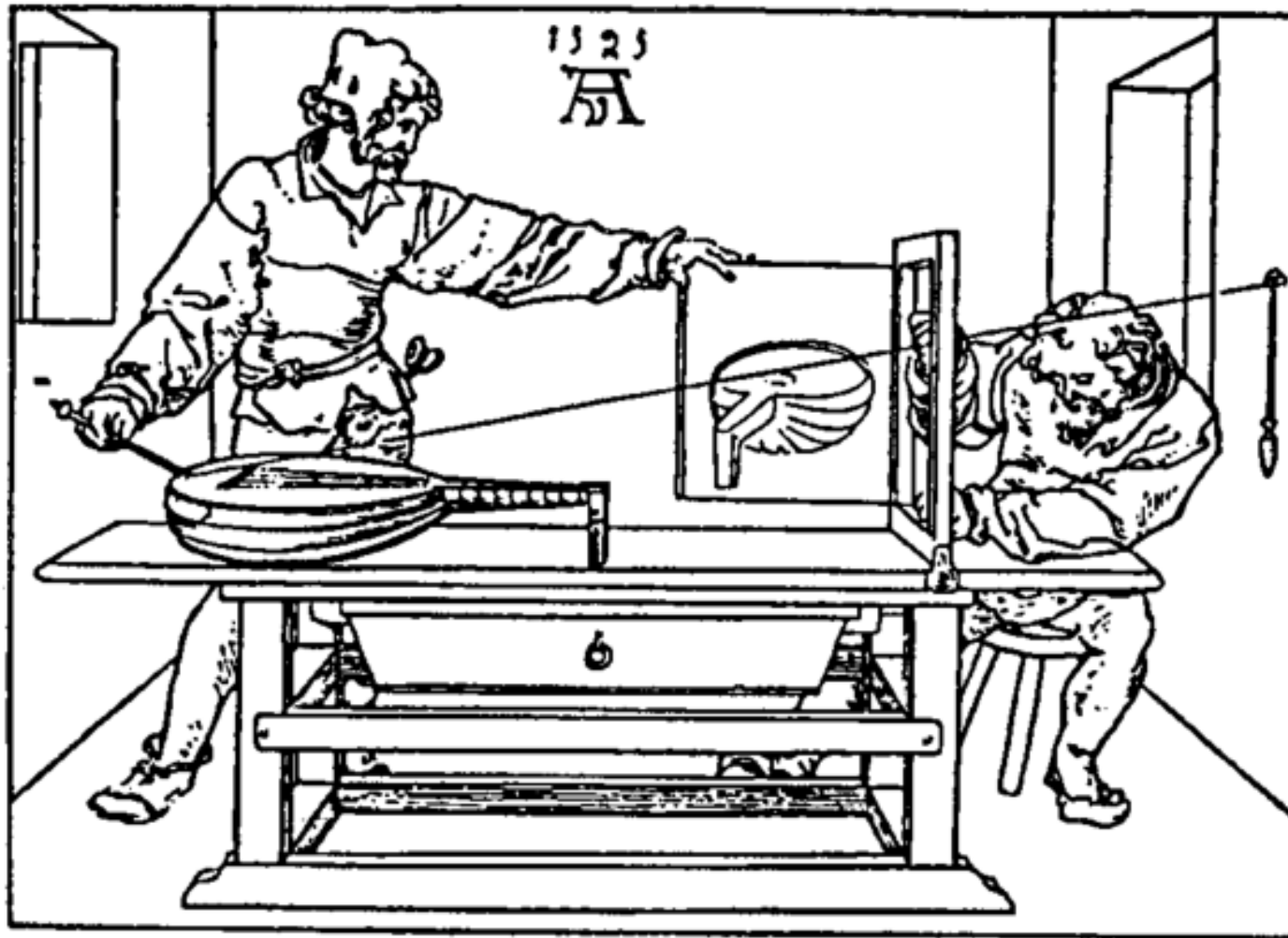
avs. projekt, torshagen.



Figur 5.2 Nattvarden är en av Leonardo da Vincis mest berömda målningar och den är bland mycket annat
(Sida 187)

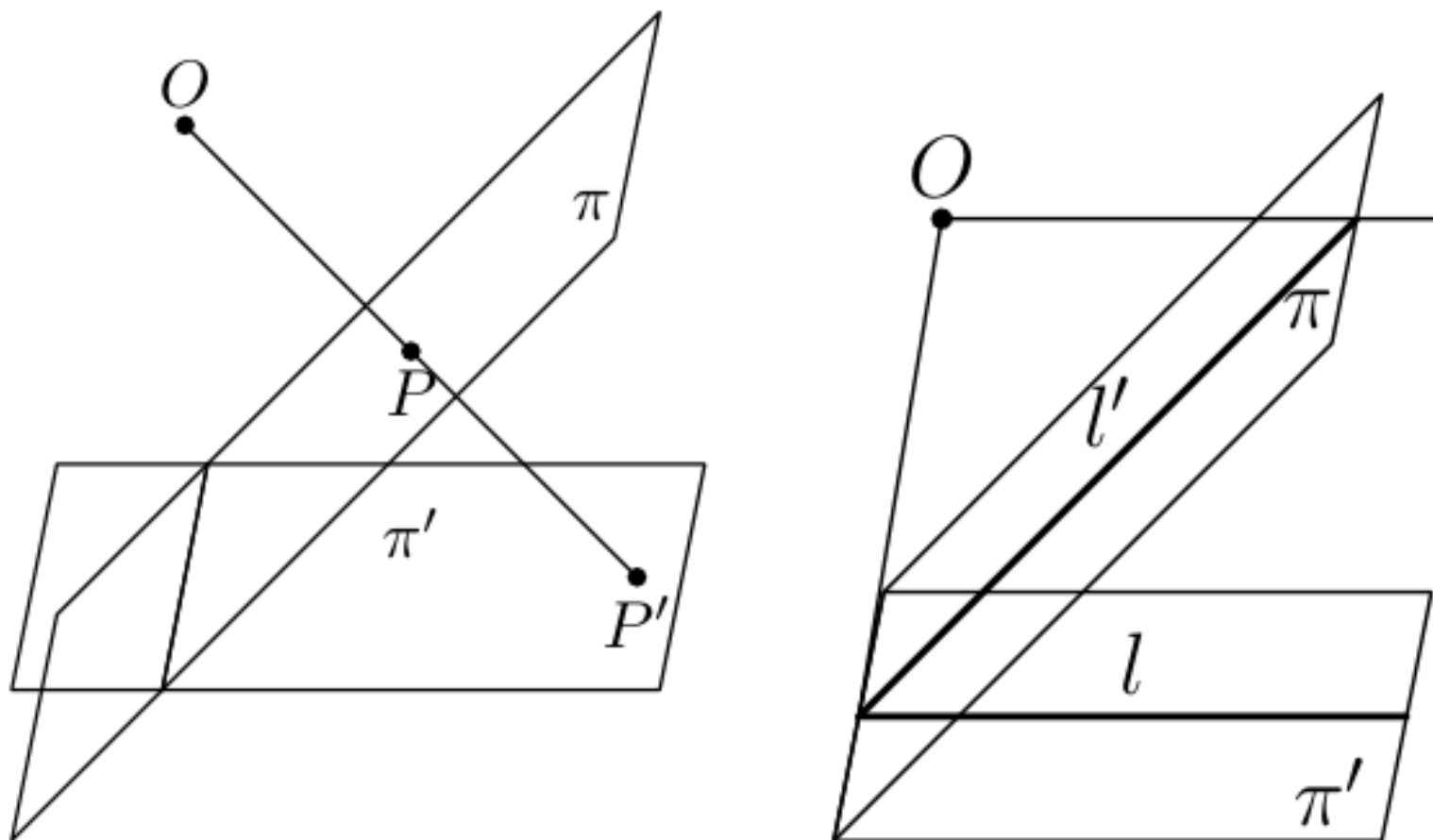


Figur 5.3 Albrecht Dürers målning Melancholia visar konstnären i en dyster sin-nestämning omgiven bl
(Sida 188)

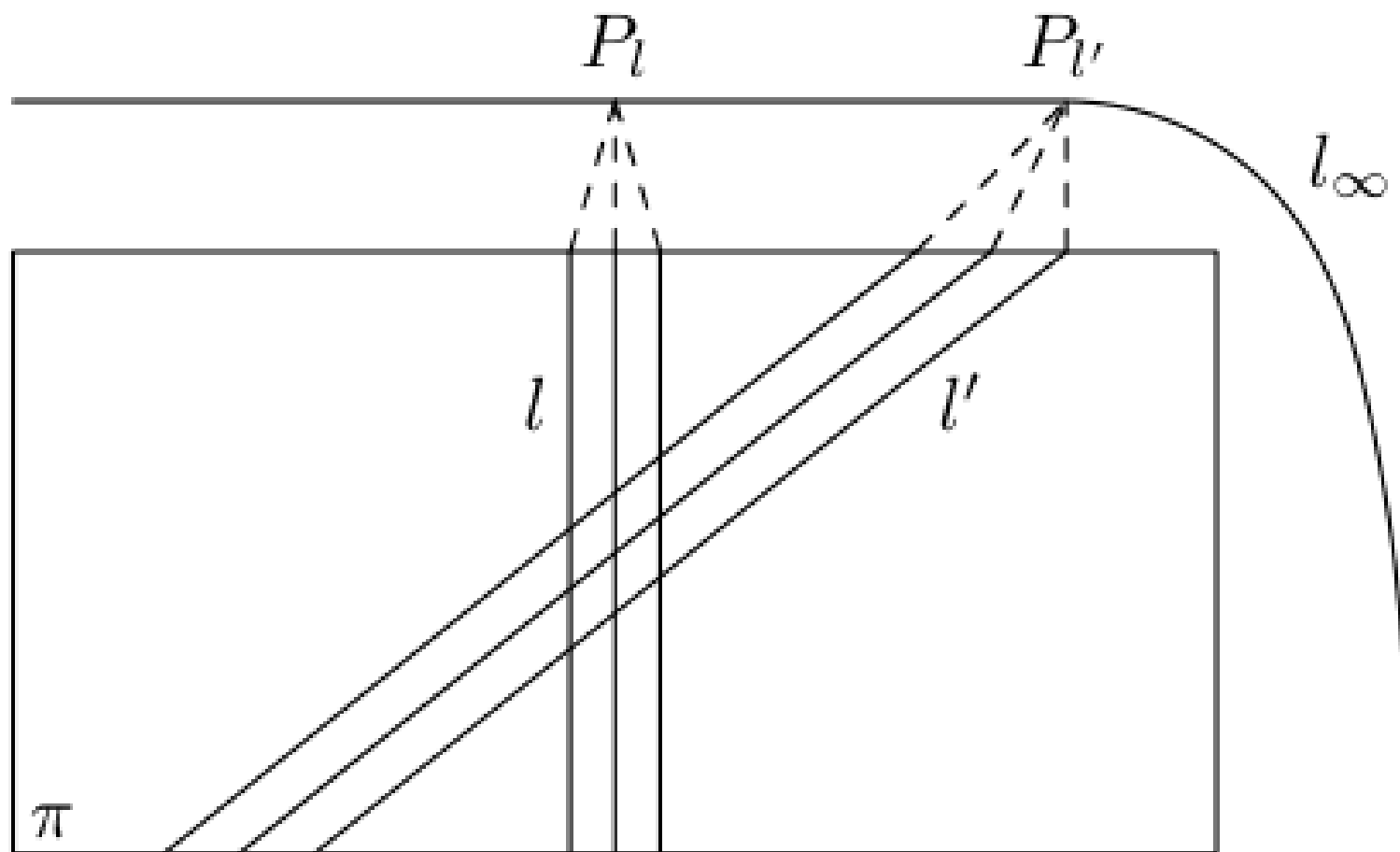


Figur 5.4 Personerna på bilden avbildar en luta på det lodräta planet vid bordetshögra ände. Ett snö
(Sida 189)

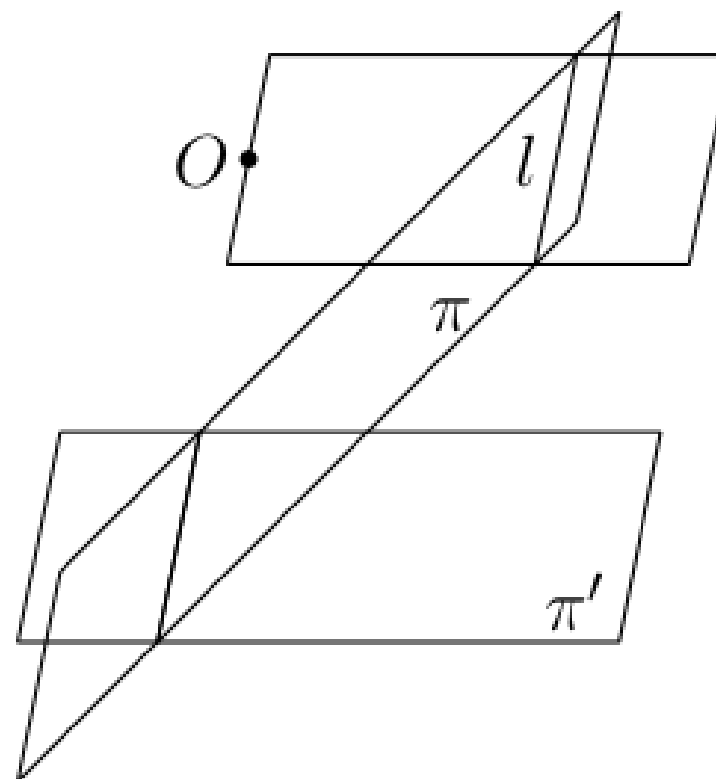
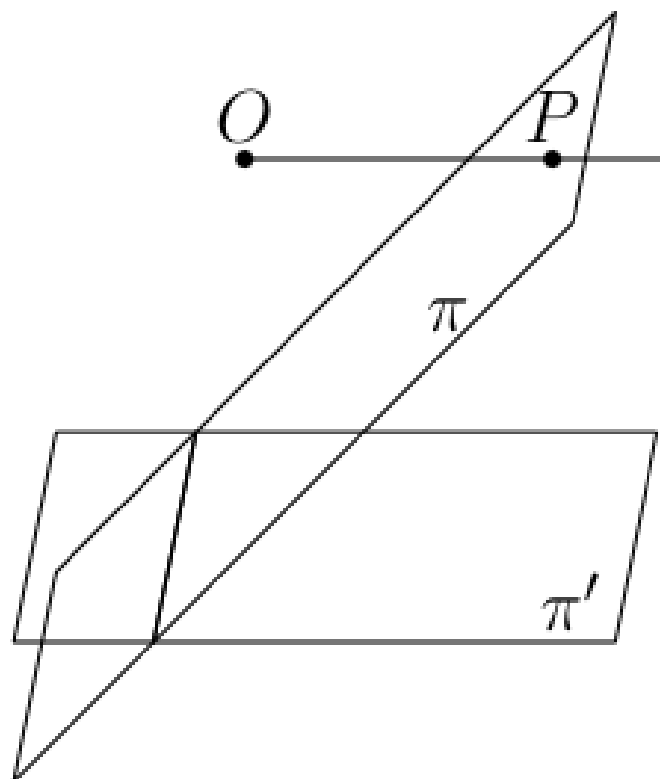
säger att P och P' är *perspektiviska* med avseende på O . En rat linje



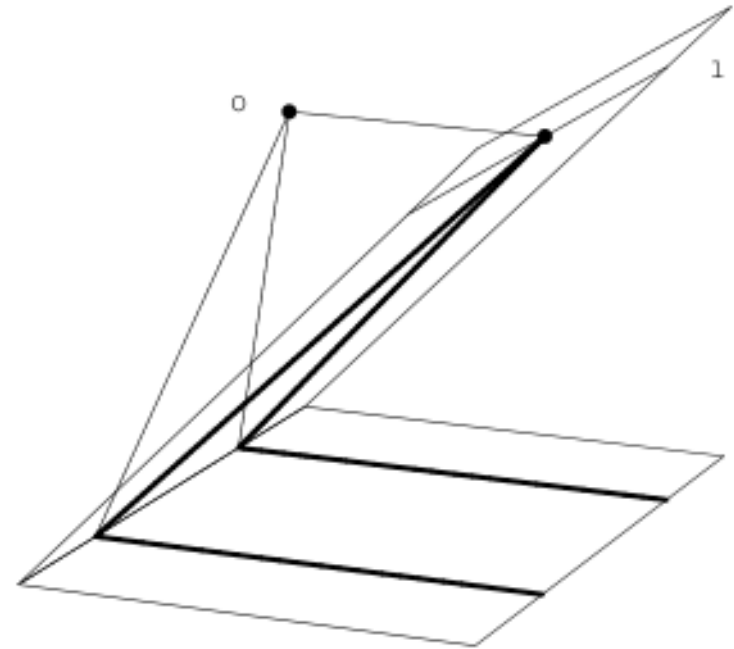
Figur 5.5 I den vänstra figuren är de två punkterna P och P' perspektiviska medavseende på O . Den hö



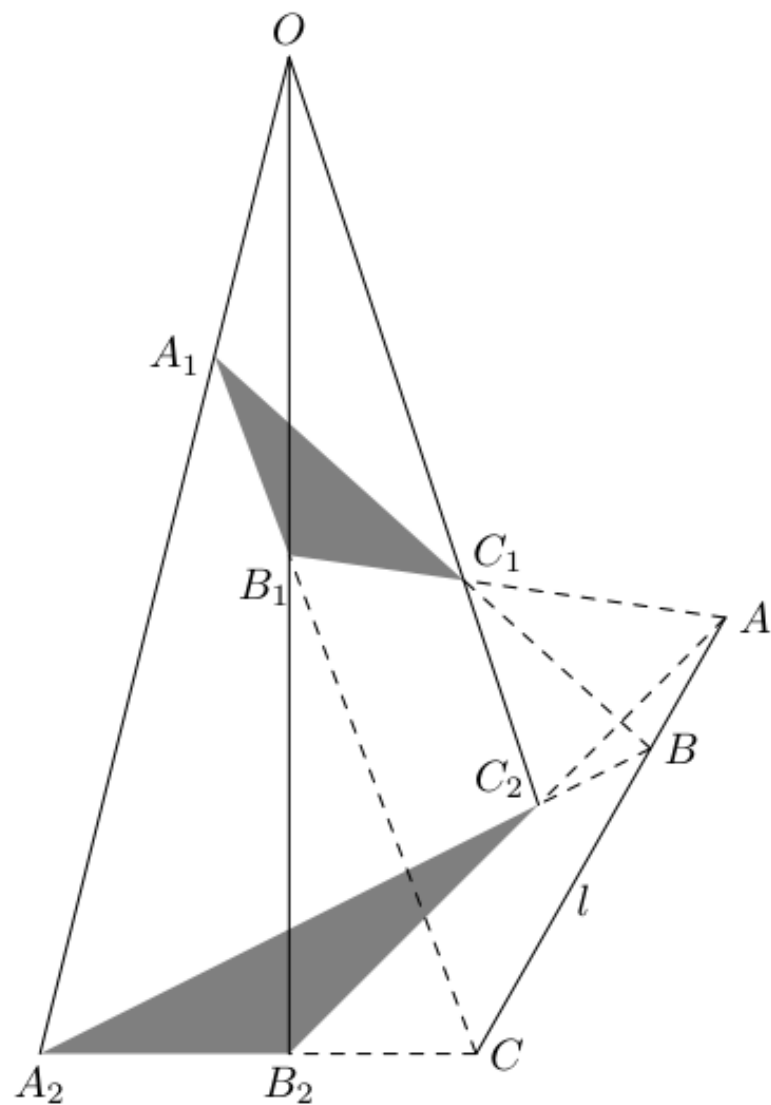
Figur 5.6 I denna figur har vi på ett naivt sätt försökt åskådliggöra det projek-tiva planet. Rektang
 (Sida 191)



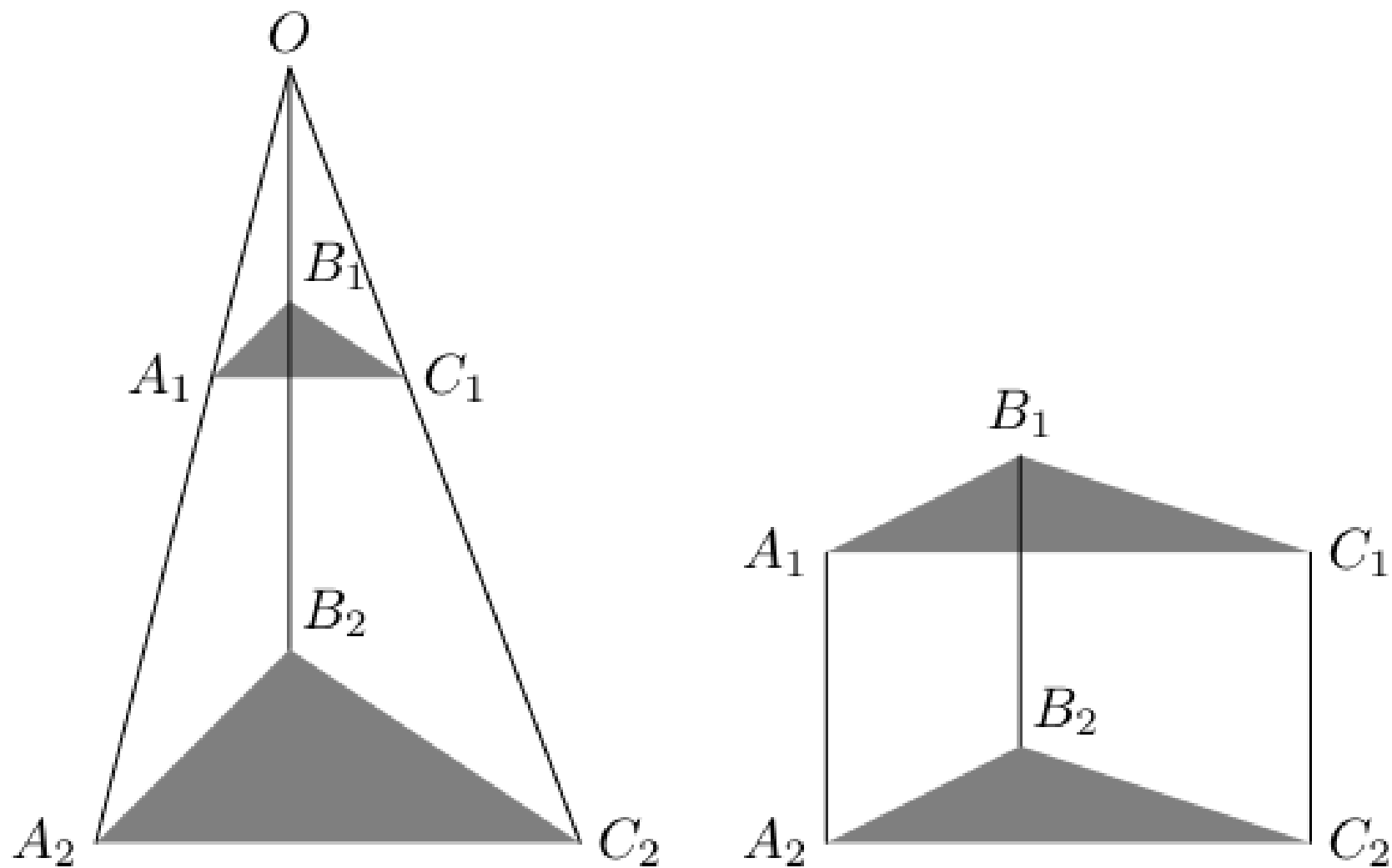
Figur 5.71 figuren till vänster är strålen genom O och P är parallell med planet π' . Den svarar alltså



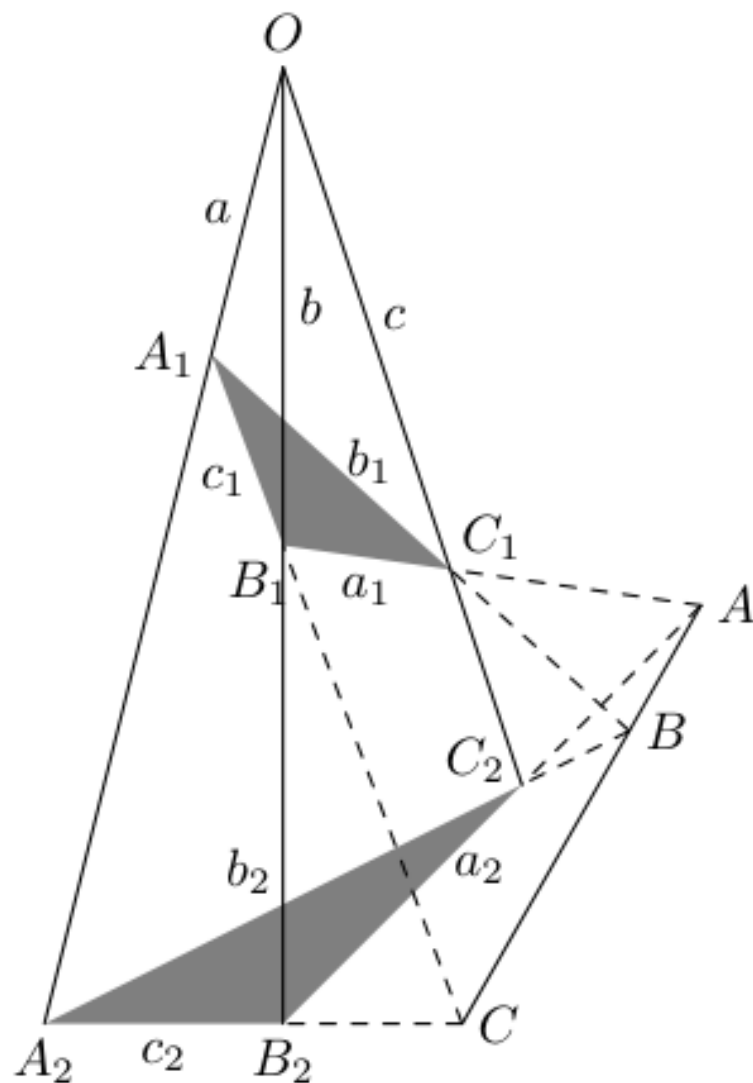
Figur 5.8 I vänstra bilden avbildas en väg som försvinner i en punkt vid horisonten. I den högra bild
(Sida 193)



Figur 5.9
(Sida 194)

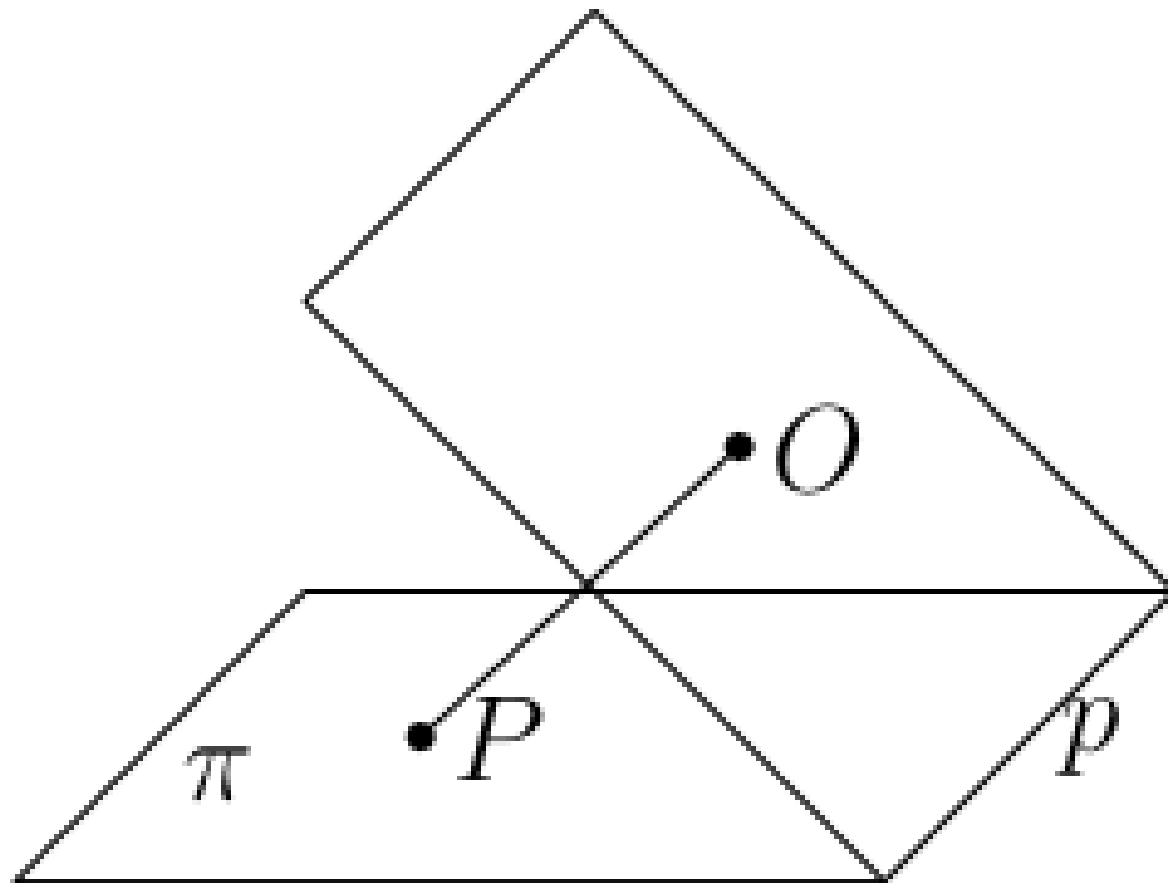


Figur 5.10
(Sida 196)

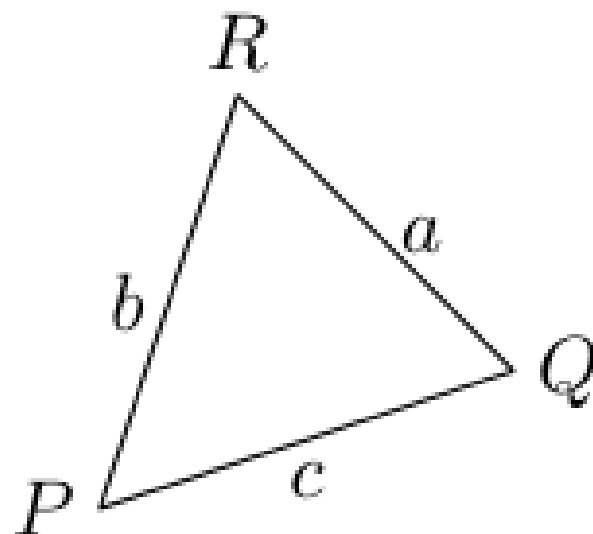
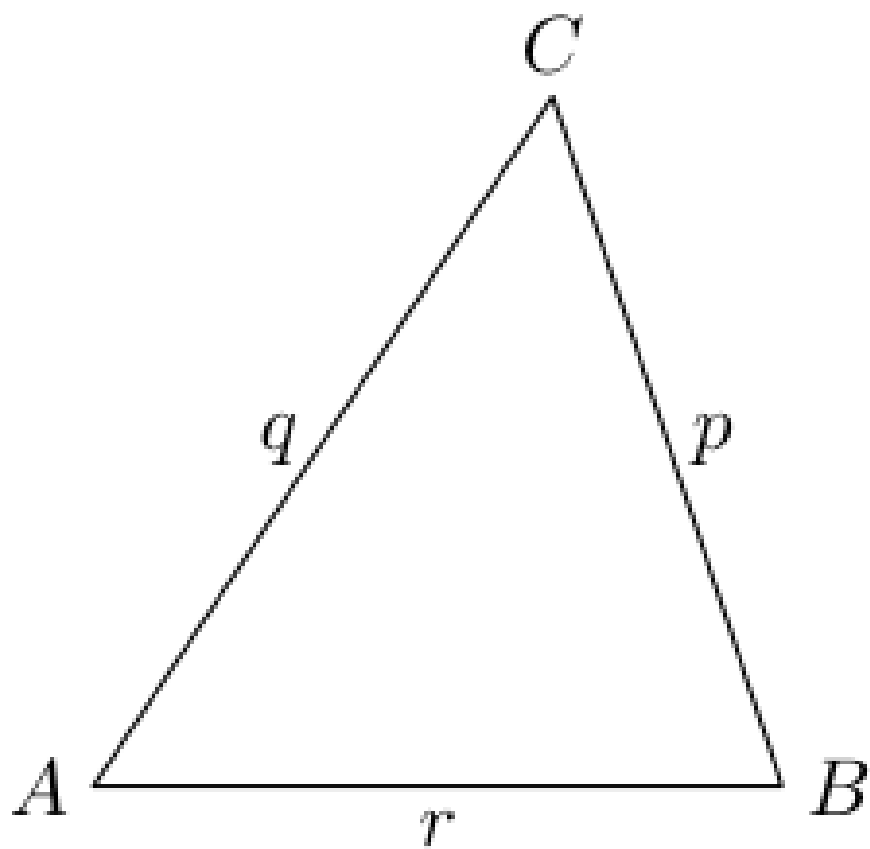


Figur 5.11
(Sida 198)

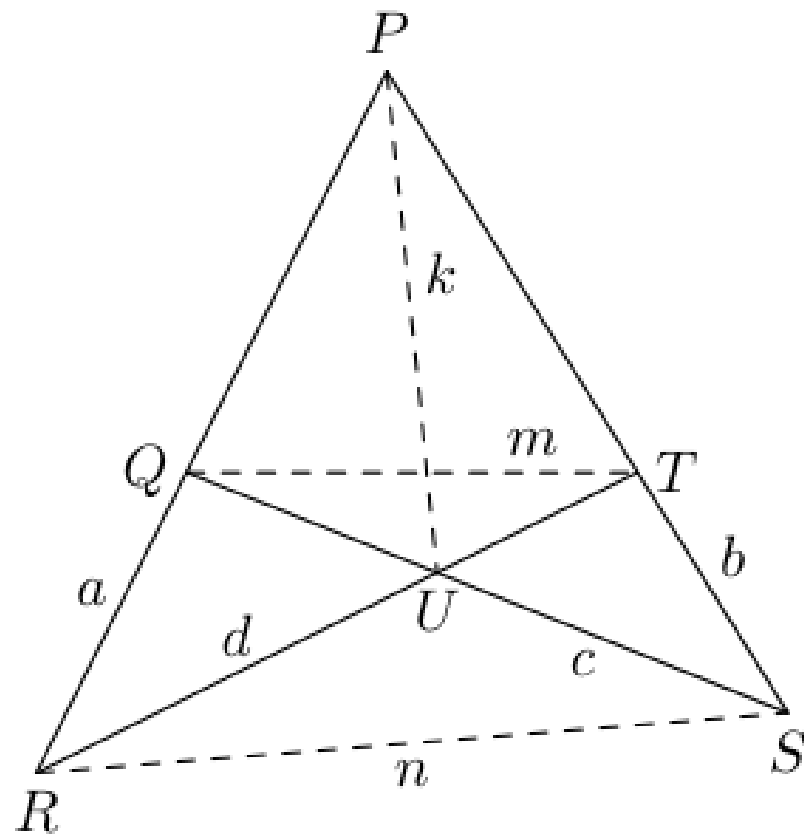
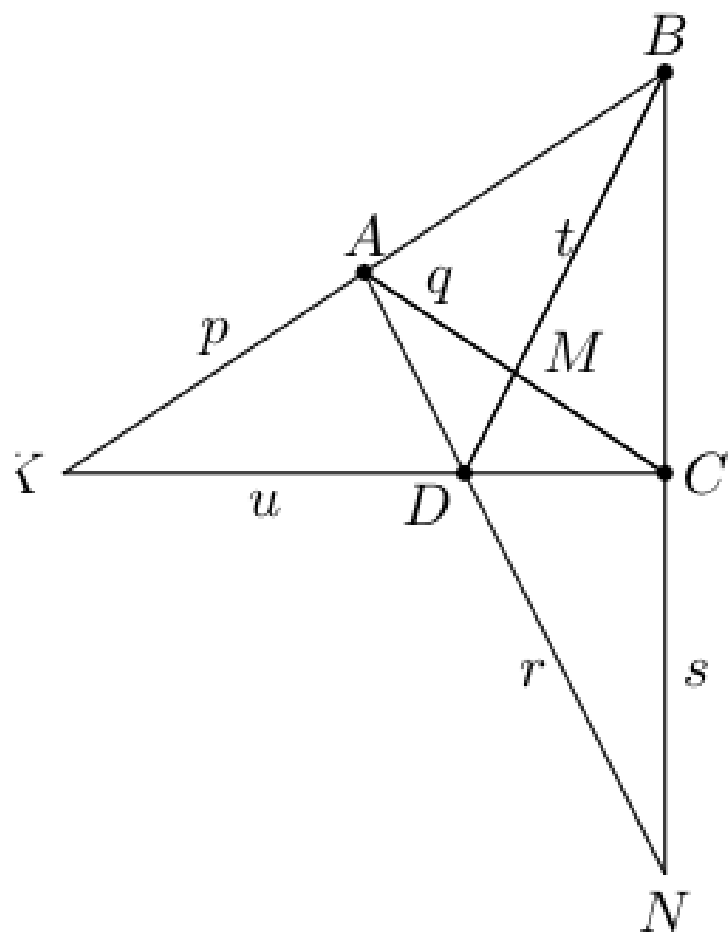
à $1/\pi$. Om nu två plan genom O



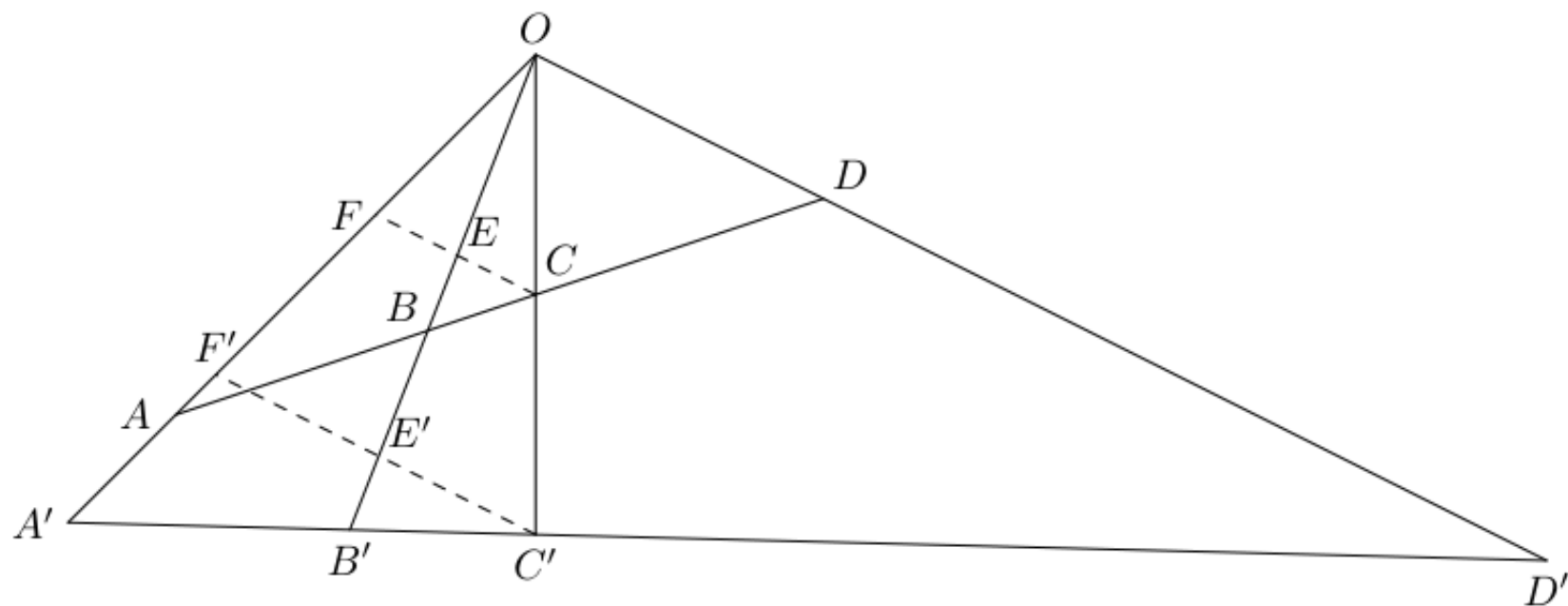
Figur 5.12
(Sida 200)



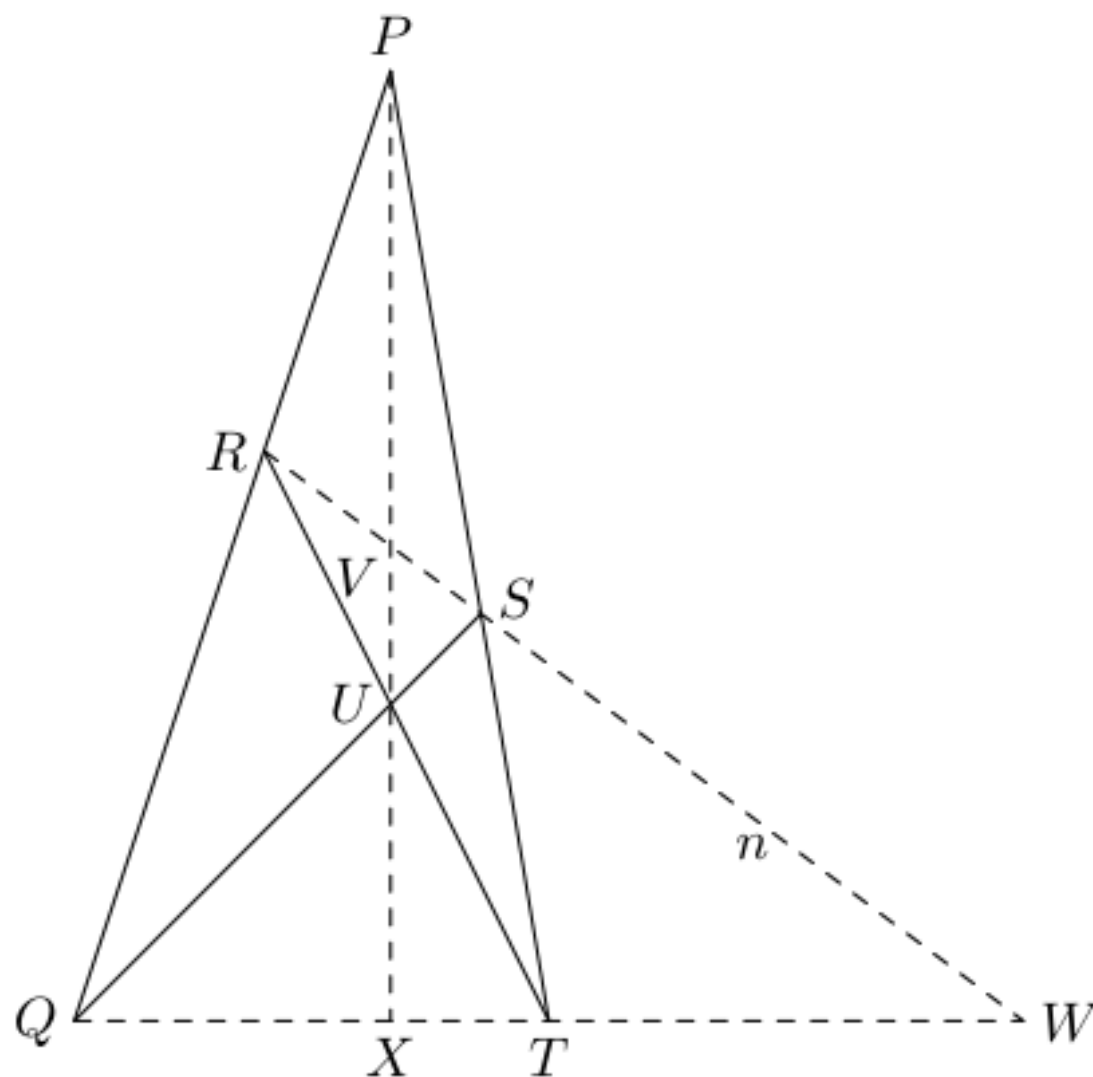
Figur 5.13
(Sida 201)



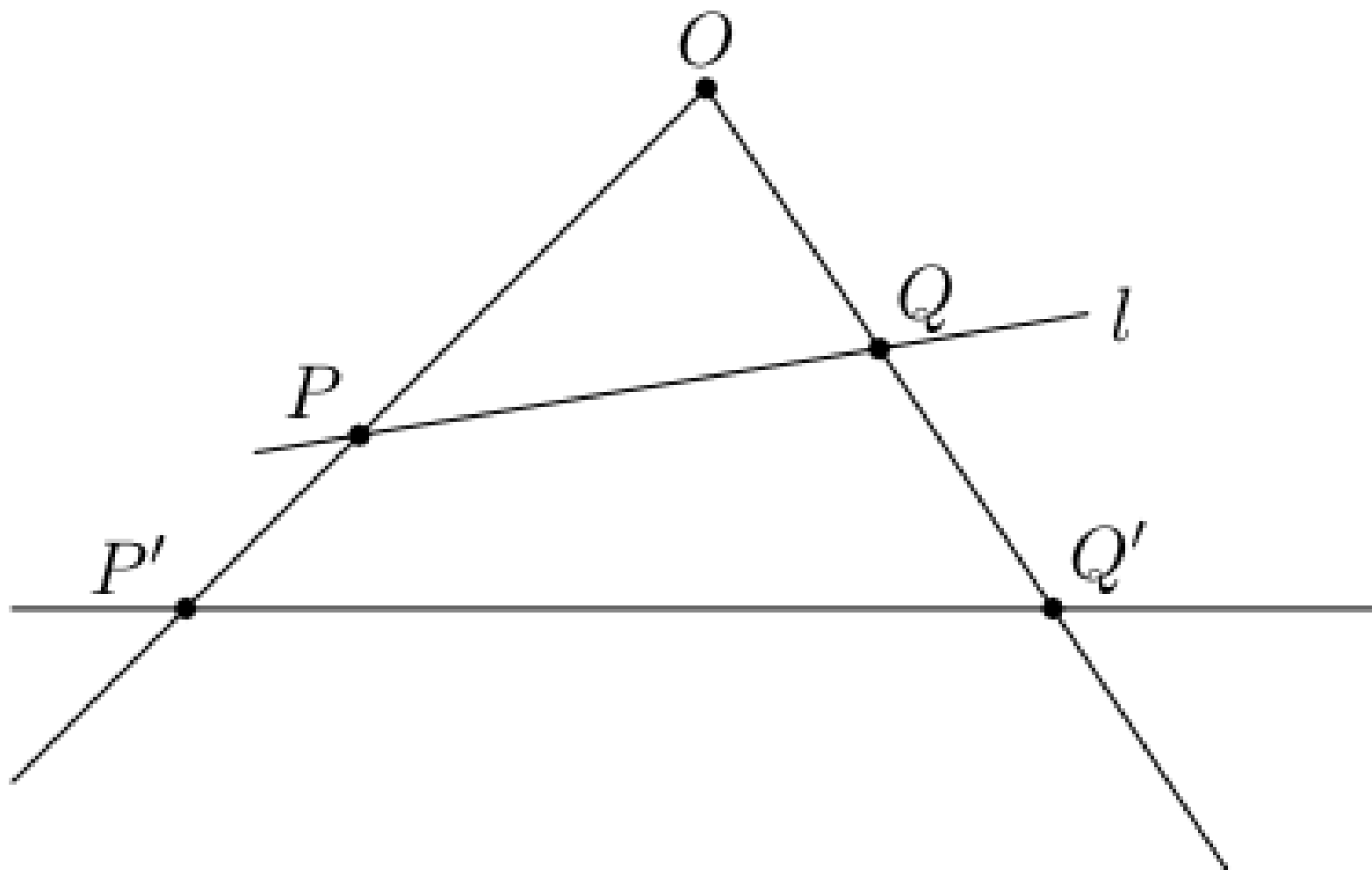
Figur 5.14
(Sida 202)



Figur 5.15
(Sida 205)

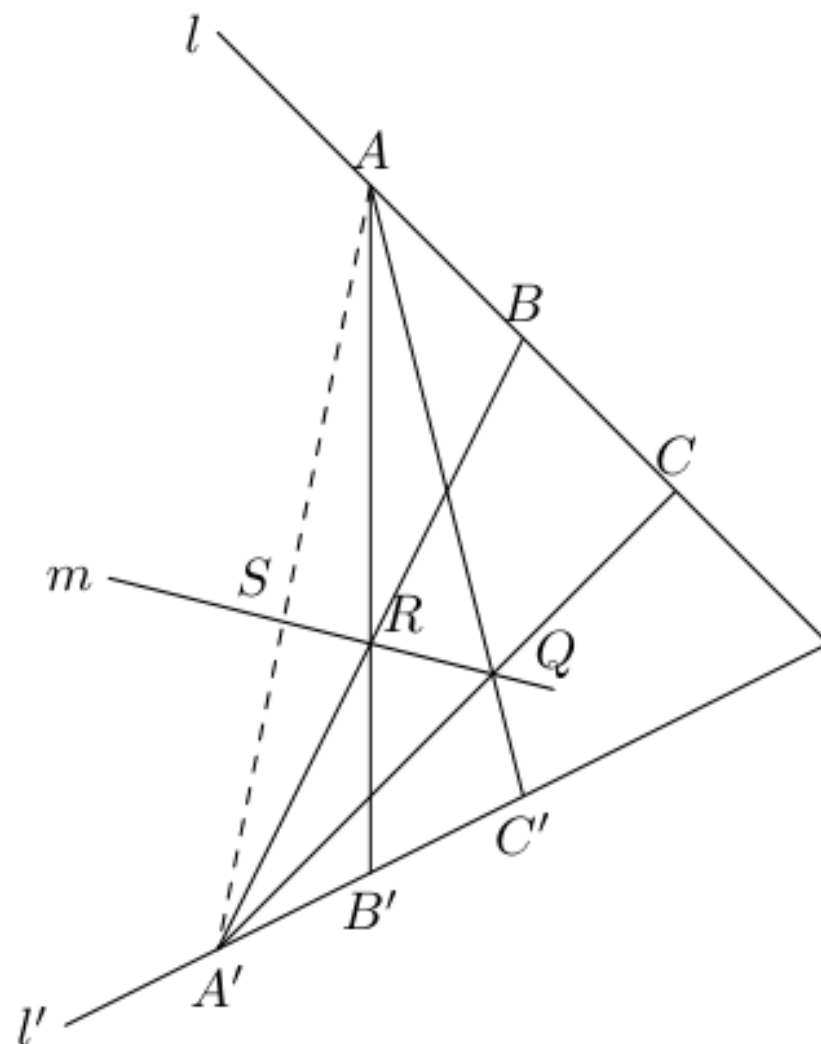


Figur 5.16
(Sida 206)

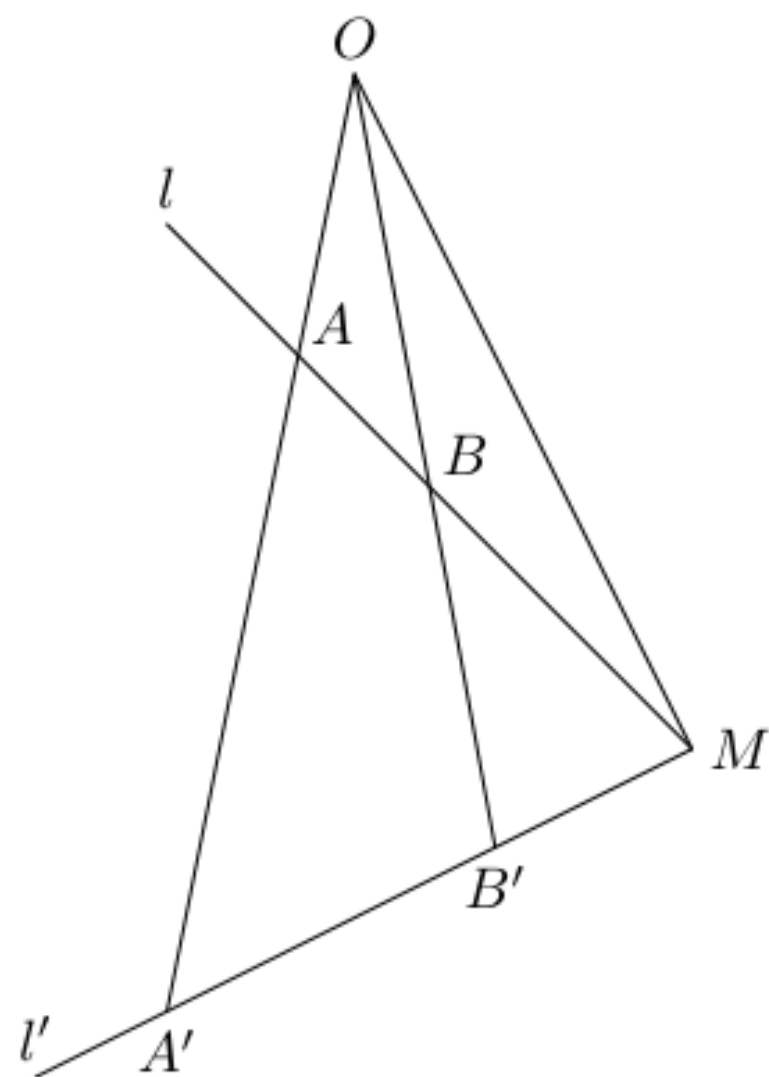


Figur 5.17 En perspektivisk avbildning från l till l' med centrum i O . Punkterna P och Q avbildas på
(Sida 209)

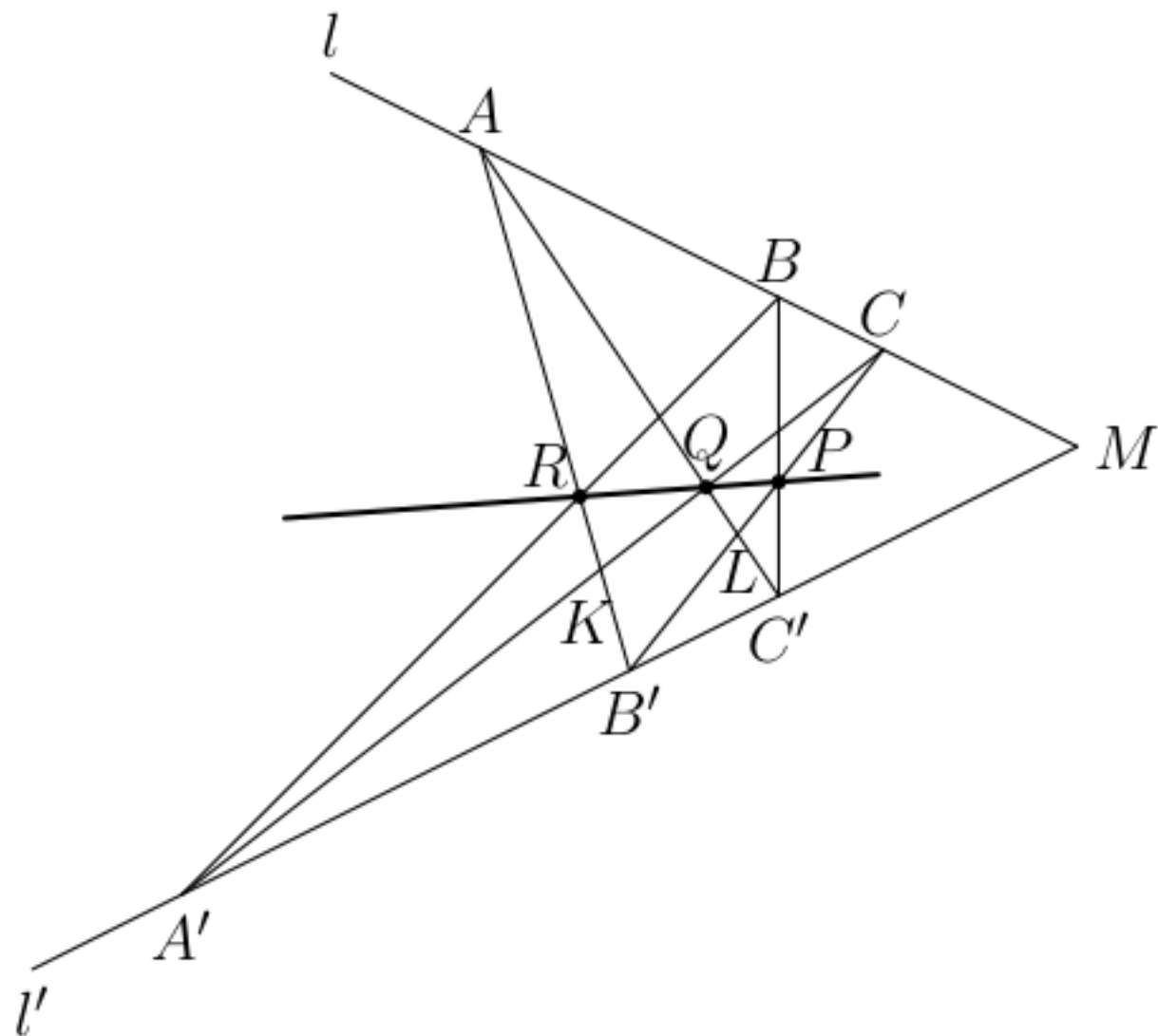
Onka. Punkten A förbindes med punkte.



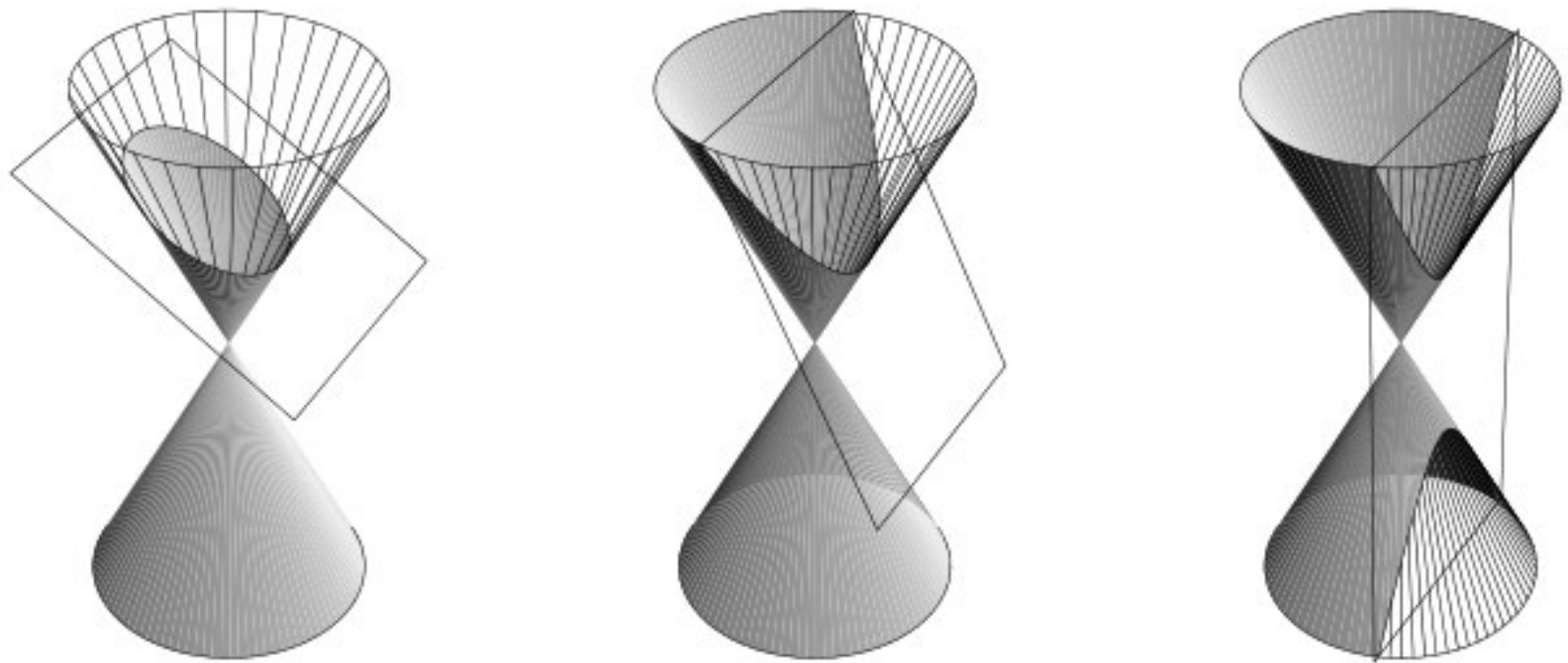
Figur 5.18
(Sida 210)



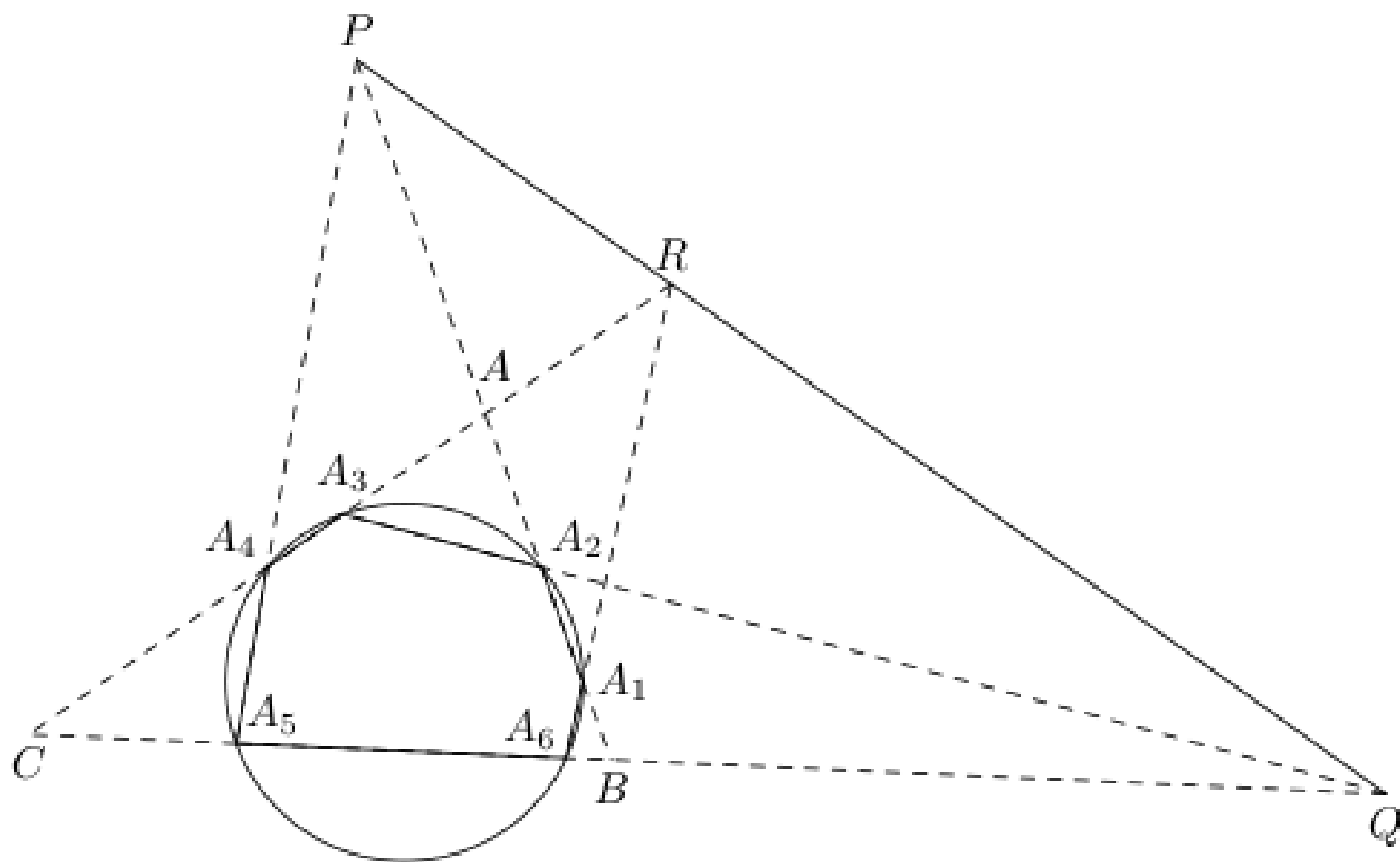
Figur 5.19
(Sida 212)



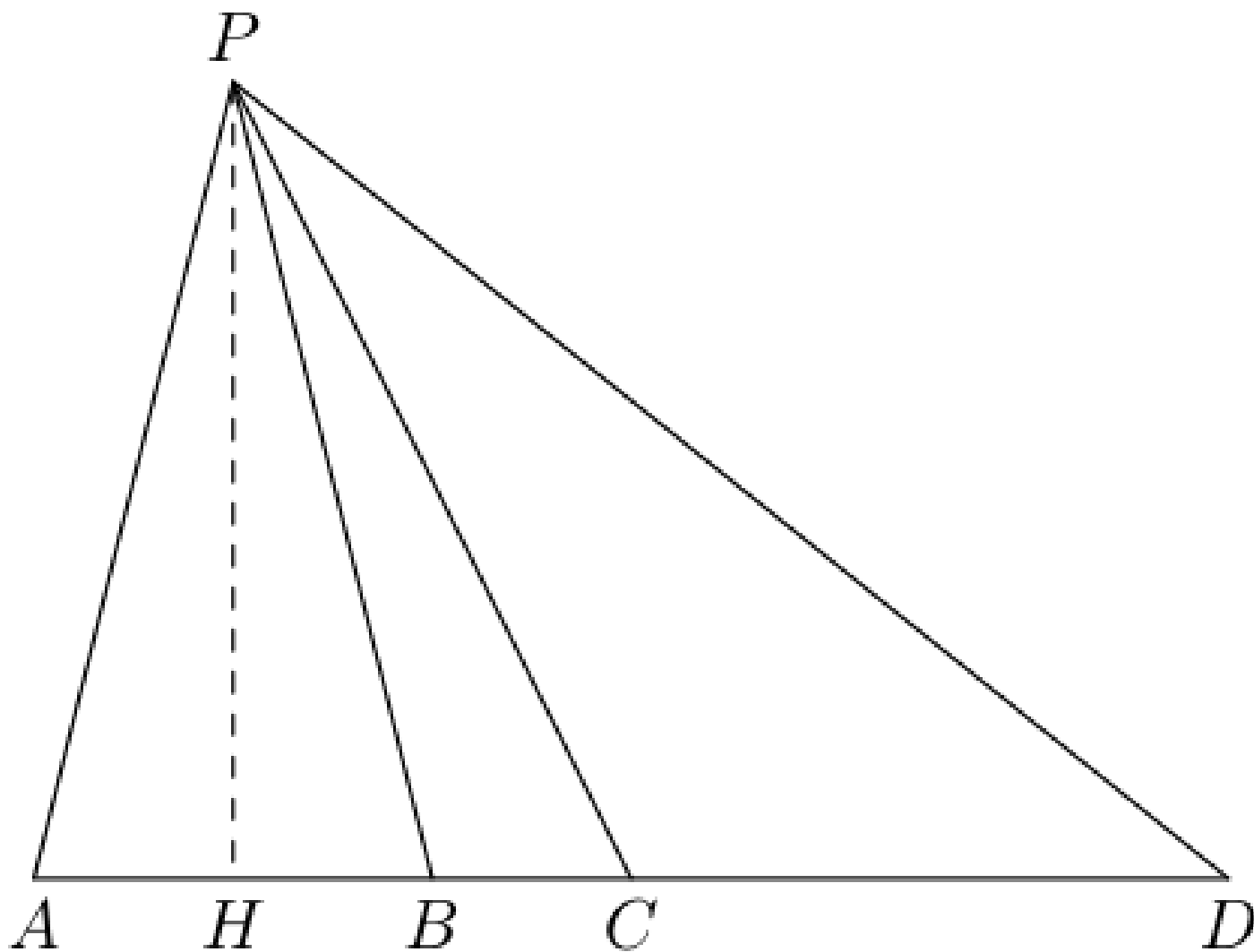
Figur 5.20
(Sida 213)



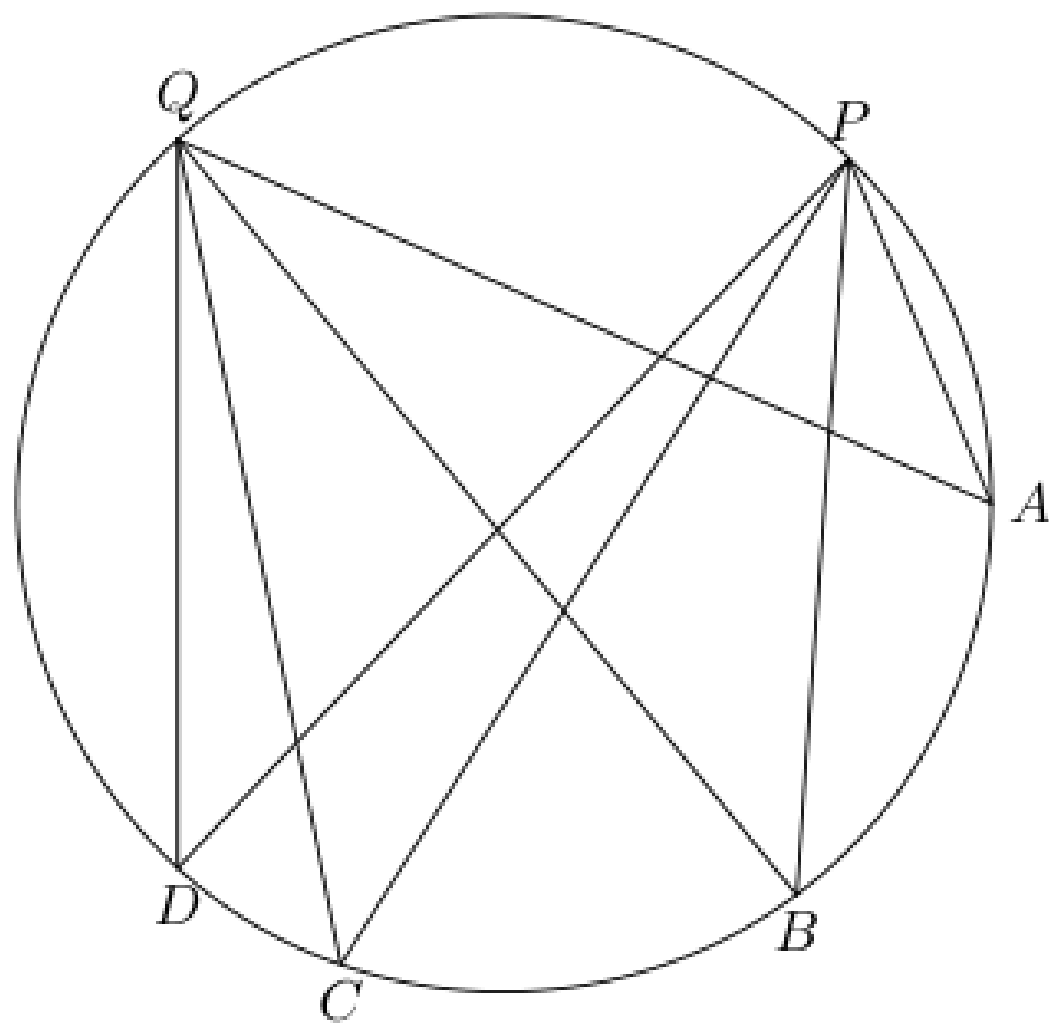
Figur 5.21
(Sida 214)



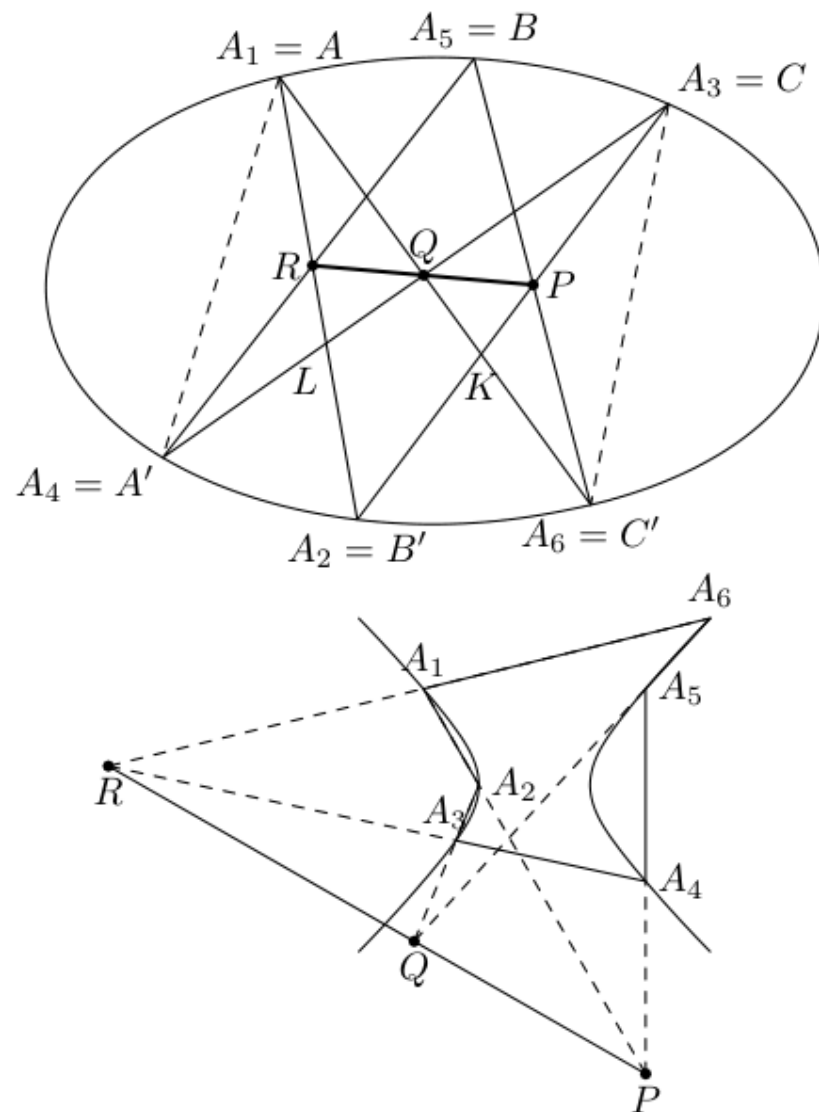
Figur 5.22
(Sida 215)



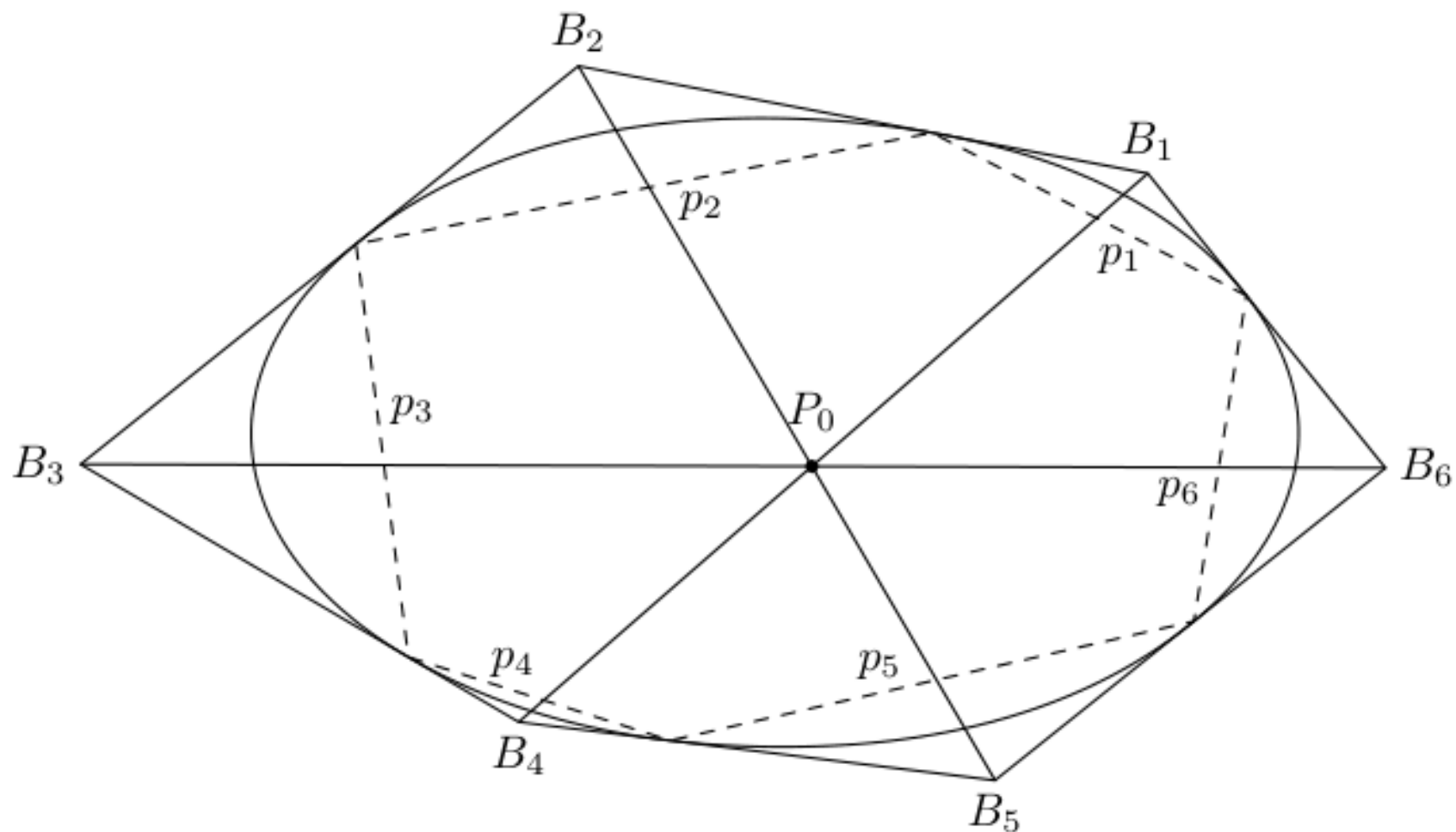
Figur 5.23
(Sida 216)



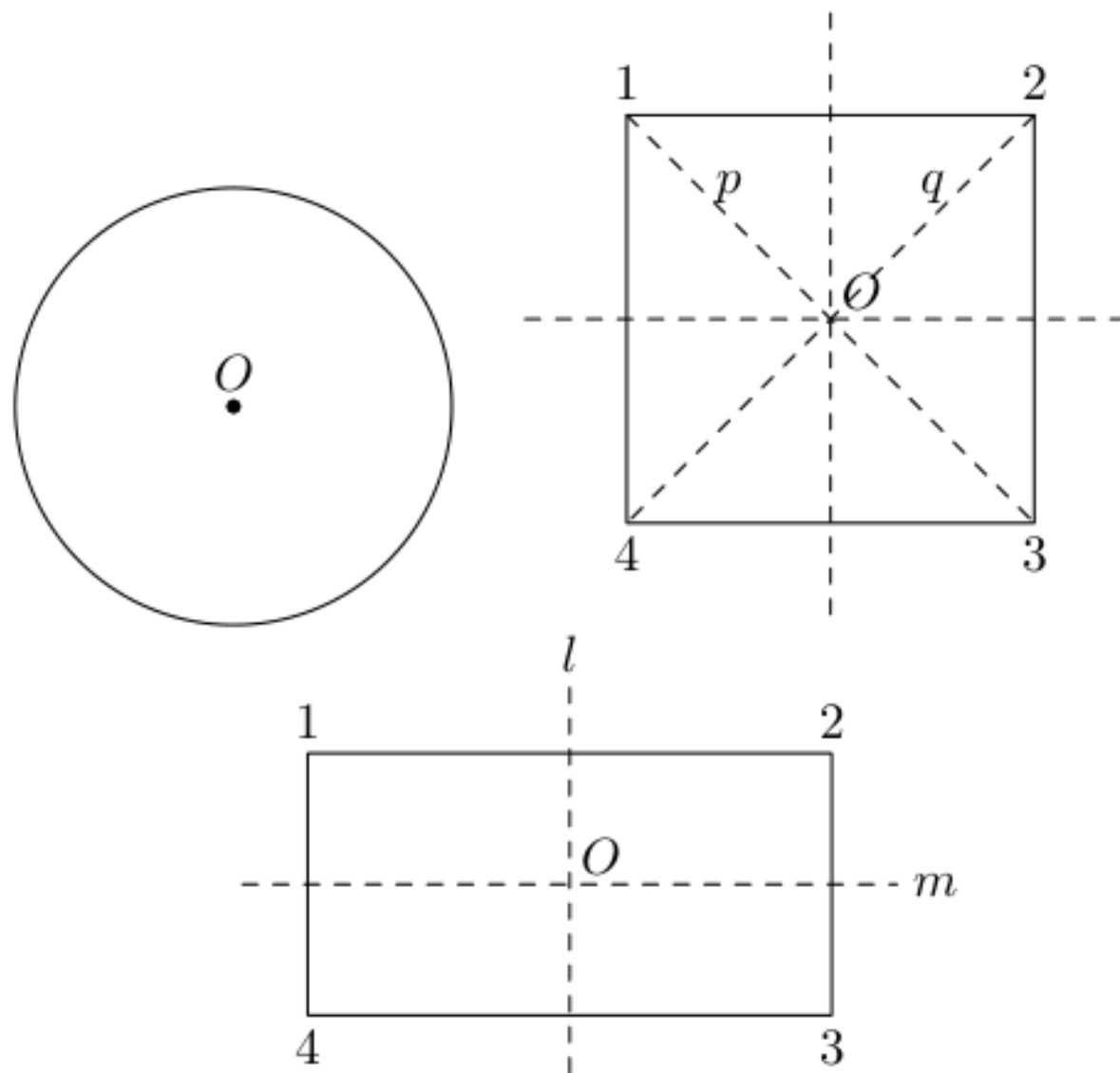
Figur 5.24
(Sida 217)



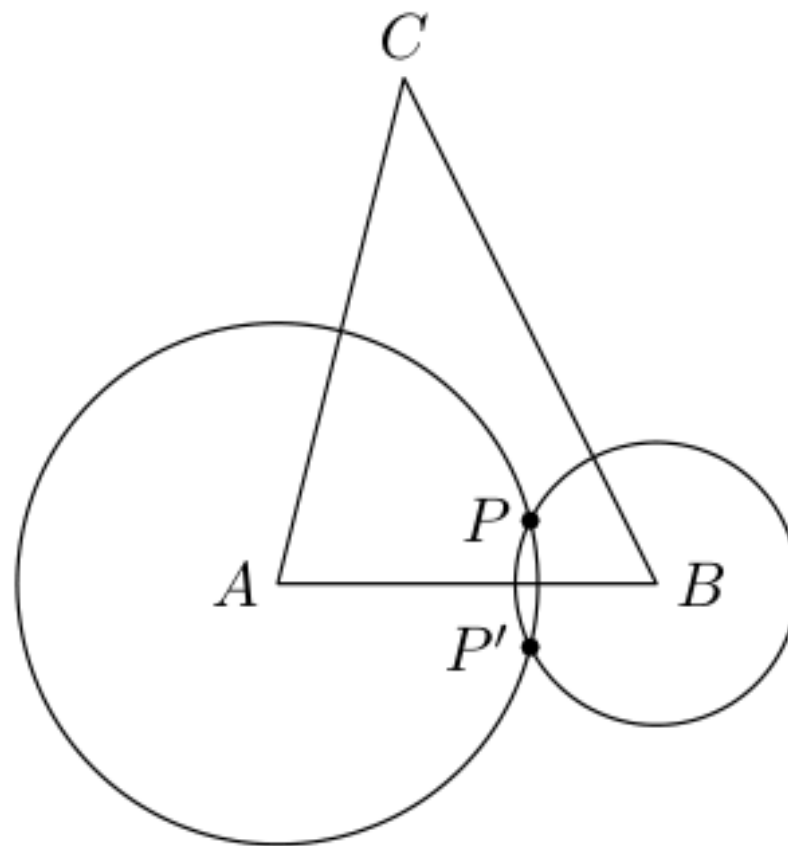
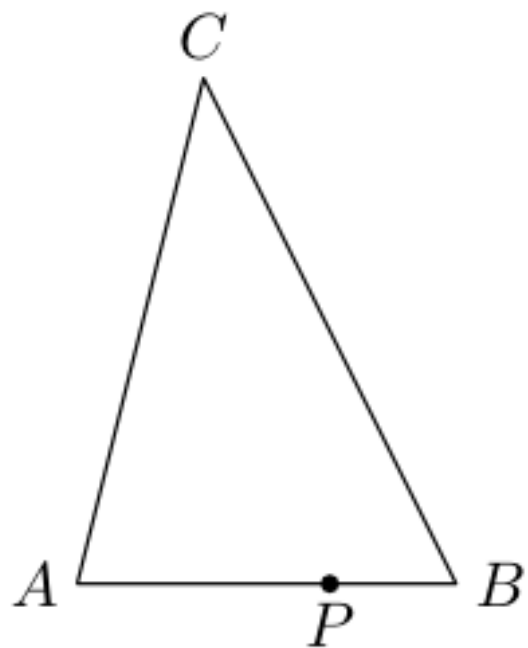
Figur 5.25
(Sida 218)



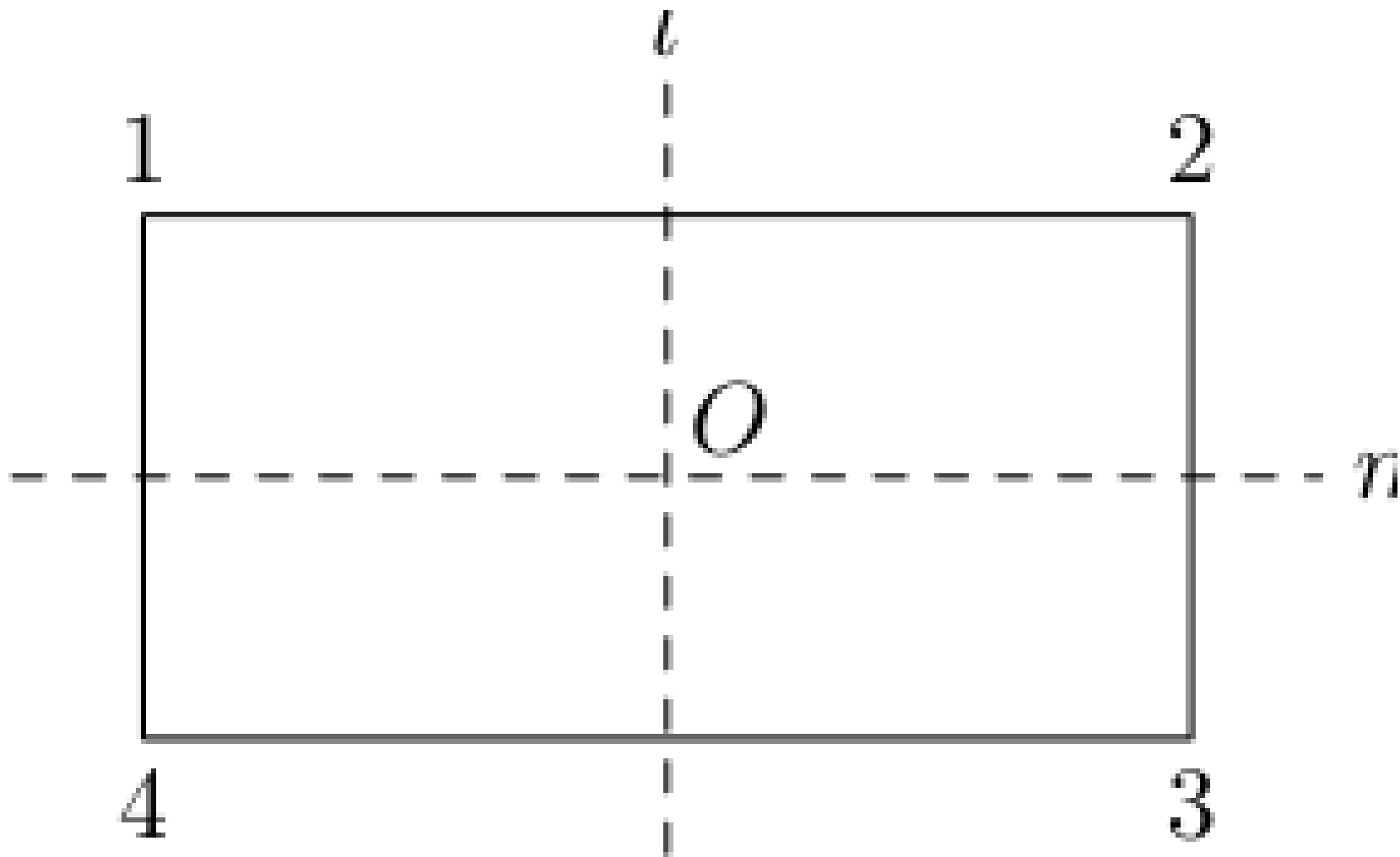
Figur 5.26 I figuren visas hur de tre rätta linjer som förbinder motstående hörn i den omkring ellipsen o
 (Sida 220)



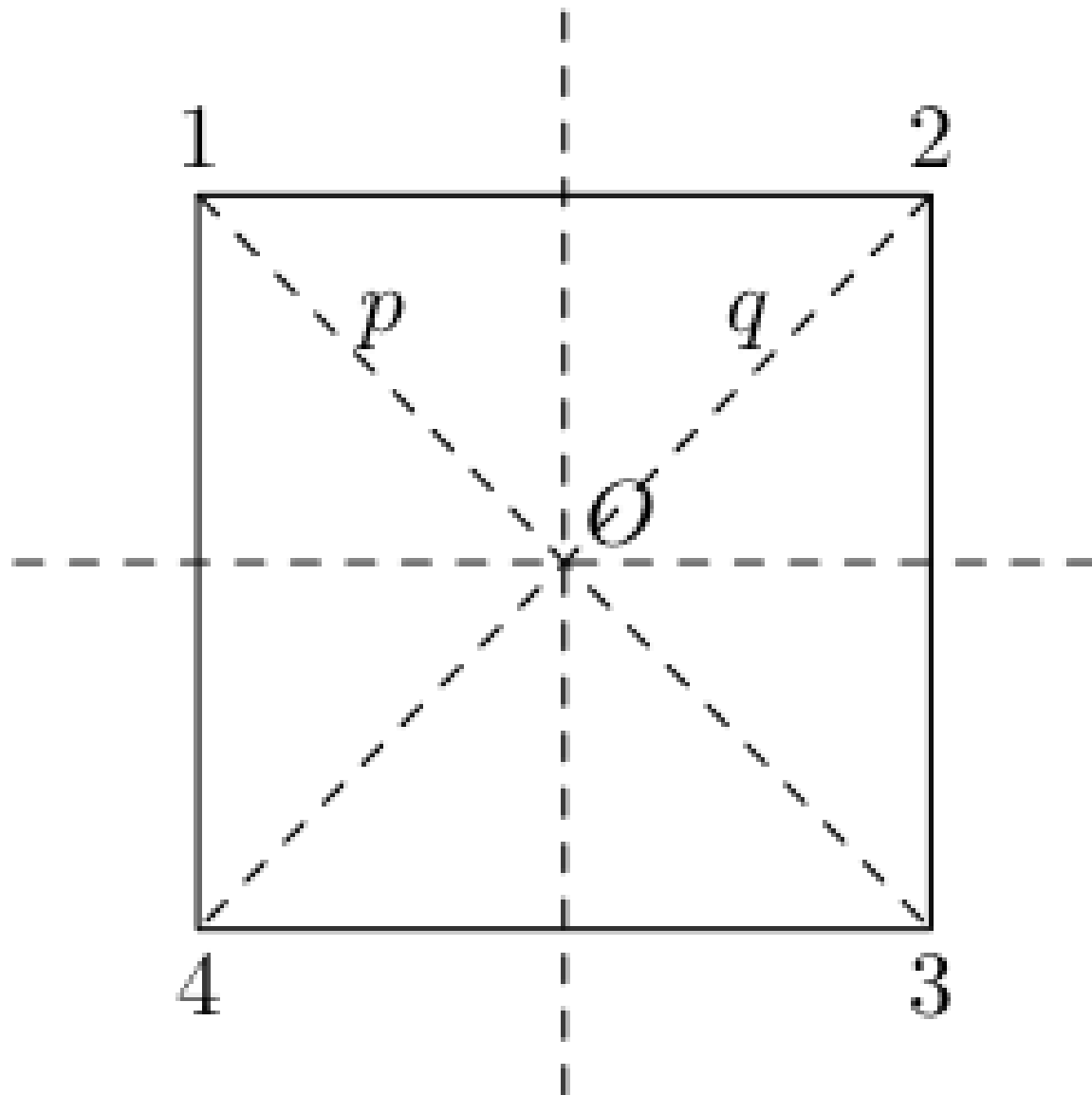
Figur 6.1
(Sida 226)



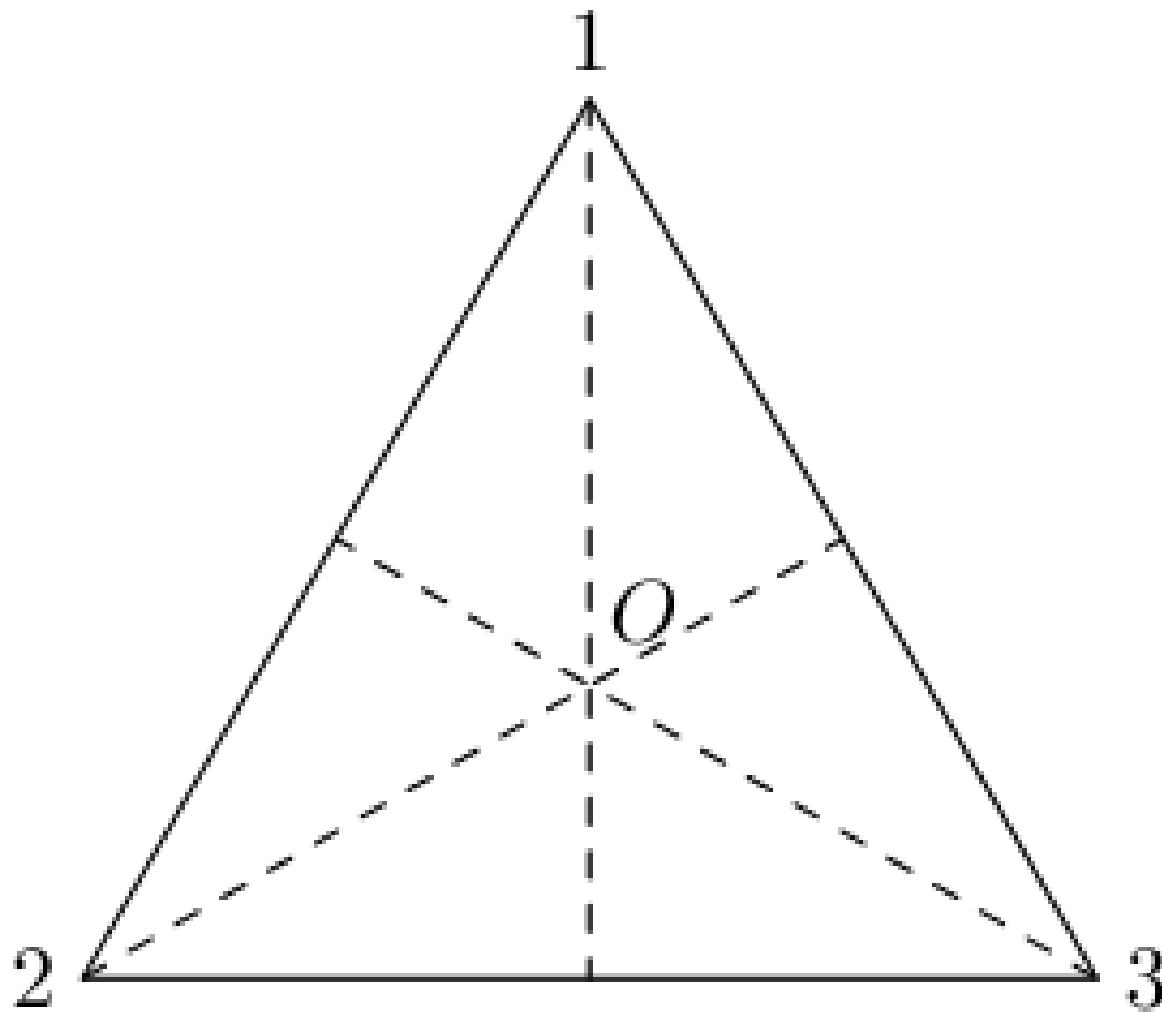
Figur 6.2 I den vänstra figuren ligger punkten P på den räta linjen AB. Då är P entydigt bestämd av av
(Sida 228)



Figur 6.3
(Sida 233)

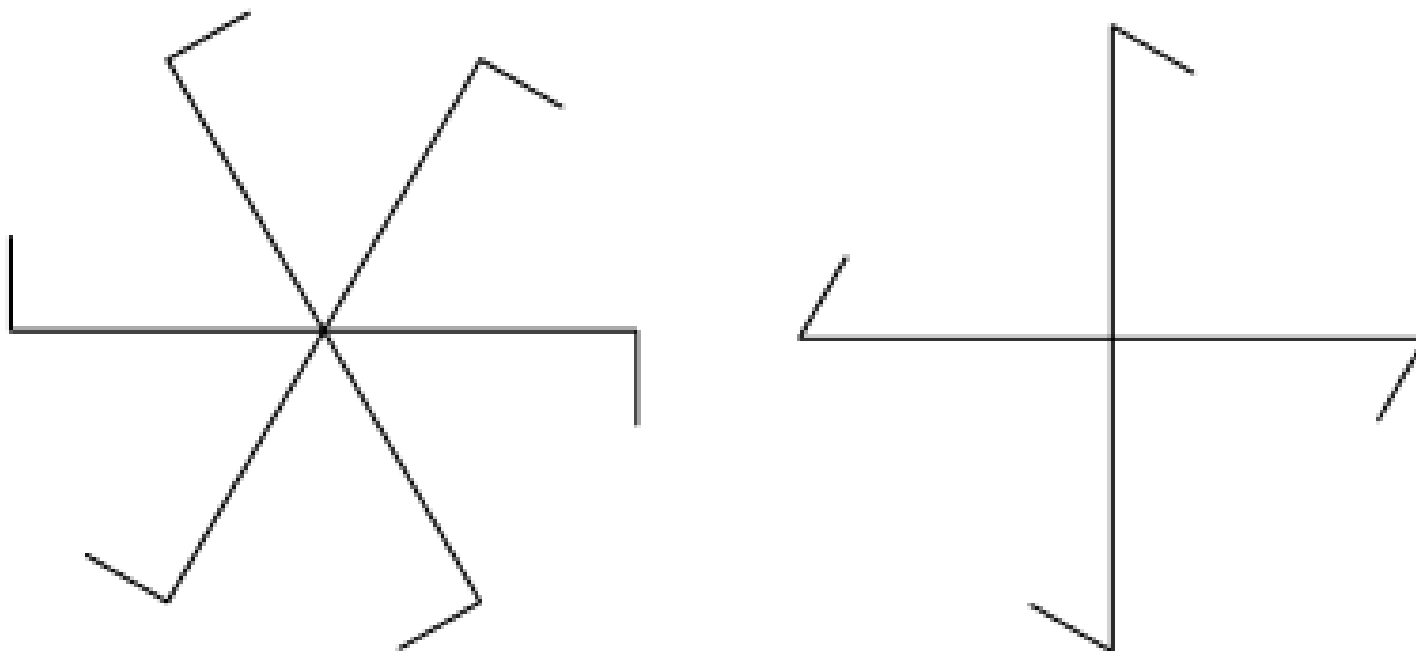


Figur 6.4
(Sida 234)



Figur 6.5
(Sida 242)

I'



Figur 6.6 De båda figurerna har symmetrigrupperna Z_n för $n = 6$ respektive $n = 4$.

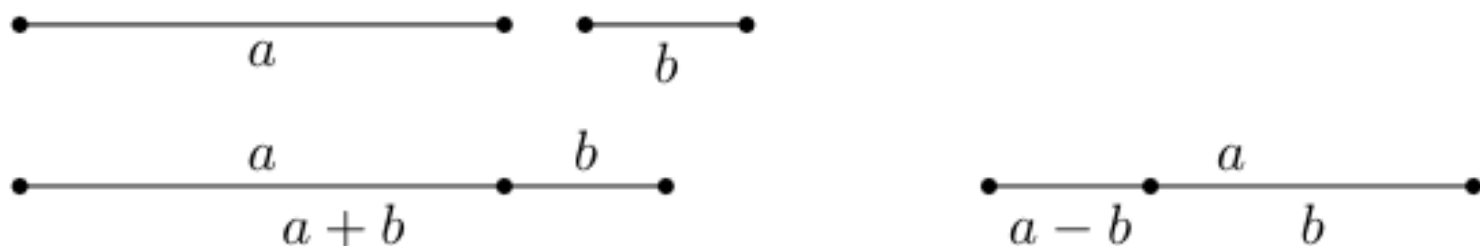
(Sida 245)

Kapitel 7 Teorin för talkroppar – ett hjälpmedel i geometrin

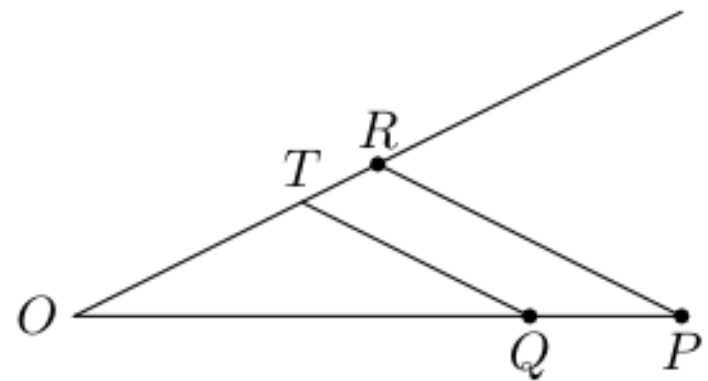
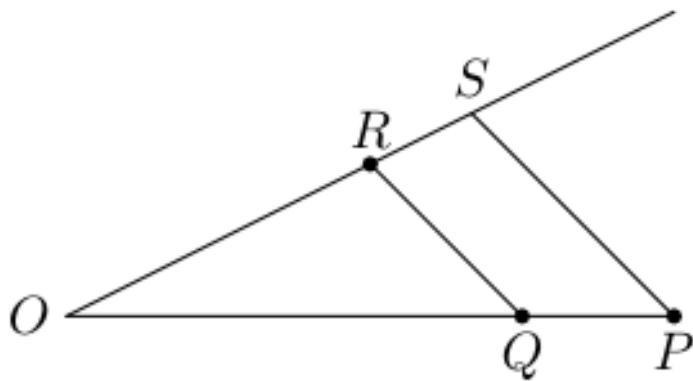
Bevis

Det räcker uppenbarligen att visa satsen då $a > 0$ och $b > 0$. Vi kan också förutsätta att $a > b$.

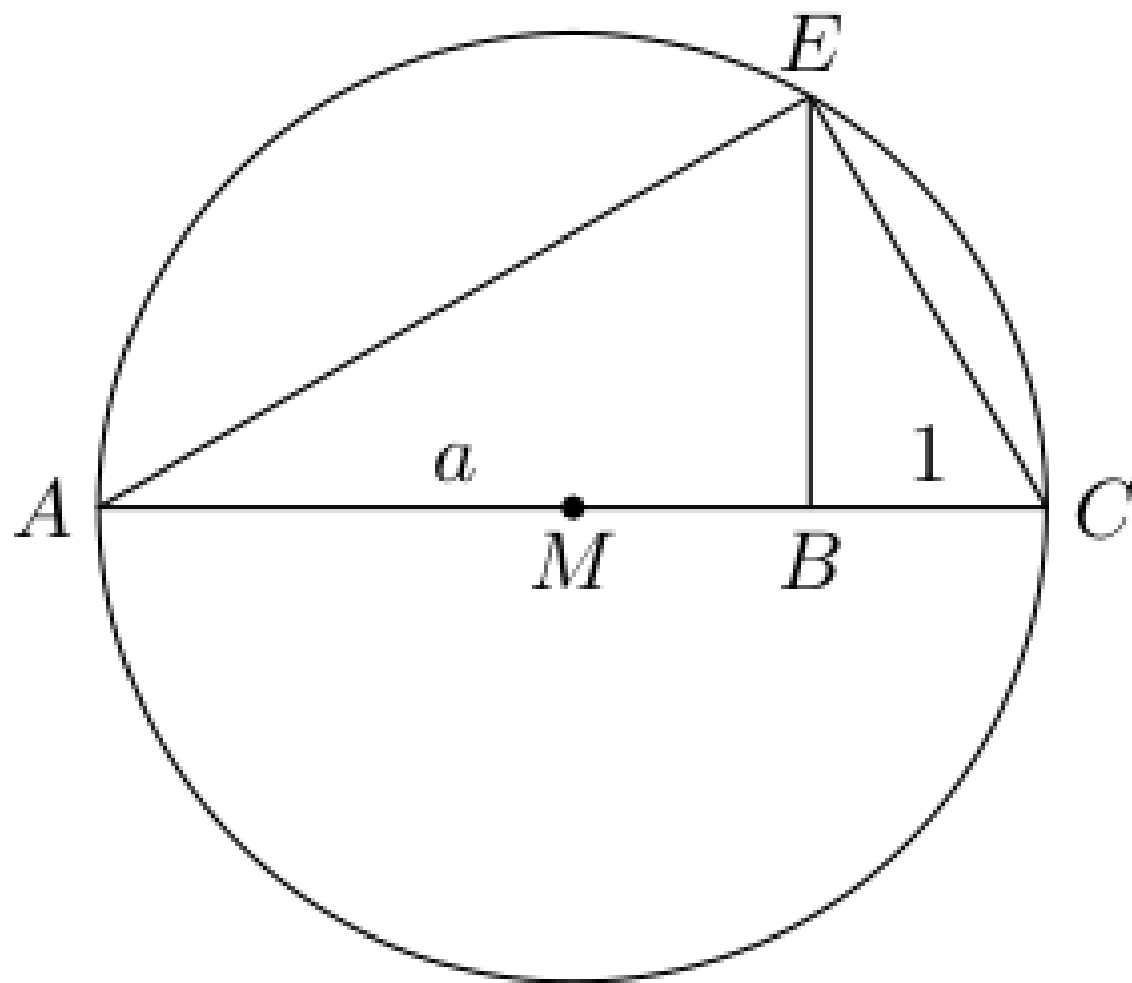
Sträckorna med längderna $a, b, a + b$ och $a - b$ är uppritade i figur 7.1. Läsaren kan själv beskriva hur $a + b$ och $a - b$ konstrueras om a och b är givna.



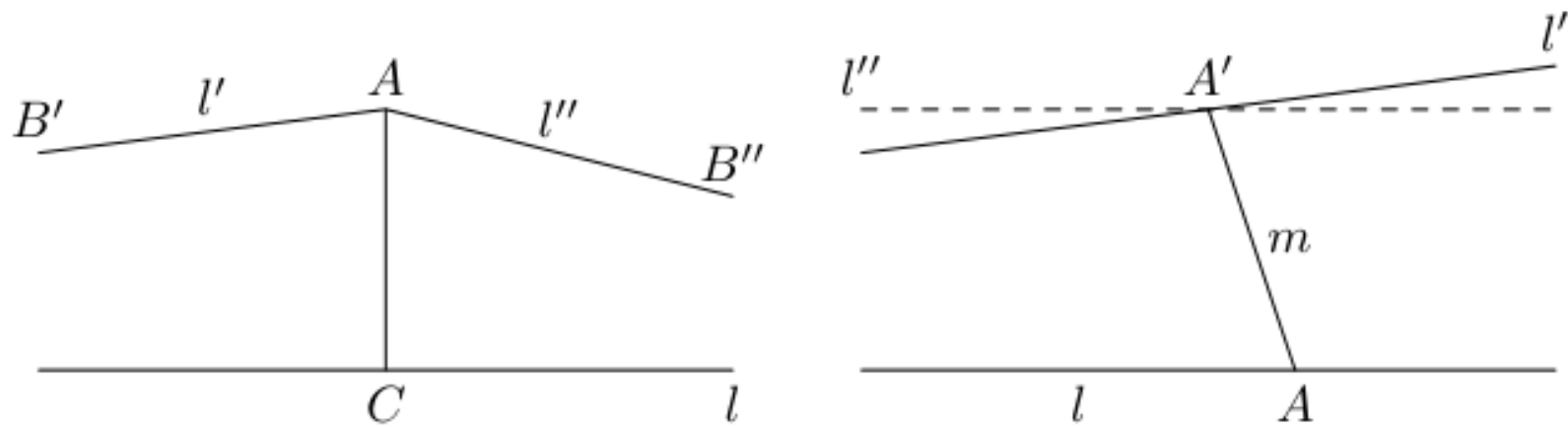
Figur 7.1
(Sida 254)



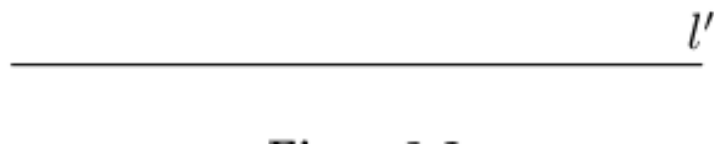
Figur 7.2 I båda figurerna är $OQ = 1$, $OR = a$ och $OP = b$. I den vänstra figuren har vi konstruerat $OS =$
(Sida 254)



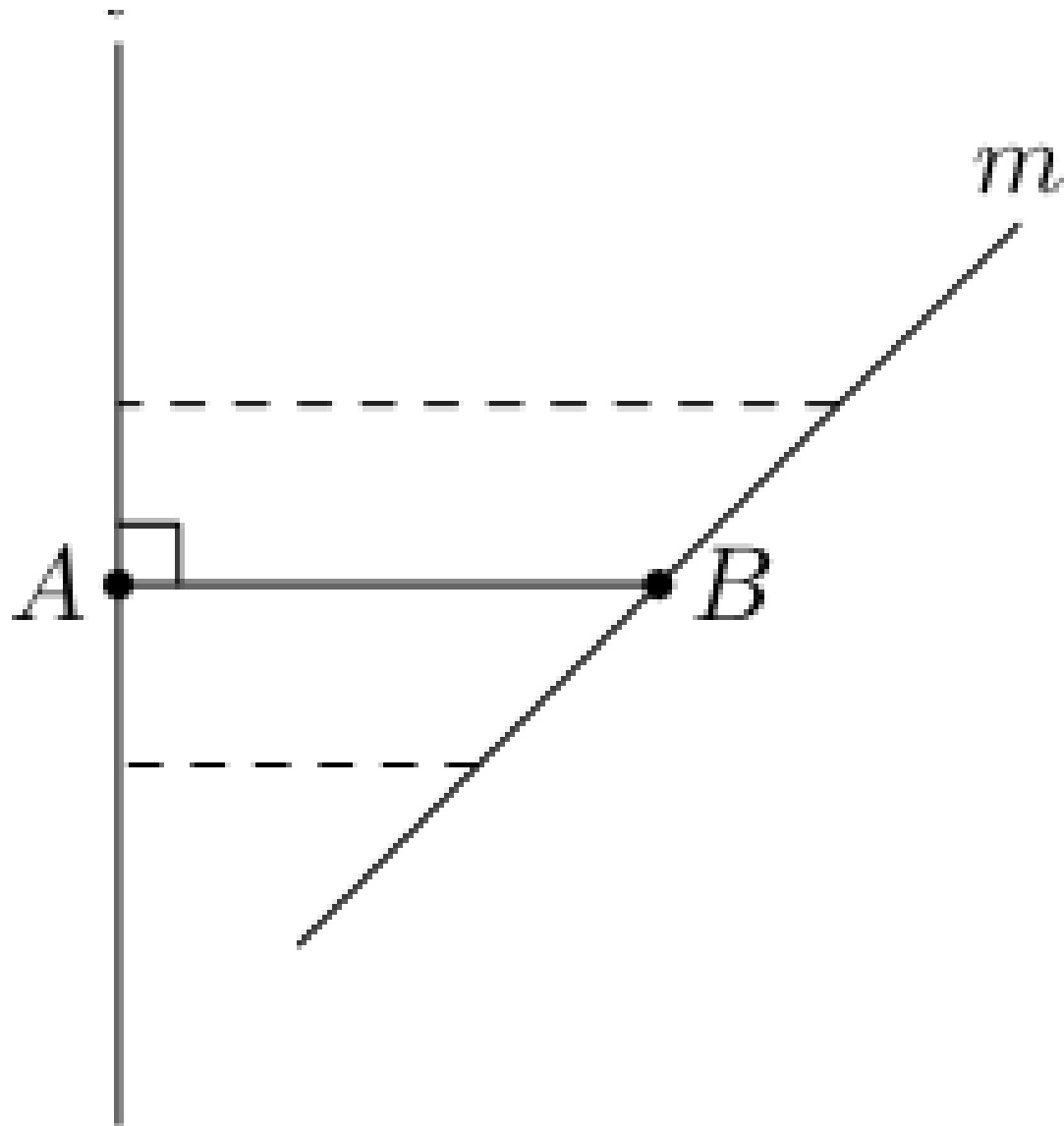
Figur 7.3
(Sida 255)



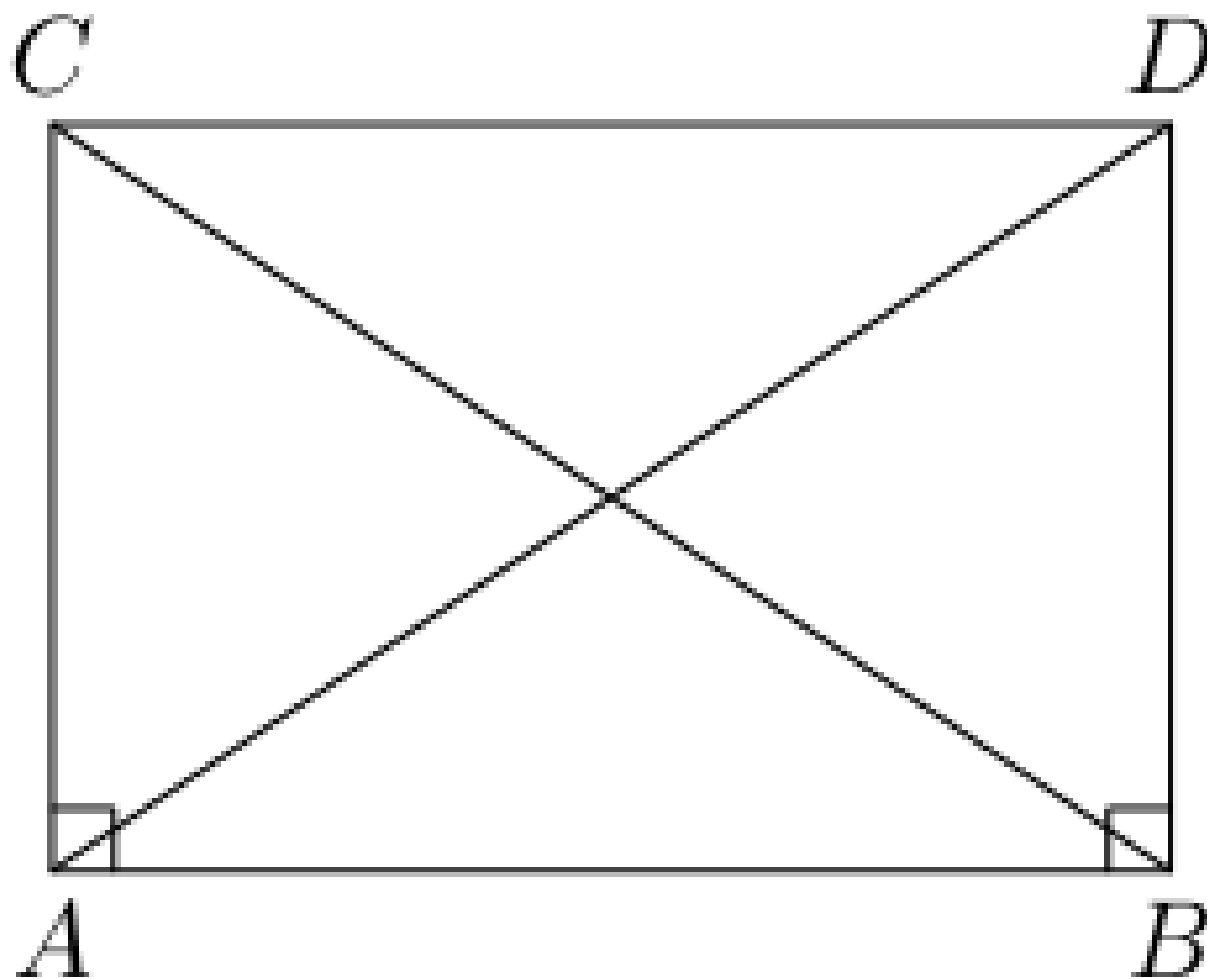
Figur 8.1
(Sida 271)



Figur 8.2
(Sida 273)



Figur 8.3
(Sida 274)



Figur 8.4
(Sida 275)

bevis för att vinkelsumman i en triangel är mindre än eller lika med två rätta utan att använda det femte postulatet. (Sats I.17 i *Elementa*). Det gjorde också Saccheri. Satsen kallas därför för Saccheri-Legendres sats och vi ger Legendres bevis.

Sats 8.1. Saccheri-Legendres sats. *Av de fyra första postulaten i Elementa följer att vinkelsumman i en triangel är mindre än eller lika med två rätta.*

Bevis

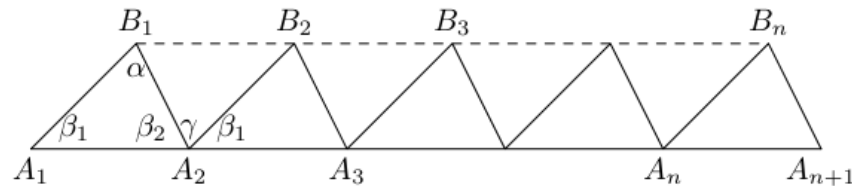
Antag $A_1 A_2 B$ är en godtycklig triangel. Avsätt sträckan $A_1 A_2$ längs en rät linje n gånger. Se figur 8.5. Vi får då punkterna $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, där

$$A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_n A_{n+1}.$$

Konstruera nu punkterna $B_1, B_2, \dots, B_n$ så att triangelarna

$$A_1 A_2 B_1, A_2 A_3 B_2, \dots, A_n A_{n+1} B_n$$

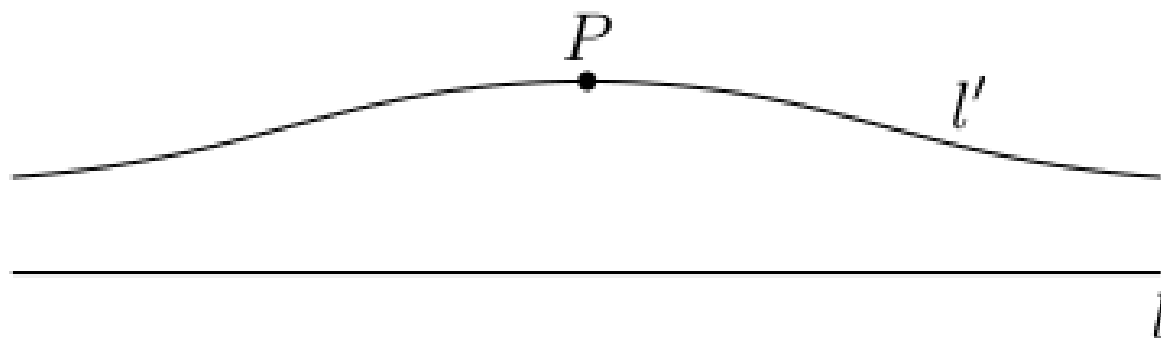
är kongruenta. Se figur 8.5. Dessa konstruktioner går att göra genom att bara använda de fyra första postulaten.



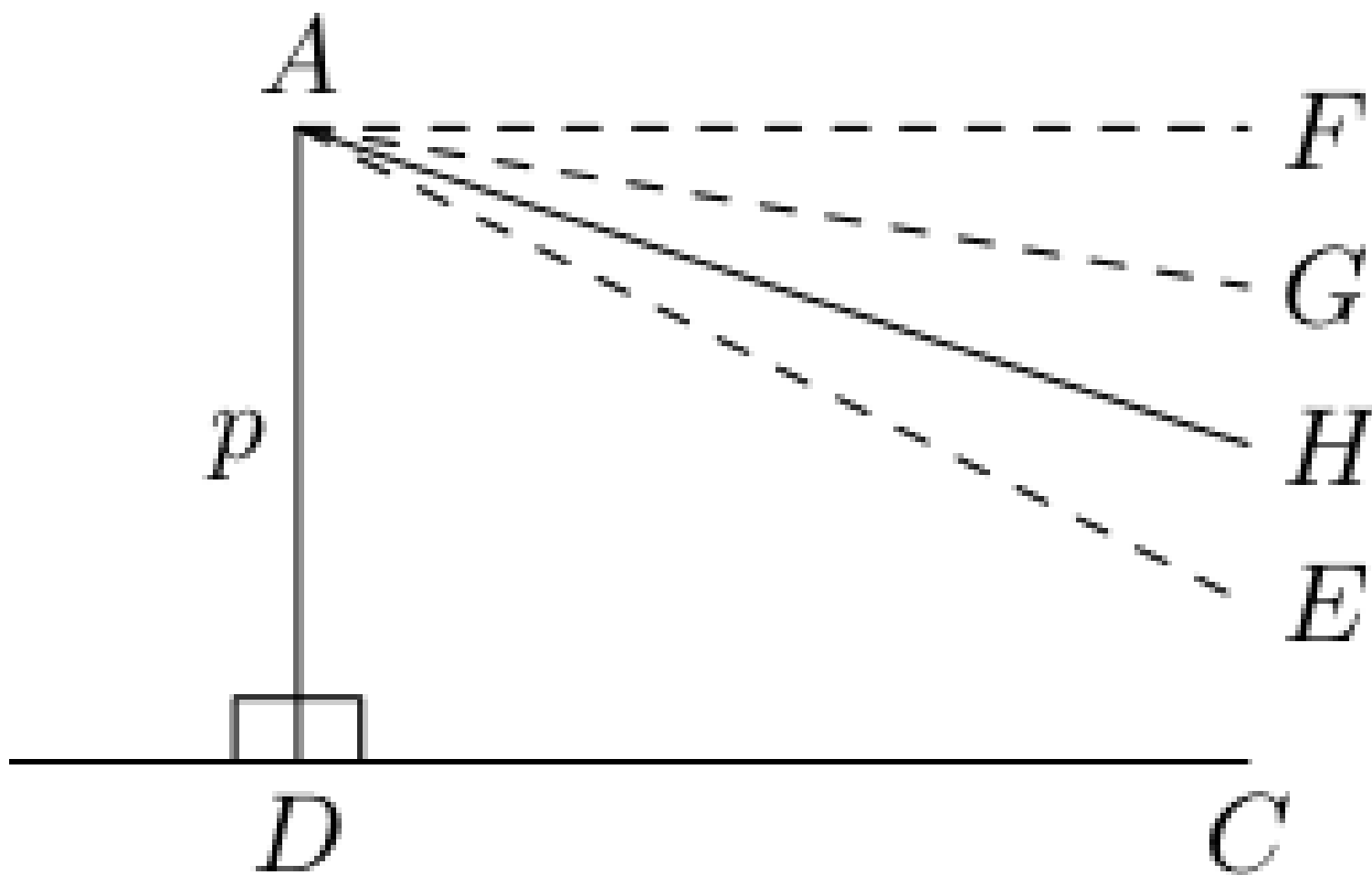
Figur 8.5

(Sida 276)

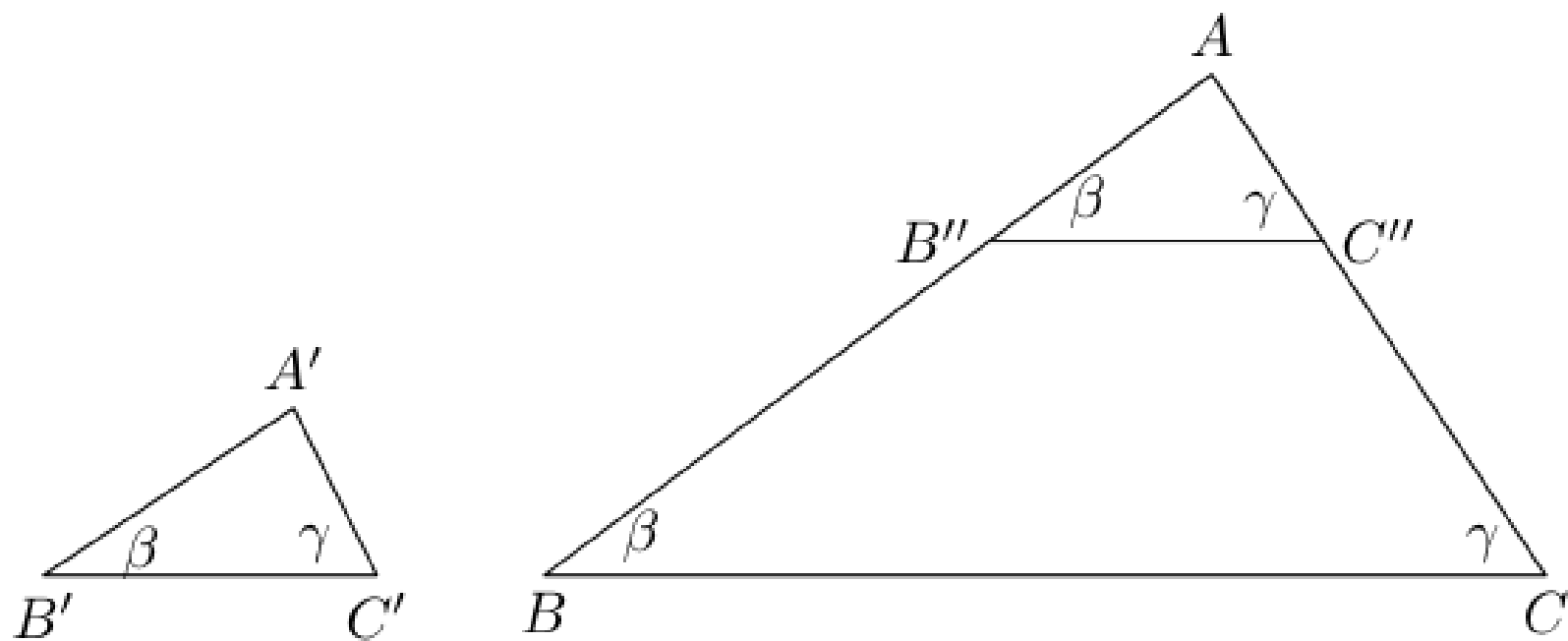
Kapitel 8 Icke-euklidiska geometrier



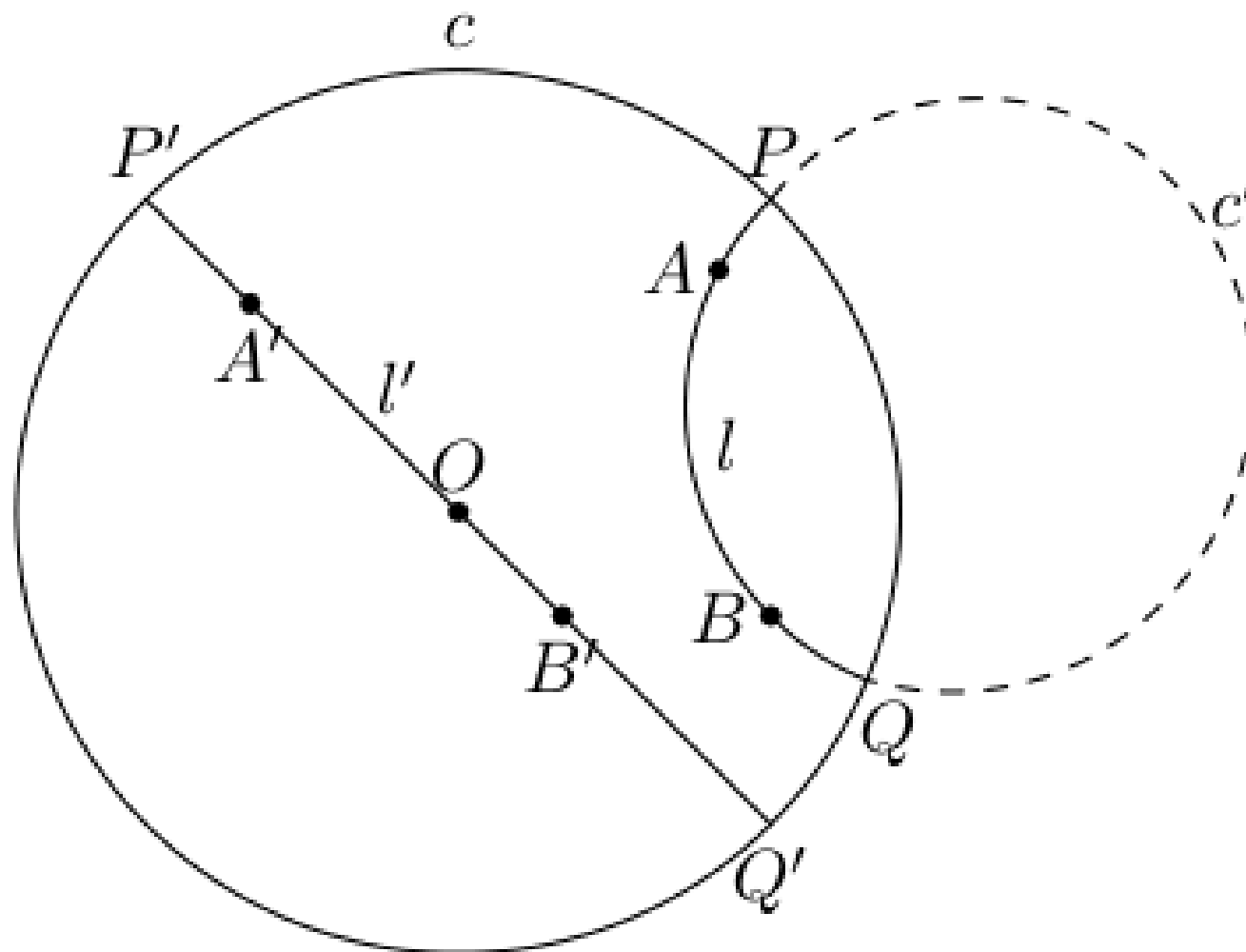
Figur 8.6
(Sida 280)



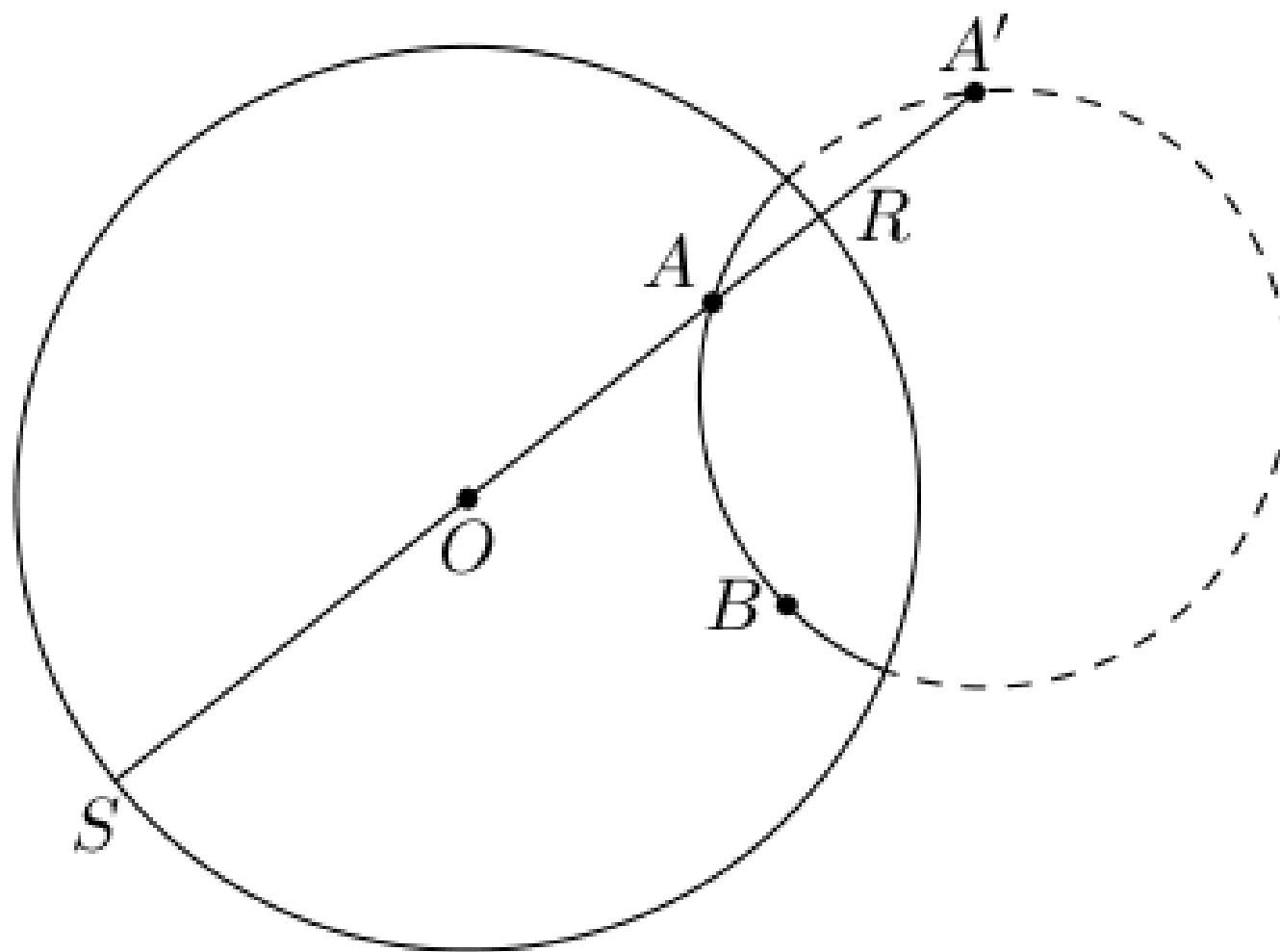
Figur 8.7 I figuren är AH den linje som är parallell med BC . Linjen AE skär BC medan AF och AG inte gö



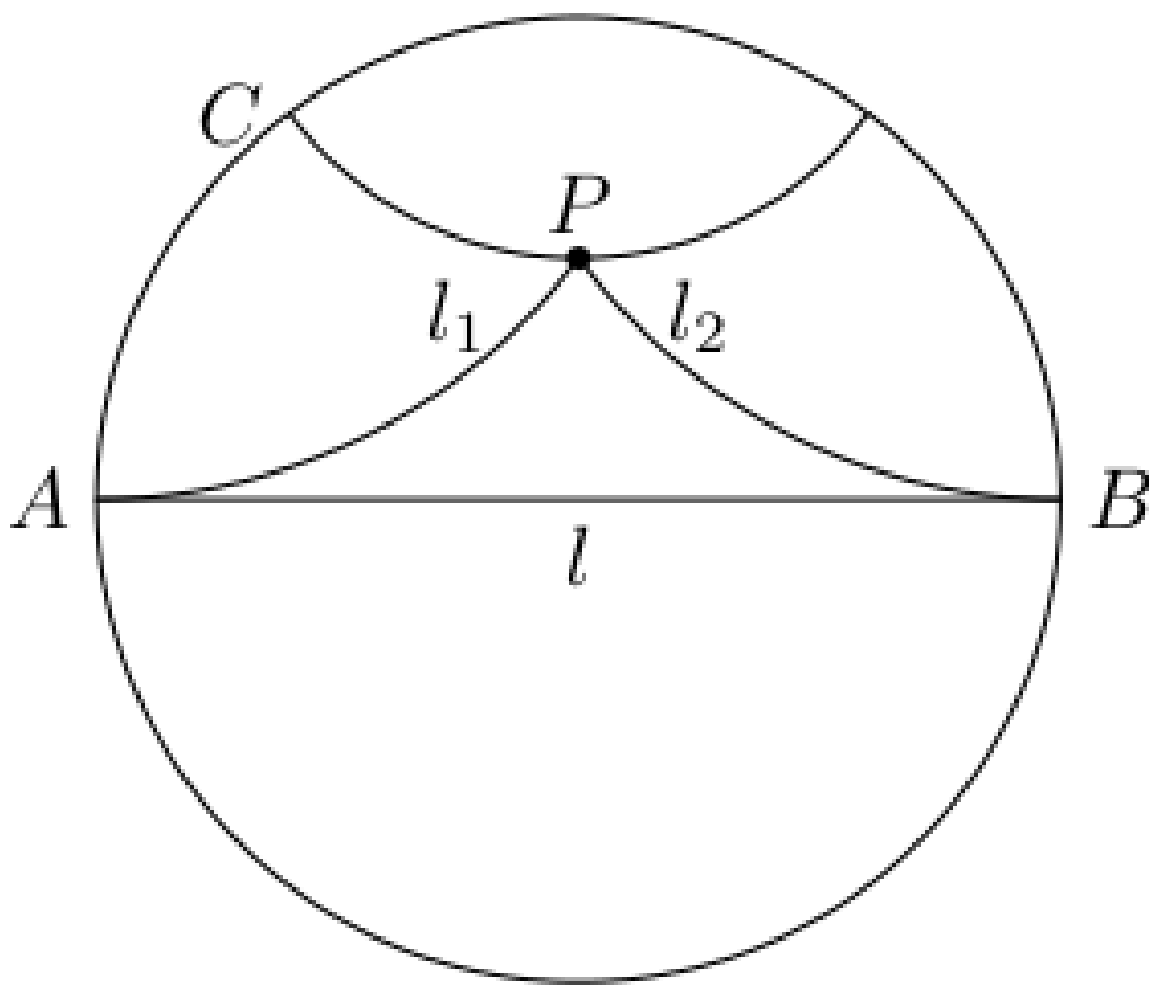
Figur 8.8
(Sida 282)



Figur 8.9 Det inre av cirkeln c är vår hyperboliska värld och punkterna där kallar vi h-punkter. Vi h

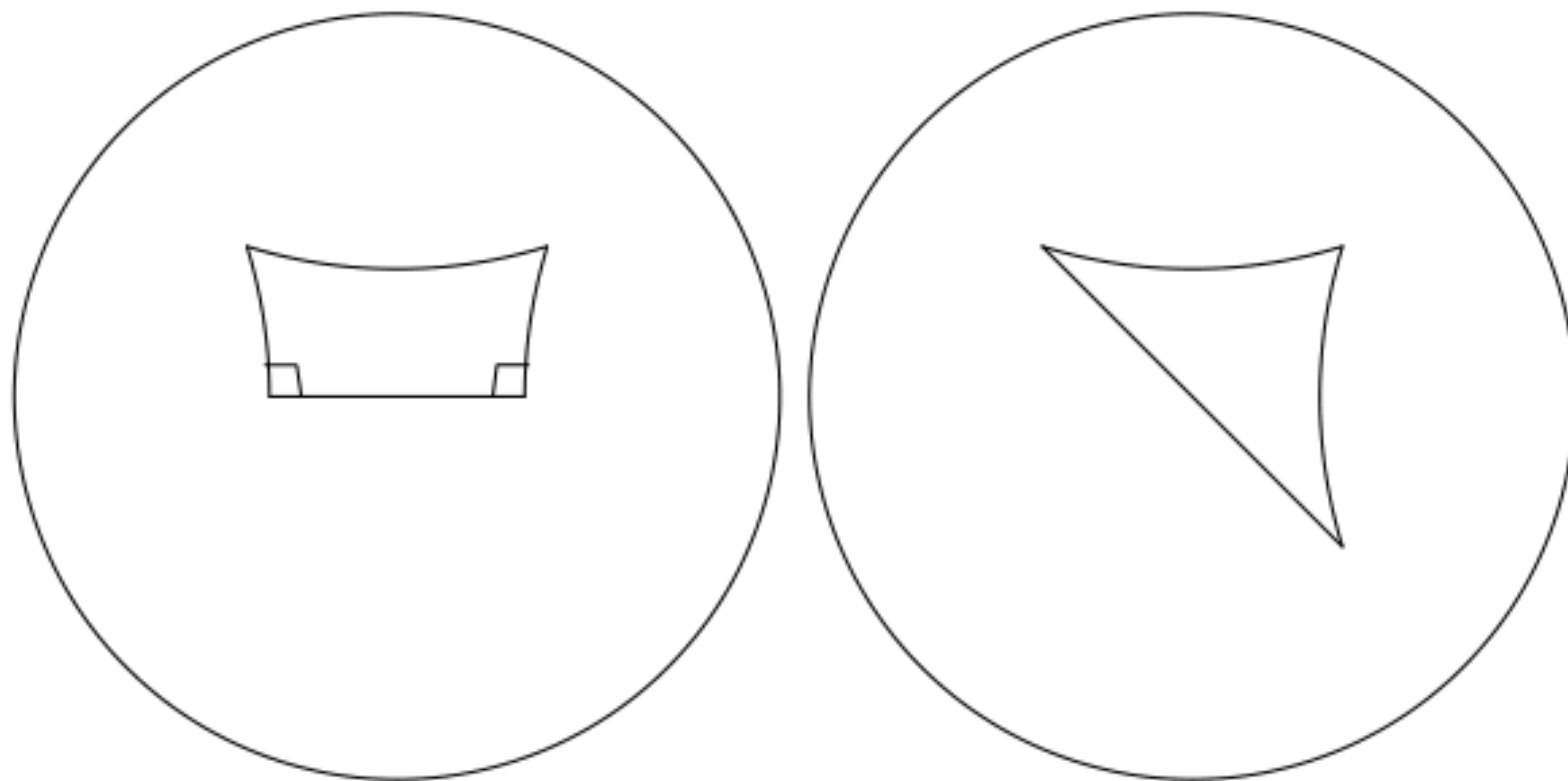


Figur 8.10
(Sida 285)



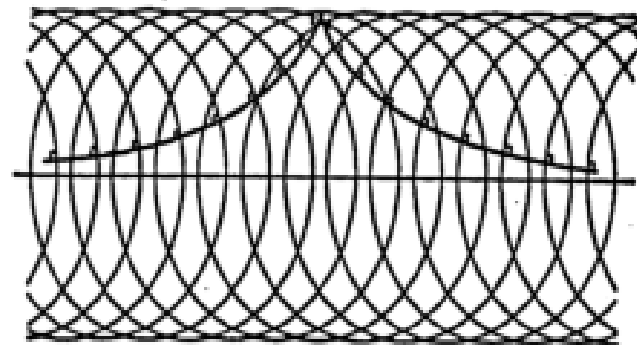
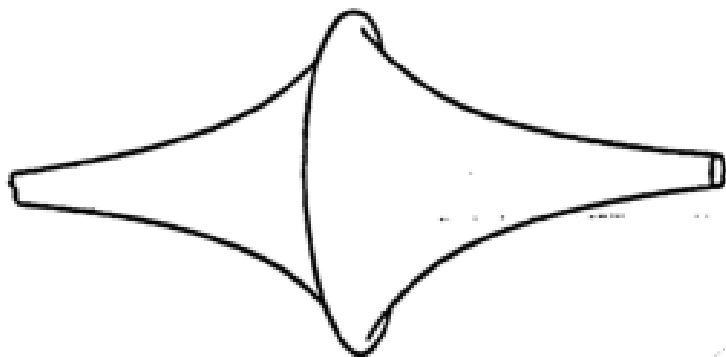
Figur 8.11
(Sida 287)

Euclidean Geometries. W.H. Freeman and Company. 1974.

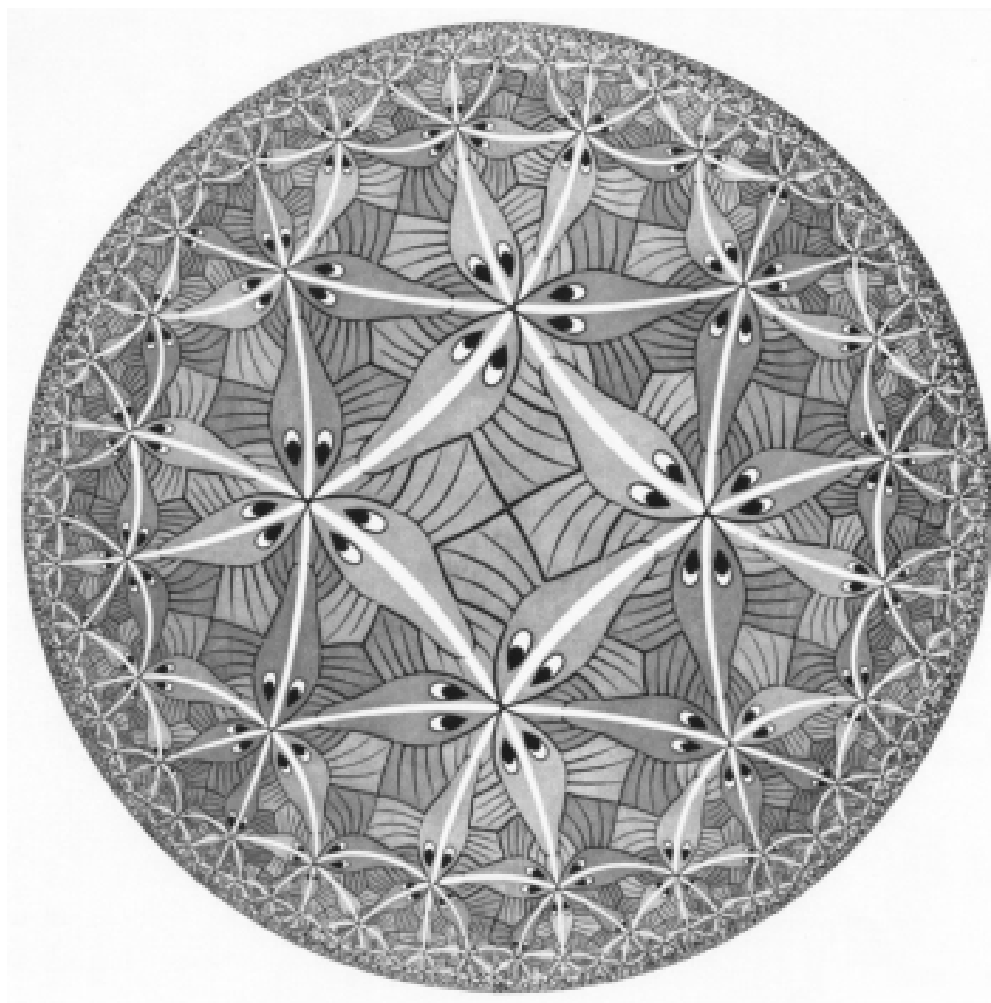


Figur 8.12
(Sida 288)

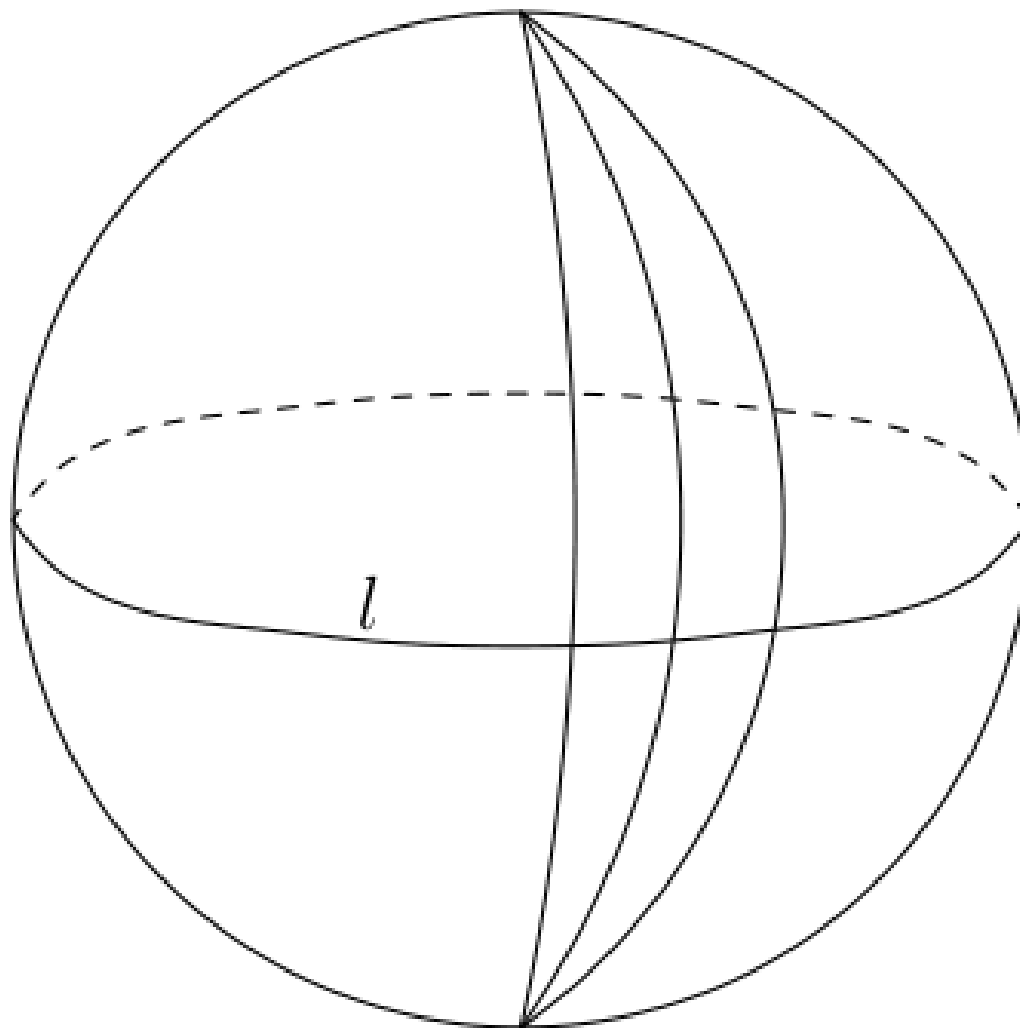
medelpunkterna på en given rad mje.



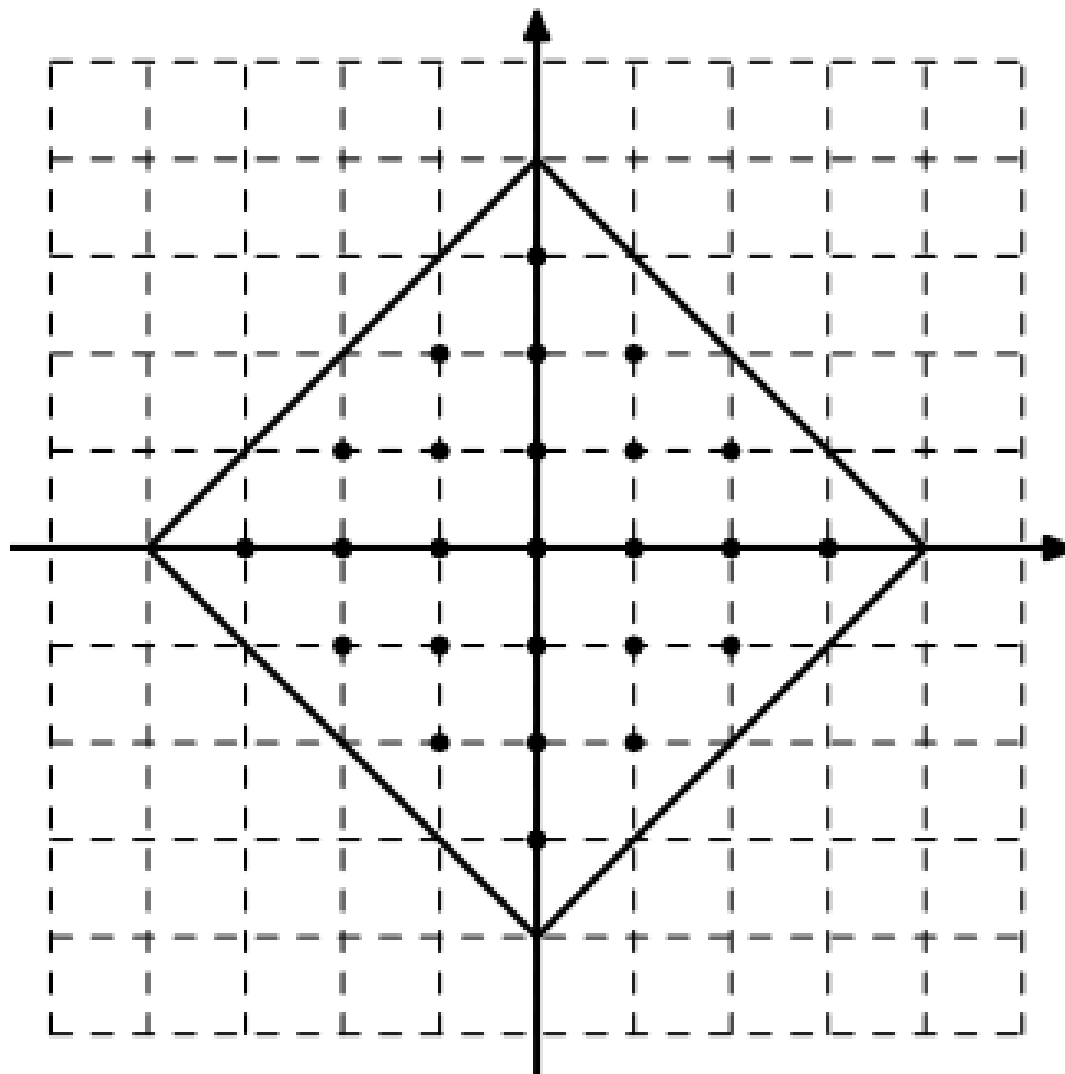
Figur 8.13 Till vänster visas en pseudosfär och till höger en traktrix. Figurerna är hämtade från E.K
(Sida 289)



Figur 8.14 I detta konstverk, som kallas Circle Limit III, illustrerar den holländskegrafikern M.C. E
(Sida 289)

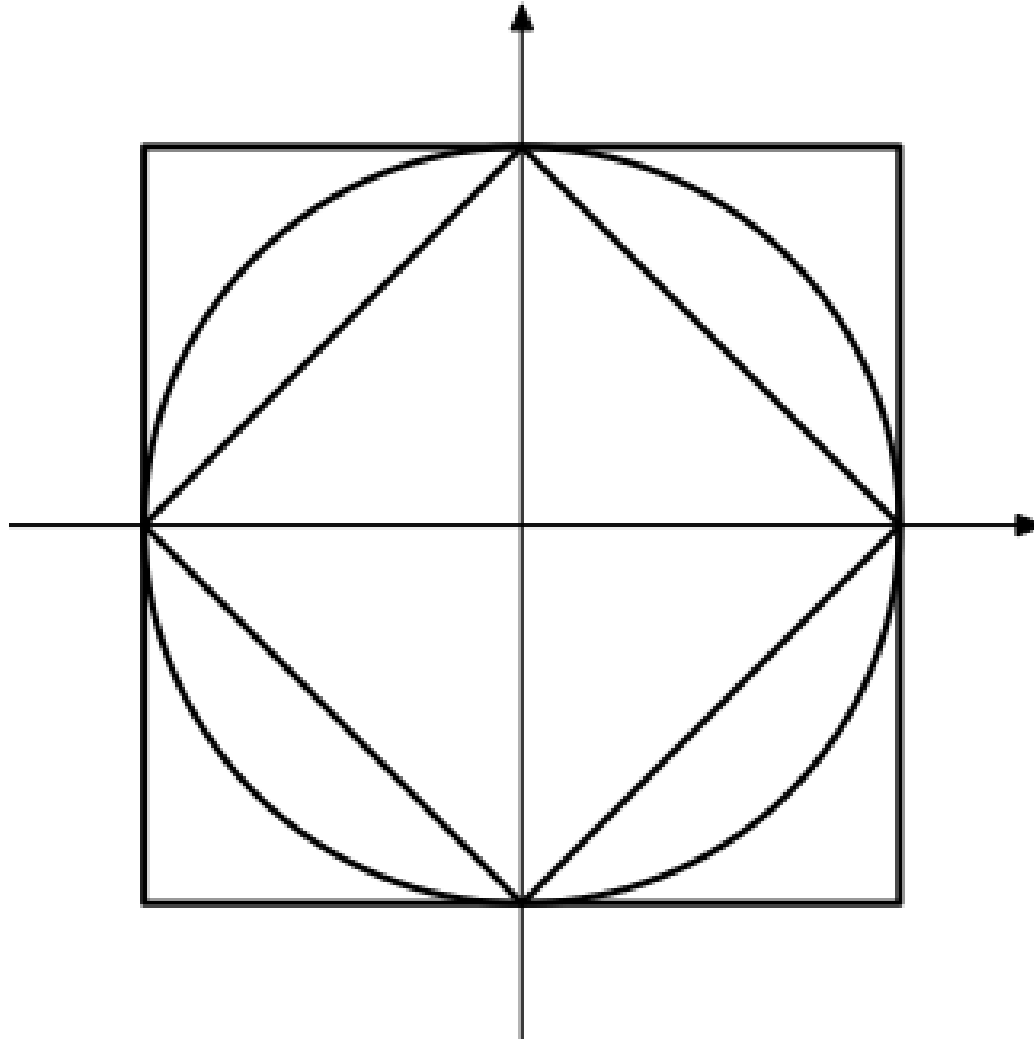


Figur 8.15 I figuren visas att flera storcirklar går genom två antipoder. De är allavinkelräta mot sto
 (Sida 291)

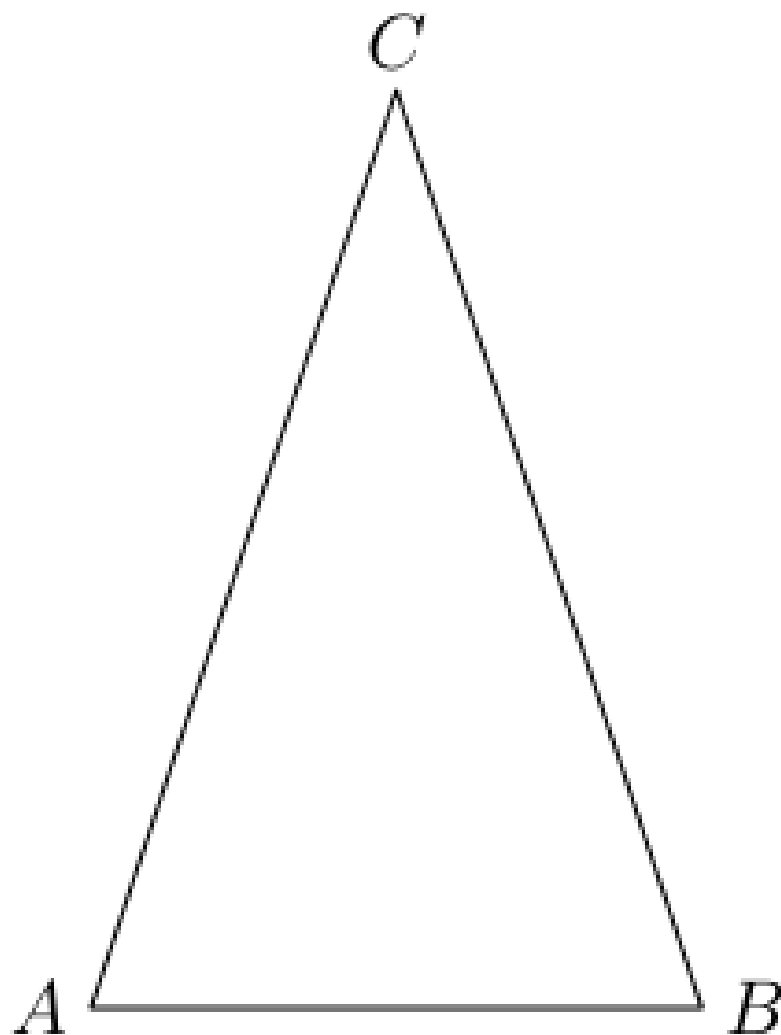


Figur 8.16 Cirkeln $S_4(0)$ består av punkterna innanför kvadraten.

att $\max |x_j - y_j|$ antas för $j = j_0$.



Figur 8.17 Den inre kvadraten är enhetscirkeln med avståndsfunktionerna d_1 och den yttre är enhetscirkel
(Sida 296)



Figur 8.18I figuren har vi ritat en triangel ABC där sträckorna mäts med den p-adiska normen. Antag at
(Sida 299)