> ”Old mathematicians never die, they just lose some of their functions.”
>
> *Okänd*

Kapitel 7

Funktionsbegreppet

Funktionsbegreppet kan med rätta sägas vara ett av de mest centrala i matematiken och dess tillämpningar. Tillsammans med derivata utgör det grunden för den matematiska analysen, huvudämnet för denna bok. Intresset för funktioner föddes ur behovet av ett matematiskt redskap för kvantitativa studier av naturfenomen, studier som startades av bl.a. Galileo Galilei och Johannes Kepler på 1500- och 1600-talet. Själva syftet var (och är) att beskriva beroenden av olika slag, till exempel beroendet mellan två fysikaliska storheter.

I det här kapitlet introducerar vi funktionsbegreppet, och lägger samtidigt en teoretisk grund för de så kallade *elementära funktionerna* i nästa kapitel.

7.1 Introduktion till funktioner

Definition av funktion

Med en *funktion* menar vi en regel som till *varje* reellt tal (i någon given delmängd av $\mathbb{R}$) ordnar *precis ett* reellt tal. Ett exempel är den funktion f som till varje reellt tal x ordnar motsvarande kvadrerade tal x^2, dvs.

$$f(x) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Man säger också att f **avbildar** x på x^2, och $f(x)$ kallas ibland för **bilden** av **variabeln** x. Ett annat exempel är

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \qquad x \geq 1. \tag{7.2}$$

Här har vi infört ett krav på variabeln, så funktionen är bara *definierad* för $x \geq 1$. Funktionen f sägs då ha **definitionsmängd** $[1,\infty[$, och vi skriver $D_f = [1,\infty[$. För funktionen i (7.1) är $D_f = \mathbb{R}$.

Genom att ändra definitionsmängden får man formellt sett en annan funktion. Funktionen g som ges av

$$g(x) = \sqrt{x-1}, \qquad x \geq 3,$$

har samma regel som funktionen f i (7.2), men en "mindre" definitionsmängd. Man brukar säga att g, i det här fallet, är **restriktionen** av f till intervallet $[3,\infty[$. Det hade däremot inte gått att införa funktionen

$$h(x) = \sqrt{x-1}, \qquad x \geq 0,$$

eftersom $\sqrt{x-1}$ saknar mening då $x < 1$.

Om definitionsmängden i något fall inte skulle vara given, så är konventionen att låta denna bestå av alla x för vilka funktionsuttrycket $f(x)$ är meningsfullt. Exempelvis, om vi pratar om funktionen f som ges av

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2},$$

och inget speciellt sägs om D_f, så förutsätter vi att $x \geq 1$ och $x \neq 2$.

En funktion består alltså av två komponenter, en *regel* och en *definitionsmängd*. Vi skriver ner en formell definition, och fortsätter sedan med ytterligare ett antal exempel.

Definition 7.1 (Funktion)**.** *En **funktion** f består av en delmängd D_f av $\mathbb{R}$ samt en regel som, till varje $x \in D_f$, ordnar precis ett reellt tal $f(x)$.*

Exempel 7.1. Arean av en cirkelskiva beror av radien r enligt formeln πr^2. Beroendet svarar alltså mot funktionen A som ges av

$$A(r) = \pi r^2, \qquad r > 0.$$

Definitionsmängden är här $]0,\infty[$. (Vi undantar fallet $r = 0$ då cirkeln urartar till en punkt.) □

Vi noterar att variabeln inte behöver betecknas x; i exemplet är r ett lämpligare namn. Valet av variabelnamn påverkar inte själva funktionen. Oavsett om vi skriver $A(r) = \pi r^2$, $A(x) = \pi x^2$ eller $A(y) = \pi y^2$ så rör det sig om *samma regel*, och därför *samma funktion* (underförstått att D_A är samma).

Exempel 7.2. En bil körs med den konstanta farten v_0. Den sträcka bilen har färdats efter tiden t kan beskrivas med funktionen s som ges av

$$s(t) = v_0 t, \qquad t \geq 0.$$

Här har vi valt $D_s = [0, \infty[$. □

Exempel 7.3. Funktionen f som definieras av

$$f(x) = C, \qquad x \in \mathbb{R},$$

där C är en konstant, är fullt giltig. Uttrycket som beskriver regeln behöver alltså inte nödvändigtvis innehålla variabeln. Här är funktionsvärdet alltid samma, oberoende av x. □

Exempel 7.4. Den funktion f som ges av

$$f(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

dvs. där variabeln avbildas på sig själv, kallas **identitetsfunktionen** eller **identitetsavbildningen** (på $\mathbb{R}$). □

Anmärkning 7.1. Notera skillnaden mellan f och $f(x)$. Beteckningen f anger funktionen i sin helhet, med komponenterna regel och definitionsmängd, medan $f(x)$ är ett tal, själva funktionsvärdet i x. Av praktiska skäl kommer vi dock att slarva något, och ibland tala om ”funktionen $f(x) = x^2$”, eller t.o.m. bara ”funktionen x^2”, i stället för det mer korrekta ”*funktionen f som ges av $f(x) = x^2$*”. □

En funktionsregel kan också bestå av ett antal olika ”delregler”, vilket illustreras av följande två exempel.

Exempel 7.5. Funktionen f som definieras av

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad -2 \leq x < 0, \\ x+1 & \text{då} \quad 0 \leq x < 2, \\ -x+2 & \text{då} \quad 2 \leq x \leq 4, \end{cases}$$

består av tre delregler, och har den totala definitionsmängden $[-2, 4]$. Exempelvis är $f(-1) = 1$, $f(1/2) = 3/2$ och $f(2) = 0$. □

Exempel 7.6. Låt funktionen f på intervallet $[0, 2]$ vara definierad av

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt}, \\ 0 & \text{om } x \text{ är irrationellt}. \end{cases}$$

Vi får då till exempel $f(2/3) = 1$ och $f(\sqrt{2}) = 0$. □

Vissa matematiska objekt som vid en första anblick kanske inte påminner om funktioner, kan tolkas som sådana.

Exempel 7.7. Talföljden $(a_k)_0^\infty$ definierad av

$$a_k = \frac{k(k+1)}{2}, \qquad k \geq 0,$$

kan ses som en funktion definierad på de naturliga talen $\mathbb{N}$. Anledningar till att vi kanske inte direkt uppfattar en talföljd som en funktion är dels den annorlunda beteckningen (vi skriver vanligtvis a_k i stället för $a(k)$), dels att definitionsmängden inte är ett intervall. □

Vi har avsiktligt begränsat funktionsbegreppet till avbildningar av *reella tal* x på *reella tal* $f(x)$ (dvs. funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). I det allmänna fallet är dock en funktion en regel från en *godtycklig mängd* A till en annan mängd B (dvs. $f : A \to B$). Vi kommer senare att kortfattat studera *komplexvärda* och *vektorvärda* funktioner ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$).

Graf och värdemängd

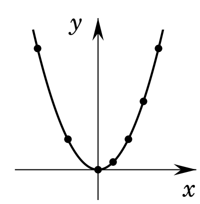
Härnäst skall vi införa *grafen* till en funktion, ett begrepp som du säkerligen är bekant med sedan tidigare. Låt oss därför studera funktionen

$$f(x) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ett sätt att redogöra för hur denna uppför sig är att beräkna funktionsvärden för några olika x, och ställa upp dessa i en tabell:

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1/2	1/4

x	$f(x)$
1	1
3/2	9/4
2	4
3	9

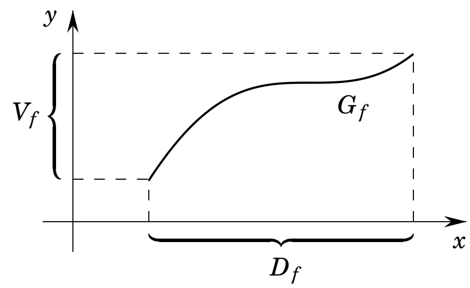


Vi tolkar varje rad som ett ordnat par av tal $(x, f(x))$, i detta fall (x, x^2), som vart och ett identifieras med en punkt i planet. Med **grafen** G_f till en funktion f menar vi formellt sett den delmängd av planet som ges av *alla* sådana punkter, dvs. mängden

$$G_f = \{(x, f(x))\,;\, x \in D_f\}.$$

Vanligtvis beskriver vi grafen med *ekvationen* $y = f(x)$; det rör sig alltså om en *kurva* i planet (ett annat namn för graf är **funktionskurva**). I fallet $f(x) = x^2$ ges grafen av parabeln $y = x^2$.

Ur grafen till en funktion f kan vi lätt läsa av definitionsmängden på x-axeln.



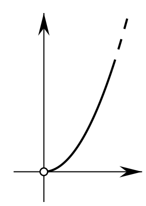
Motsvarande avläsning på y-axeln ger oss mängden av alla y som är bilden av något $x \in D_f$, dvs. alla värden som funktionen antar. Denna kallas därför funktionens **värdemängd**, och betecknas V_f. Det gäller alltså att

$$V_f = \{\, y\,;\, y = f(x) \text{ för något } x \in D_f \,\}.$$

Exempel 7.8. Grafen till funktionen

$$A(r) = \pi r^2, \qquad r > 0,$$

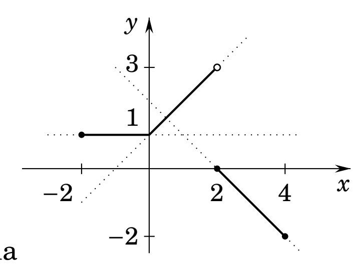
från Exempel 7.1 ges av en ”halv parabel”. Vi kan avläsa värdemängden till $]0,\infty[$.



□

Exempel 7.9. Grafen till

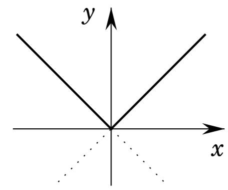
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då} \quad -2 \le x < 0, \\ x+1 & \text{då} \quad 0 \le x < 2, \\ -x+2 & \text{då} \quad 2 \le x \le 4, \end{cases}$$



består av tre olika linjestycken (heldragna i figuren) svarande mot linjerna $y = 1$, $y = x + 1$ och $y = -x + 2$. Vi tar endast med de delar av linjerna som hör till respektive intervall i definitionsmängden. Definitionsmängden är $[-2,4]$, och värdemängden ges av (unionen av) intervallen $[-2,0]$ och $[1,3[$. □

Exempel 7.10. För att rita grafen till funktionen

$$f(x) = |x|, \qquad x \in \mathbb{R},$$



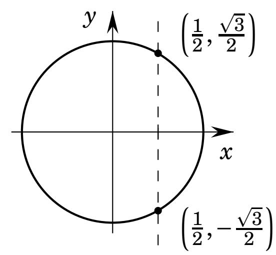
drar vi oss till minnes definitionen av absolutbelopp:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{då } x \geq 0, \\ -x & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Regeln för f består alltså av två delregler motsvarande linjerna $y = x$ och $y = -x$. Från grafen ser vi att $V_f = [0, \infty[$. □

Som tidigare nämnts är varje graf en kurva i planet. Frågan är om det går att vända på påståendet, dvs. om varje kurva, given av en ekvation i x och y, också är en graf $y = f(x)$ till någon funktion f? Svaret är nej, vilket illustreras i nästa exempel.

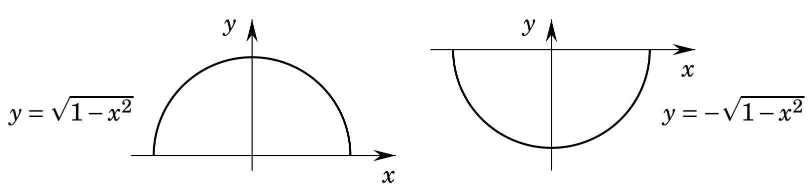
Exempel 7.11. Enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ är *inte* en graf $y = f(x)$ till någon funktion f. Vi påminner om att en funktion endast har *ett* funktionsvärde $f(x)$, dvs. *ett* y-värde, för varje $x \in D_f$. Eftersom exempelvis både $(1/2, \sqrt{3}/2)$ och $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ ligger på enhetscirkeln kan det således inte röra sig om en graf. Att vi får flera y-värden till ett och samma x-värde går också att inse från själva ekvationen:



$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}. \qquad \square$$

Det går att formulera en allmän geometrisk regel: För att en given kurva ska vara en graf $y = f(x)$, för någon funktion f, skall *varje lodrät linje* skära kurvan i *högst en* punkt.

Anmärkning 7.2. Enhetscirkeln är alltså inte en graf, men den går att dela upp i två halvcirklar som var och en är det:



Den övre och nedre halvcirkeln är grafer till funktionerna

$$f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad -1 \le x \le 1,$$

respektive

$$f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, \qquad -1 \le x \le 1. \qquad \square$$

Vi avslutar med att kort kommentera funktionsdefinitionen (Definition 7.1), där vi använde det något oprecisa ordet *regel*. Frågan är vad som egentligen menas med en regel. Är det t.ex. något som måste gå att beräkna? Det finns en modernare definition av funktion som helt undviker ordet regel, och som väsentligen går ut på att identifiera funktionen med dess graf. En funktion definieras då som en *mängd* f, bestående av ordnade par (x, y), sådan att det inte finns två par (x, y) i mängden med samma x-värde. Om $(x, y) \in f$ säger vi då att f avbildar x på y, och skriver $y = f(x)$. Vi behöver alltså inte längre hänvisa till någon regel; så länge mängden f uppfyller kravet ovan rör det sig om en funktion.

7.2 Sammansättning och invers

Vi ska nu gå igenom några olika sätt att konstruera nya funktioner utifrån redan givna. Vi börjar med att använda våra elementära räkneoperationer.

Om $f(x) = x^2$ och $g(x) = x - 1$ så kan vi till exempel bilda funktionerna

$$(f+g)(x) = x^2 + x - 1, \qquad (f \cdot g)(x) = x^2(x-1) \qquad \text{och} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Notera särskilt beteckningarna; för två funktioner f och g är

$$\boxed{\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), && (7.3)\\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), && (7.4)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. && (7.5) \end{aligned}}$$

Definitionsmängden blir de värden på x för vilka både f och g är definierade, och i fallet (7.5) måste dessutom $g(x) \neq 0$.

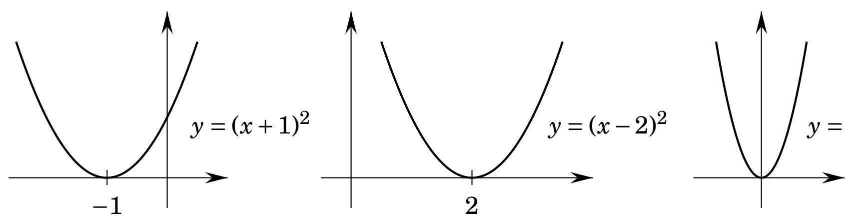
Sammansättning av funktioner

Ett annat sätt att bilda nya funktioner är genom *funktionssammansättning*. I praktiken innebär detta att man ersätter variabeln i en funktionsregel med ett annat funktionsuttryck.

Exempel 7.12. Utgår vi från funktionen $f(x) = x^2$ så får vi, genom att i tur och ordning byta ut x mot $x+1$, $x-2$ och $2x$, de sammansatta funktionerna

$$h_1(x) = f(x+1) = (x+1)^2, \qquad h_2(x) = f(x-2) = (x-2)^2,$$
$$h_3(x) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2.$$

Som hjälp för att rita graferna till dessa kan vi använda förflyttnings- och omskalningsreglerna från Kapitel 5.2:



□

Självklart ska varje förekomst av variabeln i en funktionsregel ersättas med det nya uttrycket. Om det till exempel gäller att

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{x}, \qquad \text{så får vi} \qquad f(x+1) = (x+1)^2 - (x+1) + \frac{1}{x+1}.$$

En allmän sammansatt funktion bildas utifrån två funktioner f och g. **Sammansättningen** $f \circ g$ definieras av

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad x \in D_g. \qquad (7.6)}$$

Funktionerna f och g kallas den *yttre* respektive den *inre* funktionen. I Exempel 7.12 var den yttre funktionen $f(x) = x^2$, medan de inre var

$$g_1(x) = x+1, \qquad g_2(x) = x-2 \qquad \text{respektive} \qquad g_3(x) = 2x.$$

Notera att definitionsmängden för en sammansatt funktion är samma som den för den inre, eftersom den inre funktionen beräknas först.

Exempel 7.13. Det har betydelse i vilken ordning två funktioner sätts samman. Låter vi

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0, \qquad \text{och} \qquad g(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

så kan vi bilda den sammansatta funktionen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

I omvänd ordning, med g som yttre och f som inre funktion, får vi i stället

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1, \qquad x \geq 0.$$

De sammansatta funktionerna blir alltså olika, dvs. $f \circ g \neq g \circ f$. (Observera att definitionsmängden för $g \circ f$ formellt är $[0, \infty[$, dvs. samma som för den inre funktionen f.) □

Det går även att göra upprepade sammansättningar, och på så sätt kombinera tre eller flera funktioner. Exempelvis kan man tolka

$$f(x) = \frac{|1 - x^2|}{1 + |1 - x^2|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

som en sammansättning av de tre funktionerna $x/(1+x)$, $|x|$ och $1 - x^2$.

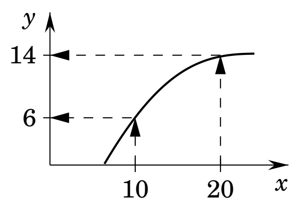
Anmärkning 7.3. Lägg märke till att det inte går att bilda $f \circ g$ om den inre funktionen g skulle ha ”för stor” värdemängd. Det är till exempel formellt sett inte tillåtet att sätta ihop

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0, \qquad \text{och} \qquad g(x) = x - 2, \quad x \in \mathbb{R},$$

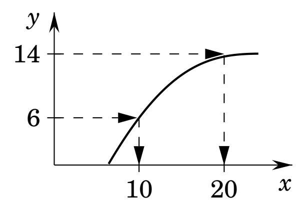
till $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 2}$. Denna funktion ska enligt definitionen ha samma definitionsmängd som den inre funktionen, dvs. hela $\mathbb{R}$, men uttrycket $\sqrt{x - 2}$ saknar mening för $x < 2$. För att det ska fungera måste man i så fall studera en restriktion av g, förslagsvis genom att kräva att $x \geq 2$. □

Invers funktion

Ytterligare en viktig konstruktion är *invers funktion*. Den bakomliggande idén är egentligen väldigt enkel: När vi avläser funktionsvärden i en graf $y = f(x)$ startar vi från x-axeln och läser av värdena på y-axeln. Den inversa funktionen till f, som betecknas f^{-1}, bildar vi genom att utgå från *samma graf*, men i stället starta från y-axeln och läsa av på x-axeln.



funktionen f



funktionen f^{-1}

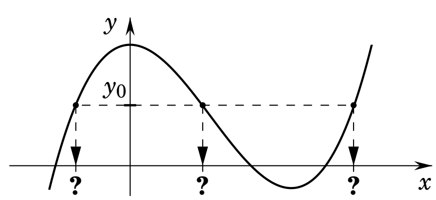
Exempelvis, om det för funktionen f gäller att

$$f(10) = 6 \quad \text{och} \quad f(20) = 14,$$

så gäller för den inversa funktionen f^{-1} att

$$f^{-1}(6) = 10 \quad \text{och} \quad f^{-1}(14) = 20.$$

Problemet är att inversen till en given funktion inte nödvändigtvis existerar. Vi påminner om att varje värde på variabeln alltid måste avbildas på precis *ett* funktionsvärde. Vi kan därför inte ha fallet att flera x-värden svarar mot samma y-värde, som i grafen nedan.



Vilket x-värde ska till exempel y_0 i figuren avbildas på? För att kunna bilda inversen till f får denna situation inte uppstå. Funktionen f måste med andra ord ha följande egenskap:

Definition 7.2 (Injektiv funktion)**.** *En funktion f sägs vara* ***injektiv*** *(eller* ***omvändbar****) om det för alla $x_1, x_2 \in D_f$ gäller att*

$$x_1 \neq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2). \tag{7.7}$$

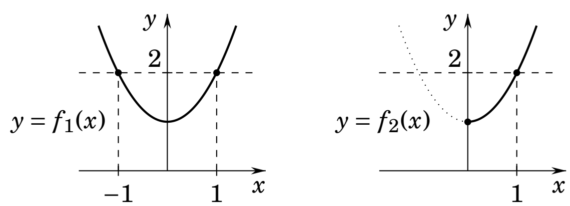
Exempel 7.14. Funktionen

$$f_1(x) = x^2 + 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

är ej injektiv; exempelvis är $f_1(-1) = f_1(1) = 2$ (se figuren nedan till vänster). Däremot är restriktionen

$$f_2(x) = x^2 + 1, \qquad x \geq 0,$$

en injektiv funktion. Detta går att utläsa ur grafen till f_2; varje *vågrät* linje skär grafen i (högst) en punkt, vilket betyder att två olika x-värden aldrig avbildas på samma y-värde.

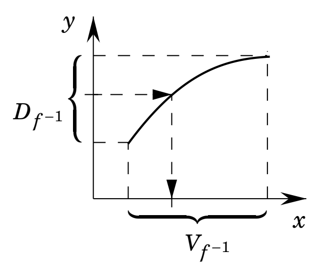


□

Om en funktion f är injektiv finns alltså, för varje $y \in V_f$, bara ett $x \in D_f$ som uppfyller ekvationen $y = f(x)$. Vi kan då bilda inversfunktionen f^{-1}.

> **Definition 7.3** (Invers funktion)**.** *Låt f vara en injektiv funktion. Den funktion som till varje $y \in V_f$ ordnar det tal $x \in D_f$ som uppfyller ekvationen $y = f(x)$ kallas **inversen** till f, och betecknas f^{-1}.*

Eftersom f^{-1} utgår från grafen till f, men i stället tar punkter på y-axeln och ger värden på x-axeln, följer det att värdemängden för f blir definitionsmängd för f^{-1} och vice versa:



$$D_{f^{-1}} = V_f, \qquad V_{f^{-1}} = D_f.$$

Vi får också sambanden

$$\boxed{\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= x, \qquad x \in D_f, \qquad (7.8) \\ (f \circ f^{-1})(y) &= y, \qquad y \in V_f, \qquad (7.9) \end{aligned}}$$

vilka motsvaras av att ”gå fram och tillbaka” mellan axlarna. En sammansättning av en funktion och dess invers blir alltså identitetsfunktionen.

Vi skall nu försöka besvara två centrala frågor om inversfunktioner. För det första, givet en injektiv funktion f, hur kan man bestämma ett analytiskt uttryck (dvs. en ”formel”) för f^{-1}? För det andra, hur ser grafen till f^{-1} ut?

Vi börjar med det första problemet. Eftersom

$$y = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y)$$

är strategin följande: Vi utgår från sambandet $y = f(x)$ och *löser ut* x som ett uttryck i y. Det uttryck vi då får måste beskriva inversen. Definitionsmängden för f^{-1} får vi genom att bestämma värdemängden för f.

Exempel 7.15. Vi vill bestämma inversen f^{-1} till

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad x \geq 0.$$

Denna funktion är, enligt Exempel 7.14 (där den kallas f_2), injektiv med värdemängd $[1, \infty[$. Vi vet därför att inversen existerar och har definitionsmängd $[1, \infty[$. Sätter vi $y = f(x)$ och löser ut x får vi

$$y = x^2 + 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 = y - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{y-1}$$

Då $x \geq 0$ är minustecknet ej aktuellt, så det följer att $x = \sqrt{y-1}$. Enligt vårt tidigare resonemang måste därför inversen beskrivas av

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}, \qquad y \geq 1. \qquad \square$$

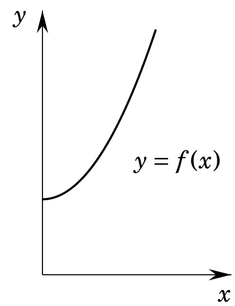
En funktion är inte knuten till något speciellt variabelnamn, så när man väl har bestämt inversen går det bra att byta ut variabeln y mot x, och i exemplet i stället skriva resultatet som $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

Anmärkning 7.4. Genom att lösa ut x ur ekvationen $y = f(x)$ kan vi samtidigt avgöra huruvida f är injektiv eller ej; om x kan uttryckas *entydigt* i y så följer det att f är injektiv. Utan kravet $x \geq 0$ i Exempel 7.15 så får vi de *två* möjligheterna $x = \pm\sqrt{y-1}$, och drar då slutsatsen att funktionen ej är injektiv. $\square$

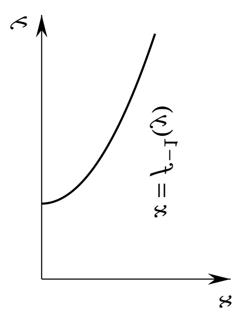
Vi koncentrerar oss nu på den andra frågan ovan, nämligen hur grafen till f^{-1} ser ut. Låt oss återigen studera det konkreta exemplet

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad x \geq 0,$$

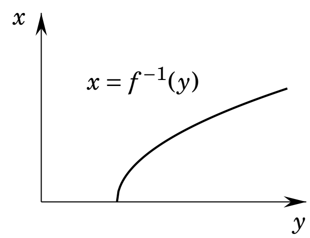
med grafen till höger. Som vi tidigare nämnt tar inversfunktionen f^{-1} punkter på y-axeln och avbildar dessa på x-axeln. Grafen till inversen får du därför helt enkelt genom att vrida denna bok 90°. Gör det!



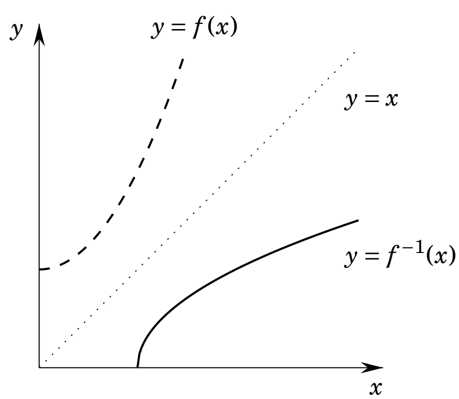
a) Grafen till f^{-1} ser alltså ut så här. Enda problemet är att bilden är spegelvänd. Om vi ordnar så att y-axeln pekar åt höger, så får vi den korrekta grafen.



b)



Grafen för f^{-1} ges alltså av figur b). Tänker vi efter ett tag så inser vi att det vi just gjort är samma sak som att *spegla* grafen för f i linjen $y = x$:



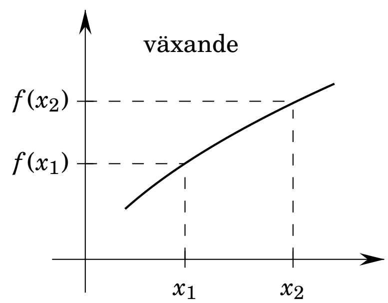
Vi återkommer till inverser i samband med logaritm- och arcusfunktioner i nästa kapitel.

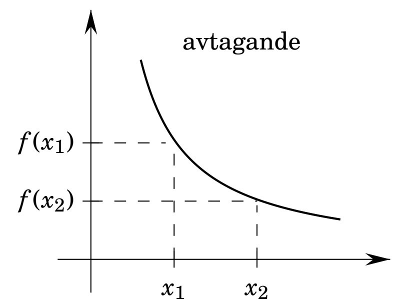
7.3 Funktionsegenskaper

Vi går nu igenom ett antal funktionsegenskaper som vi kommer att behöva i senare kapitel, och börjar med något som är grundläggande för att beskriva utseendet hos en graf.

Växande och avtagande

Vad som menas med att en funktion är *växande* eller *avtagande* framgår väsentligen av namnet.





Definitionen är alltså följande:

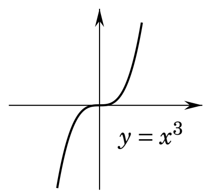
> **Definition 7.4** (Växande och avtagande funktion)**.** *En funktion f sägs vara **växande** om det för alla $x_1,\ x_2 \in D_f$ gäller att*
>
> $$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \le f(x_2).$$
>
> *Vi säger att f är **avtagande** om det för alla $x_1,\ x_2 \in D_f$ gäller att*
>
> $$x_1 < x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \ge f(x_2).$$
>
> *En funktion som är växande eller avtagande kallas **monoton**.*

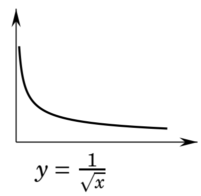
Observera att vi ovan inte har sträng olikhet mellan $f(x_1)$ och $f(x_2)$. En följd av detta blir att en konstant funktion $f(x) = C$ *både* är växande och avtagande. Med sträng olikhet får vi i stället definitionen av en **strängt växande** respektive **strängt avtagande** funktion. En sådan funktion kallas också **strängt monoton**.

Exempel 7.16. Funktionerna

$$f_1(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{och} \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

är båda (strängt) monotona; f_1 är (strängt) växande och f_2 är (strängt) avtagande.





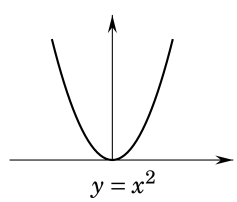
□

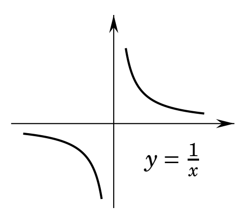
I Definition 7.4 betraktar vi funktioner över hela deras definitionsmängd, men vi kan på motsvarande sätt även tala om växande respektive avtagande i ett visst *intervall*.

Exempel 7.17. Vi skissar nedan graferna till

$$f_1(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \text{och} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Funktionen f_1 är strängt växande i intervallet $[0, \infty[$ och strängt avtagande i intervallet $]-\infty, 0]$, men varken växande eller avtagande i hela $\mathbb{R}$.





Notera att f_2 är strängt avtagande i både $]-\infty, 0[$ och $]0, \infty[$, men inte avtagande som helhet betraktad; exempelvis är $f_2(-1) < f_2(1)$. □

Senare kommer egenskaperna växande och avtagande att kunna kopplas till begreppet derivata, vilket kommer att ge oss en allmän metod för att avgöra var en funktion växer eller avtar.

Vi påminner om att en funktion har en invers om den är injektiv, vilket geometriskt betyder att varje vågrät linje skär funktionskurvan i högst en punkt. Resultatet i nästa sats känns därför ganska naturligt om man ritar ut och studerar en lämplig graf.

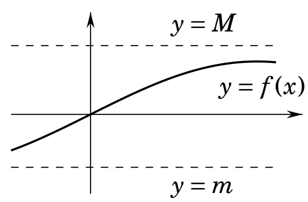
Sats 7.1. *Varje strängt växande (strängt avtagande) funktion har en invers, vilken själv är strängt växande (strängt avtagande).*

Bevis. Vi behandlar endast fallet då f är strängt växande (det andra fallet visas på motsvarande sätt), och visar först att inversen existerar: Låt x_1 och x_2 vara två olika tal i D_f och antag att $x_1 < x_2$ (annars byter vi bara namn på dem). Eftersom f är strängt växande följer det att $f(x_1) < f(x_2)$, vilket speciellt betyder att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vi har alltså visat att funktionen f är injektiv, och därför har en invers f^{-1}.

Det återstår att visa att inversen f^{-1} är strängt växande, dvs. att $y_1 < y_2$ medför $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ då $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}}$. Antag i stället att $f^{-1}(y_2) \le f^{-1}(y_1)$. Eftersom f är strängt växande får vi då $f(f^{-1}(y_2)) \le f(f^{-1}(y_1))$, dvs. $y_2 \le y_1$. Detta är en motsägelse, så det måste gälla att $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. □

Begränsad och obegränsad

En funktion f sägs vara *begränsad* om dess funktionsvärden inte blir obegränsat ”stora”. Geometriskt kan vi tolka detta som att funktionskurvan kan stängas in mellan två vågräta linjer. Vi formulerar också en strikt definition:



Definition 7.5 (Begränsad funktion)**.** *En funktion f sägs vara **uppåt begränsad** om det existerar ett tal M sådant att*

$$f(x) \le M \qquad \text{för alla } x \in D_f,$$

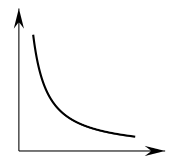
*samt **nedåt begränsad** om det existerar ett tal m sådant att*

$$f(x) \ge m \qquad \text{för alla } x \in D_f.$$

*En funktion som både är uppåt och nedåt begränsad sägs vara **begränsad**.*

Anmärkning 7.5. En ekvivalent definition av att f är begränsad är att det existerar ett tal $K \ge 0$ sådant att $|f(x)| \le K$ för alla $x \in D_f$. Det senare kan vi också uttrycka som att $-K \le f(x) \le K$ för alla $x \in D_f$. □

Exempel 7.18. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, är nedåt begränsad; som nedre begränsning kan vi till exempel välja $m = 0$. Däremot är f inte uppåt begränsad, eftersom godtyckligt stora värden antas nära $x = 0$. Funktionen är då följaktligen heller inte begränsad.



□

Det går även att säga att en funktion är begränsad i ett visst *intervall*. Funktionen i exemplet är visserligen inte begränsad i sin helhet, men den är begränsad i till exempel intervallet $[1, \infty[$.

Jämn och udda

Vi definierar nu vad som menas med en *jämn* respektive *udda* funktion.

Definition 7.6 (Jämn och udda funktion)**.** *En funktion f sägs vara **jämn** om det gäller att*

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{för alla } x \in D_f.$$

*Vi säger att f är **udda** om*

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{för alla } x \in D_f.$$

(En förutsättning är att D_f är symmetrisk, så att även $-x \in D_f$.)

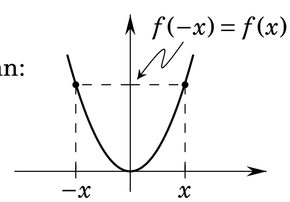
Exempel 7.19. Exempelvis är funktionen $f(x) = x^2$ jämn eftersom

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

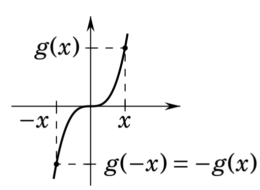
Funktionen $g(x) = x^3$ är udda eftersom

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

jämn:



udda:



□

Precis som i exemplet gäller det att funktionskurvan till en jämn funktion är *symmetrisk i y-axeln*, och till en udda funktion *symmetrisk i origo*. Dessa symmetriegenskaper är mycket användbara vid till exempel grafritning. Notera att ”de flesta” funktioner dock varken är jämna eller udda.