9 Rörelse och krafter 2

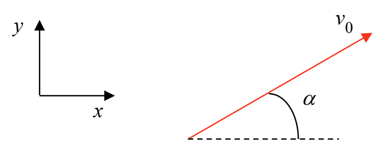
Kaströrelse

9.1 Just då stenen är i banans högsta punkt och vänder för att börja röra sig nedåt är den still i vertikalled. Stenens acceleration är noll i horisontalled under hela rörelsen.

Svar: Sant

9.2 a) Kroppens hastighet har, i varje punkt, samma riktning som dess bana. b) I och med att vi försummar luftmotståndet är kraften på kroppen hela tiden tyngdaccelerationen och den är alltid riktad rakt mot jorden. c) Kroppens acceleration har alltid samma riktning som den resulterande kraften, vilken här är lika med tyngdkraften och den är hela tiden riktad rakt mot jorden.

9.3



En kaströrelse kan ofta behandlas som två samtidiga rörelser.

Utgångshastigheterna för resp. rörelse fås som

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

a) Sträckan föremålet färdas fås som

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

där $v_0 = 20$ m/s

$$\alpha = 30^\circ$$

och tiden för rörelsen, t, behöver bestämmas.

Den fås genom att titta i rörelsens andra riktning. Färden är slut då föremålet landar. Här landar det på samma höjd som det kastas från vilket betyder att $y = 0$ då det landar. Läget i y-led beskrivs av

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

vilket ger oss t enligt

$$0 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$0 = v_{0y} - \frac{gt}{2}$$

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \sin 30^\circ}{9{,}82}\text{ s} = 2{,}037\text{ s}$$

Denna tid används sedan till att beräkna för sträckan som föremålet färdas i x-led.

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 20 \cos 30^\circ \cdot 2{,}037\text{ m} = 35{,}3\text{ m}$$

b) Föremålet har sin minsta rörelseenergi då dess hastighet är som minst. Detta inträffar i banans högsta punkt eftersom v_y då är noll. Detta ger oss föremålets minsta rörelseenergi som

$$E_\text{k,min} = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv_{0x}^2}{2} = \frac{m\left(v_0 \cos\alpha\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{0{,}150 \cdot \left(20 \cos 30^\circ\right)^2}{2}\text{ J} = 22{,}5\text{ J}$$

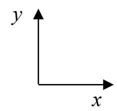
Svar: a) 35 m och b) 22 J

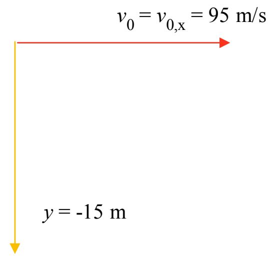
9.4 Specifikt för denna kaströrelse är:

Då kulan träffar marken har den förflyttats 1,55 m i negativ y-riktning.

Utgångshastigheten i x-led är 95 m/s.

Utgångshastigheten i y-led är 0 m/s.





Kulans läge i y-led ges av

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

där $y = -1{,}55$ m

och $v_{0y} = 0$

vilket ger $-1{,}55 = -\frac{gt^2}{2}$

ur vilket den sökta tiden fås som

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}55}{9{,}82}}\ \text{s} = 0{,}562\ \text{s}$$

Svar: 0,56 s

9.5 I kastbanans högsta punkt är hastigheten $v_0/4$ och $v_y = 0$ vilket ger

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = v_0/4$$

ur vilket den sökta vinkeln fås enligt

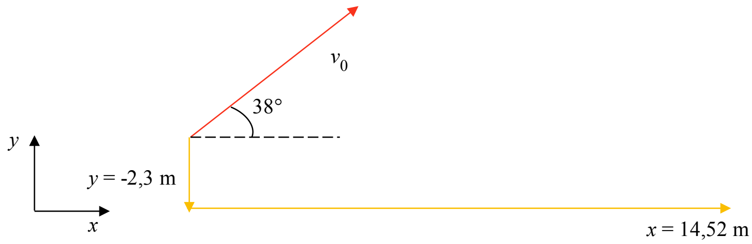
$$v_0 \cos\alpha = v_0/4$$

$$\cos\alpha = 1/4$$

$$\alpha = \cos^{-1}(1/4)^\circ = 75{,}52\ ^\circ$$

Svar: 76°

9.6



Kulan förflyttar sig 14,52 m i x-led

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

vilket ger tiden för färden som

$$t = \frac{x}{\cos\alpha \cdot v_0}$$

där $x = 14{,}52$ m

$\alpha = 38^\circ$

vilket ger $t = \dfrac{14{,}52}{\cos 38^\circ \cdot v_0} = \dfrac{18{,}43}{v_0}$

Då kulan förflyttat sig 14,52 m i x-led har den samtidigt förflyttat sig 2,3 m i negativ y-riktning:

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

där $y = -2{,}3$ m

och $t = \dfrac{18{,}43}{v_0}$

vilket ger $-2{,}3 = v_0 \sin 38^\circ \cdot \dfrac{18{,}43}{v_0} - \dfrac{9{,}82\left(\dfrac{18{,}43}{v_0}\right)^2}{2}$

vilket kan förenklas

$$-2{,}3 = 11{,}35 - \frac{1667{,}75}{v_0^2}$$

ur vilket den sökta utgångshastigheten fås enligt

$$v_0 = \sqrt{\frac{1667{,}75}{11{,}35 + 2{,}3}}\ \text{m/s} = 11{,}05\ \text{m/s}$$

Svar: 11 m/s

9.7 a) Stenarnas läge i y-led ges av

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Denna skrivs om för att sedan, m.h.a. pq-formeln få ett uttryck för tiden att hamna på en viss höjd

$$\frac{gt^2}{2} - v_0 \sin\alpha \cdot t + y = 0$$

$$t^2 - \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \cdot t + \frac{2y}{g} = 0$$

pq-formeln ger oss nu tiden

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2y}{g}}$$

En mindre vinkel α ger en kortare tid.

För specialfallet $y = 0$, d.v.s. då stenen landar på samma höjd den kastas från, fås

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

eller $t = 0$. Även här ger en mindre vinkel α en kortare tid.

b) Stenens läge i x-led ges av

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

För specialfallet $y = 0$ fås

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

vilket, m.h.a. $\cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$, kan förenklas till

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

För sten A, med $\alpha = 45°$, fås

$$x_A = \frac{v_0^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{v_0^2}{g}$$

och för sten B, med $\alpha = 55°$, fås

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 110^\circ}{g} = 0{,}94 \cdot \frac{v_0^2}{g} = 0{,}94 \cdot x_A$$

Sten A landar alltså längst bort.

Svar: a) Den med minst vinkel, d.v.s. sten A och

b) den med minst vinkel, d.v.s. sten A.

9.8 Bilen och kulan kolliderar om deras läge i x- resp y-led sammanfaller vid samma tidpunkt.

x: Bilens läge i x-led är konstant och 10 m från stenen.

Stenen läge i x-led ges av

$$x = v_{0x} t = v_0 \cos\alpha \cdot t\ .$$

Bilen och stenen är på samma plats i x-led då

$$10 = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

eller

$$t = \frac{10}{v_0 \cos\alpha}$$

där $\alpha = 30°$

och t saknas men ett uttryck för den kan fås från det som händer i y-led.

y: Bilens läge i y-led ges av

$$y = v_{\text{bil}} t = 10t$$

Stenen läge i y-led ges av

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\ .$$

Bilens och stenens lägen i y-led är samma då

$$10t = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

ur vilket ett uttryck för tiden fås enligt

$$10 = v_0 \sin\alpha - \frac{gt}{2}$$

$$\frac{gt}{2} = v_0 \sin\alpha - 10$$

$$t = \frac{2}{g}\left(v_0 \sin\alpha - 10\right)$$

Detta sätts lika med uttrycket för *t* från *x*-led

$$\frac{2}{g}\left(v_0 \sin\alpha - 10\right) = \frac{10}{v_0 \cos\alpha}$$

Omskrivning

$$v_0\left(v_0 \sin\alpha - 10\right) = \frac{10g}{2\cos\alpha}$$

$$v_0^2 \sin\alpha - 10v_0 = \frac{10g}{2\cos\alpha}$$

$$v_0^2 - \frac{10}{\sin\alpha}v_0 - \frac{10g}{2\cos\alpha\sin\alpha} = 0$$

In med siffror

$$v_0^2 - \frac{10}{\sin 30^\circ}v_0 - \frac{10\cdot 9{,}82}{2\cos 30^\circ \sin 30^\circ} = 0$$

$$v_0^2 - 20v_0 - 113{,}39 = 0$$

pq-formeln ger oss nu hastigheten

$$v_0 = \frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - 113{,}39} \text{ m/s} =$$

= -4,61 m/s och 24,61 m/s

där 24,61 m/s är den fysikaliskt rimliga.

Svar: 25 m/s

9.9 Då snöret gått får kulan en kaströrelse. Avståndet från P till där den slår ned i marken ges då av

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

där $\alpha = 0^\circ$

vilket ger $x = v_0 \cdot t$

och v_0 och t behöver bestämmas.

v_0 är lika med den fart stålkulan snurras med innan snöret går av

som: $v_0 = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$

där $r = 1{,}1$ m

och $T = \frac{6{,}0}{10}$ s $= 0{,}6$ s

t fås från att då kulan slår i marken har den förflyttat sig 1,85 m negativ y-riktning.

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

där $\alpha = 0^\circ$

vilket ger $y = \frac{gt^2}{2}$

och $t = \sqrt{\frac{-2y}{g}}$

där $y = -1{,}85$ m

Detta ger oss nu totalt

$$x = v_0 \cdot t = \frac{2\pi r}{T} \cdot \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}1}{0{,}6} \cdot \sqrt{\frac{-2(-1{,}85)}{9{,}82}} \text{ m} =$$

$= 7{,}07$ m

Svar: 7,1 m

Laddnings rörelse i homogent elektriskt fält

9.10 Fältlinjernas riktning är i varje punkt definierad som kraftens riktning på en positiv laddning i punkten. En fri elektron som placeras i ett elektriskt fält påverkas därmed av en kraft rakt motriktad fältlinjerna och accelereras därmed, enligt Newtons 2:a lag i en riktning rakt motsatt fältlinjernas.

Svar: Falskt

9.11 Fältet utför ett arbete på laddningen

$$W = Fs$$

där $F = \overline{E}Q$

vilket ger $W = \overline{E}Qs$

Arbetet är lika stort som ökningen i laddningens rörelseenergi.

$$E_{\text{k}} = \overline{E}Qs$$

Detta ger oss den sökta laddningen som

$$Q = \frac{E_{\text{k}}}{\overline{E}s}$$

där $E_{\text{k}} = 0{,}15\text{ J},\ \overline{E} = 350$ V/m och s = 0,40 m

vilket ger $Q = \dfrac{0{,}15}{350 \cdot 0{,}40}\text{ C} = 0{,}00107\text{ C}$

Svar: 1,1 mC

9.12 Rörelsen vinkelrät mot fältlinjerna är likformig och den parallell med fältlinjerna är likformigt accelererad.

Elektronens ursprungliga hastighet är vinkelrät mot fältlinjerna och ändras därmed inte under rörelsen, $v_x = v_{0x} = 5{,}0 \cdot 10^5$ m/s. Det ger oss tiden att förflytta sig 1,0 cm i den riktningen från

$$x = v_{0x} \cdot t$$

som $t = \dfrac{x}{v_{0x}} = \dfrac{0{,}010}{5{,}0 \cdot 10^5}\text{ s} = 2{,}0 \cdot 10^{-8}\text{ s}$

I fältets riktning är rörelsen likformigt accelererad och hastigheten där ändras enligt

$$v_y = v_{0y} + at$$

där $\qquad v_{0y} = 0$ m/s

och $\qquad a = \frac{F}{m} = \frac{Q\overline{E}}{m}$

vilket ger

$$v_y = \frac{Q\overline{E}}{m} t = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 500}{9{,}109 \cdot 10^{-31}} 2{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ m/s} =$$

$$= 1758700 \text{ m/s}$$

Storleken på elektronens hastighet efter att den rört sig 1,0 cm genom fältet fås med Pythagoras sats.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(5{,}0 \cdot 10^5\right)^2 + 1758700^2} \text{ m/s} =$$

$$= 1828394 \text{ m/s}$$

och riktningen

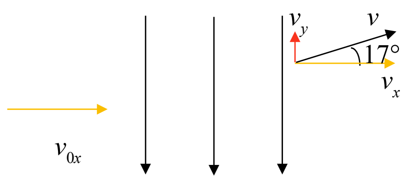
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1758700}{5{,}0 \cdot 10^5}\right)^{\circ} = 74{,}1°$$

Svar: $1{,}8 \cdot 10^6$ med riktning 74° ovan dess ursprungliga rörelseriktning

9.13 Rörelsen vinkelrät mot fältlinjerna är likformig och den parallell med fältlinjerna är likformigt accelererad.

Elektronens ursprungliga hastighet, v_{0x}, ska bestämmas. Den är vinkelrät mot fältlinjerna och är därmed oförändrad under rörelsen. Alltså är

$$v_{0x} = v_x$$



där

$$v_x = v \cdot \cos 17 = 3,7 \cdot 10^6 \cdot \cos 17 = \ 3538327 \text{ m/s}$$

Svar: 3,5 Mm/s

Simulering av tvådimensionell rörelse

9.14 Eulers stegmetod delar in tiden i små steg och beräknar storheters förändring under dessa tidssteg.
Svar: Sant

9.15 Se bokens Svar till övningar.

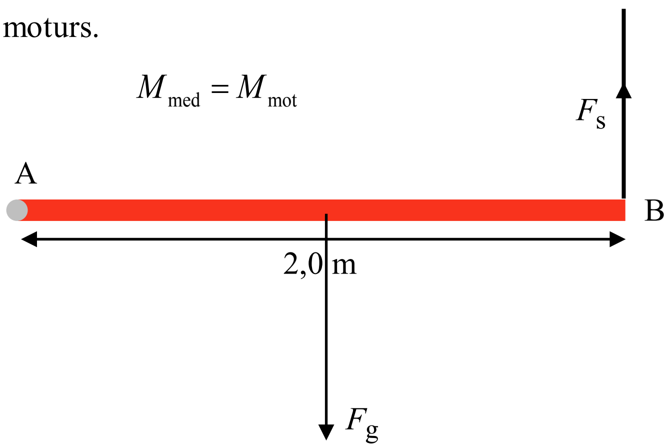
9.16 Se bokens Svar till övningar.

Vridmoment

9.17 a) Vridmoment har enheten Nm. Energi har enheten J eller Nm.
b) Om föremålet är konstant, d.v.s. det är stilla eller roterar med en konstant hastighet, är summan av vridmomenten på det noll. Om föremålets rotation ändrar sig är summan av vridmomenten inte lika med noll
Svar: a) Sant och b) falskt

9.18 Stavens fastsättning i A väljs som momentpunkt. Staven är still, alltså är summan av vridmomenten medurs lika med summan moturs.

$$M_{\text{med}} = M_{\text{mot}}$$



Detta ger $F_g r_{\text{stav}} = F_s r_s$

eller $m_{\text{stav}} g r_{\text{stav}} = F_s r_s$

ur vilket den sökta kraften fås som

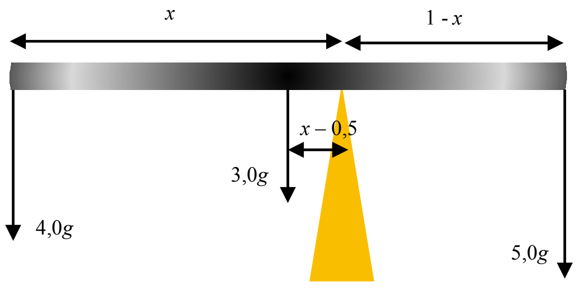
$$F_s = \frac{m_{\text{stav}} g r_{\text{stav}}}{r_s}$$

där $m_{\text{stav}} = 1{,}5$ kg, $r_{\text{stav}} = 1{,}0$ m och $r_s = 2{,}0$ m

och $F_s = \frac{1{,}5 \cdot 9{,}82 \cdot 1{,}0}{2{,}0}$ N $= 7{,}365$ N

Svar: 7,4 N

9.19 Stångens kontakt med stödet väljs som momentpunkt. Stången är still, alltså är summan av vridmomenten medurs lika med summan moturs. $M_{\text{med}} = M_{\text{mot}}$



Detta ger $5{,}0g(1-x) = 3{,}0g(x-0{,}5) + 4{,}0gx$

eller $5{,}0(1-x) = 3{,}0(x-0{,}5) + 4{,}0x$

$$5{,}0 - 5{,}0x = 3{,}0x - 1{,}5 + 4{,}0x$$

ur vilket den sökta sträckan fås enligt

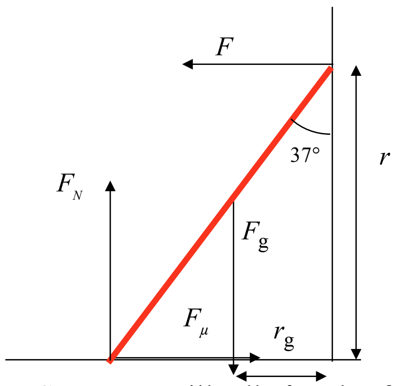
$$5{,}0 + 1{,}5 = 3{,}0x + 4{,}0x + 5{,}0x$$

som $x = \frac{5{,}0 + 1{,}5}{3{,}0 + 4{,}0 + 5{,}0}$ m $= 0{,}542$ m

Svar: 0,54 m

9.20 Se bokens Svar till övningar.

9.21



Stegen är still, alltså är kraften från väggen lika stor som friktionskraften

$$F = F_\mu$$

och summan av vridmomenten medurs lika med summan moturs $M_{\text{med}} = M_{\text{mot}}$

Stegens kontakt med golvet väljs som momentpunkt.
Det är nu två krafter som ger upphov till moment kring momentpunkten: tyngdkraften på stegen, F_g, och kraften från väggen på stegen, F.

Detta ger $Fr = F_g r_g$

eller $F_\mu r = F_g r_g$

ur vilket den sökta friktionskraften fås

$$F_\mu = \frac{F_g r_g}{r} = \frac{mgr_g}{r}$$

Hävarmar, r och r_g, fås med trigonometri från

$$\sin 37^\circ = \frac{2r_g}{5{,}0}$$

och $$\cos 37^\circ = \frac{r}{5{,}0}$$

som $$r_g = \frac{5{,}0 \sin 37^\circ}{2}\ \text{m} = 1{,}505\ \text{m}$$

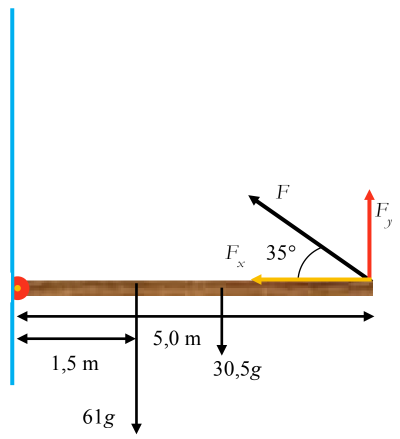
och $$r = 5{,}0 \cos 37^\circ\ \text{m} = 3{,}99\ \text{m}$$

Den sökta friktionskraften kan nu beräknas som

$$F_\mu = \frac{11 \cdot 9{,}82 \cdot 1{,}505}{3{,}99}\,\text{N} = 40{,}74\ \text{N}$$

Svar: 41 N

9.22



a) Plankan är still, alltså är summan av vridmomenten medurs lika med summan moturs

$$M_{\text{med}} = M_{\text{mot}}$$

Plankans infästning i väggen väljs som momentpunkt.
Det är nu tre krafter som ger upphov till moment kring momentpunkten: tyngdkraften på plankan, tyngdkraften på personen och den sökta kraften i repet, F. Kraften i repet ersätts med två krafter, en horisontell och en vertikal, F_x resp. F_y, Enligt

$$F_x = F\cos 35^\circ$$

och $$F_y = F\sin 35^\circ$$

Hävarmen för F_x är då 0 och för F_y är den 5,0 m.

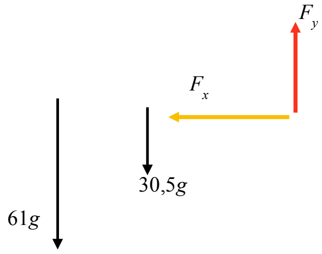
Detta ger $M_{\text{med}} = M_{\text{mot}}$

$$61g \cdot 1{,}5 + 30{,}5g \cdot \frac{5{,}0}{2} = F\sin 35^\circ \cdot 5{,}0\,\text{N}$$

ur vilket den sökta kraften fås

$$F = \frac{61g \cdot 1{,}5 + 30{,}5g \cdot \frac{5{,}0}{2}}{\sin 35^\circ \cdot 5{,}0}\,\text{N} = 574\ \text{N}$$

b) I och med att plankan säger Newtons 2:a lag att den resulterande kraften på den är noll. Kraften från väggen på plankan är då lika stor som, men motriktad, summan av de två tyngdkrafterna och kraften från repet.

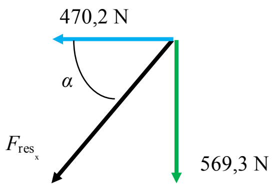


I horisontalled finns endast

$$F_x = F\cos 35^\circ = 574\cos 35^\circ \text{ N} = 470{,}2 \text{ N}$$

I vertikalled summerar krafterna ihop till

$$61g + 30{,}5g - F_y = g(61+30{,}5) - 574\sin 35^\circ \text{ N} = 569{,}3 \text{ N}$$



Den resulterande kraftens storlek fås sedan, m.h.a. Pythagoras sats

$$F_{\text{res}} = \sqrt{470{,}2^2 + 569{,}3^2} \text{ N} = 738{,}4 \text{ N}$$

och riktning

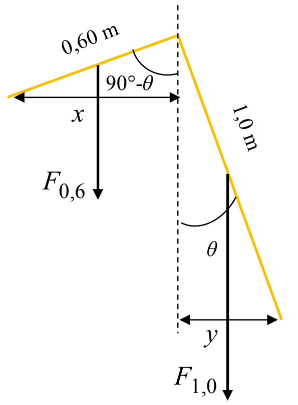
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{569{,}3}{470{,}2}\right)^\circ = 50{,}44^\circ$$

enligt figur.

Kraften från väggen är nu lika stor som F_{res} och motriktad.

Svar: a) 570 N och b) 740 N riktad 50° snett uppåt höger

9.23



Stavens upphängning där den böjts till ett *L* väljs som momentpunkt.

L:et är still, alltså är summan av vridmomenten medurs lika med summan moturs $M_{\text{med}} = M_{\text{mot}}$

Det är nu två krafter som ger upphov till moment kring momentpunkten: tyngdkraften på 0,6 m delen, $F_{0,6}$, och tyngdkraften på 1,0 m delen, $F_{1,0}$. De ges av

$$F_{0,6} = m_{0,6}g = V_{0,6}\rho g = l_{0,6}A\rho g = 0{,}6A\rho g$$

och $$F_{1,0} = m_{1,0}g = V_{1,0}\rho g = l_{1,0}A\rho g = 1{,}0A\rho g$$

där A är stavens tvärsnittsarea och ρ dess densitet.

Tyngdkrafternas hävarmar är, enligt figur, $x/2$ resp. $y/2$ där

$$\sin(90-\theta) = \frac{x}{0{,}6}$$

och $$\sin\theta = \frac{y}{1{,}0}$$

Detta ger $F_{1,0}\dfrac{y}{2} = F_{0,6}\dfrac{x}{2}$

$$1{,}0A\rho g\frac{1{,}0\sin\theta}{2} = 0{,}6A\rho g\frac{0{,}6\sin(90-\theta)}{2}$$

eller $$\sin\theta = 0{,}6^2\sin(90-\theta)$$

$$\sin\theta = 0{,}6^2\cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0{,}6^2$$

$$\tan\theta = 0{,}6^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(0{,}6^2\right)^{\circ} = 19{,}8^{\circ}$$

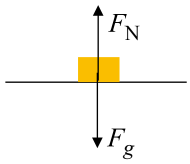
Svar: 20°

Centralrörelse

9.24 Vid centralrörelse accelerationen alltid vinkelrät mot hastigheten, riktad mot cirkelns centrum. Den resulterande kraften har, enligt Newtons 2:a lag, samma riktning som accelerationen.

Svar: Sant

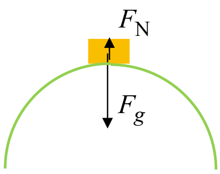
9.25 a)



Bilen accelereras inte i vertikalled. Därmed är den resulterande kraften noll i den riktningen och

$$F_{\mathrm{N}} = F_g = mg = 1000 \cdot 9{,}82\ \mathrm{N} = 9820\ \mathrm{N}$$

b)



Bilen utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{\mathrm{res}} = \frac{mv^2}{r}$$

Den resulterande kraften ges också av

$$F_{\mathrm{res}} = F_g - F_{\mathrm{N}}$$

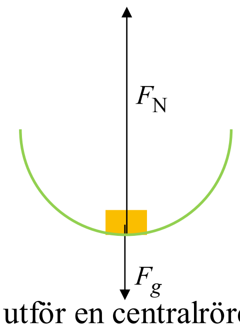
Detta ger $\frac{mv^2}{r} = F_g - F_{\mathrm{N}}$

eller $F_{\mathrm{N}} = F_g - \frac{mv^2}{r} = mg - \frac{mv^2}{r} = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right)$

där $v = 72\,\text{km/h} = 20\,\text{m/s}$ och $r = 50$ m vilket ger

$$F_N = 1000\left(9{,}82 - \frac{20^2}{50}\right)\text{N} = 1820\ \text{N}$$

c)



Bilen utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{res} = \frac{mv^2}{r}$$

Den resulterande kraften ges också av

$$F_{res} = F_N - F_g$$

Detta ger $\dfrac{mv^2}{r} = F_N - F_g$

eller $F_N = F_g + \dfrac{mv^2}{r} = mg + \dfrac{mv^2}{r} = m\left(g + \dfrac{v^2}{r}\right) =$

$$= 1000\left(9{,}82 + \frac{20^2}{50}\right)\text{N} = 17820\ \text{N}$$

Svar: a) 9,8 kN, b) 1,8 kN och c) 18 kN

9.26 Bilen utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{res} = \frac{mv^2}{r}$$

Den resulterande kraften utgörs här av friktionskraften

$$F_{res} = F_\mu = \mu F_N = \mu mg$$

Detta ger $\dfrac{mv^2}{r} = \mu mg$

eller $v = \sqrt{\mu r g}$

där $\mu = 0{,}30$ m/s och r = 25 m vilket ger

$v = \sqrt{0{,}30 \cdot 25 \cdot 9{,}82}$ m/s = 8,58 m/s

Svar: 8,5 m/s

9.27 a) Bilens fart i P fås m.h.a. den mekaniska energins bevarande

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

eller $v = \sqrt{2gh}$

där h = 0,66 – 0,48 m = 0,18 m

vilket ger $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}18}$ m = 1,88 m/s

b) Bilen utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{\text{res}} = \frac{mv^2}{r}$$

Den resulterande kraften i P ges också av

$$F_{\text{res}} = F_g + F_{\text{N}}$$

Detta ger $\dfrac{mv^2}{r} = F_g + F_{\text{N}}$

eller $F_{\text{N}} = \dfrac{mv^2}{r} - F_g = \dfrac{mv^2}{r} - mg = m\left(\dfrac{v^2}{r} - g\right)$

där m = 0,125 kg, v = 1,88 m/s (från a))

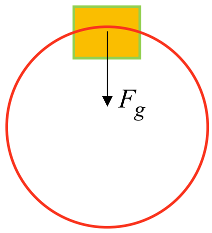
och r = 0,48/2 m = 0,24 m

Detta ger den sökta normalkraften som

$$F_{\text{N}} = 0{,}125\left(\frac{1{,}88^2}{0{,}24} - 9{,}82\right)\text{N} = 0{,}613\text{ N}$$

a) 1,9 m/s och b) 0,61 N

9.28 a) Den minsta farten som ger ett spänt snöre i cirkelns högsta punkt fås då kraften i snöret är precis noll i cirkelns högsta punkt. På klossen verkar då endast tyngdkraften. Detta ger



Klossen utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{\text{res}} = \frac{mv^2}{r}$$

Den resulterande kraften ges här också av

$$F_{\text{res}} = F_g$$

Detta ger $\dfrac{mv^2}{r} = mg$

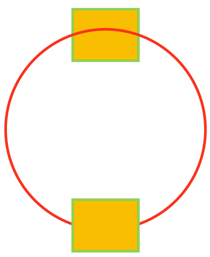
och den sökta farten som

$$v = \sqrt{rg}$$

där $r = 0{,}80$ m

vilket ger $v = \sqrt{0{,}80 \cdot 9{,}82}$ m/s $= 2{,}80$ m/s

b) Mekaniska energins bevarande ger



$$mgh + \frac{mv^2}{2}$$

$$mgh_{nere} + \frac{mv_{nere}^2}{2}$$

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = mgh_{nere} + \frac{mv_{nere}^2}{2}$$

$$gh + \frac{v^2}{2} = gh_{nere} + \frac{v_{nere}^2}{2}$$

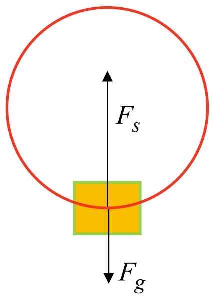
där $h = 1{,}6$ m, $v = 2{,}80$ m/s (enligt a))

$h_{\text{nere}} = 0{,}0$ cm

Detta ger $v_{nere}^2 = 2\left(gh + \dfrac{v^2}{2}\right)$

$$v_{nere} = \sqrt{2gh + v^2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}82 \cdot 1{,}6 + 2{,}80^2} \text{ m/s} = 6{,}27 \text{ m/s}$$

c)



Klossen utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{\text{res}} = \frac{mv_{nere}^2}{r}$$

Den resulterande kraften ges här av

$$F_{\text{res}} = F_s - F_g$$

Detta ger $\dfrac{mv_{nere}^2}{r} = F_s - F_g$

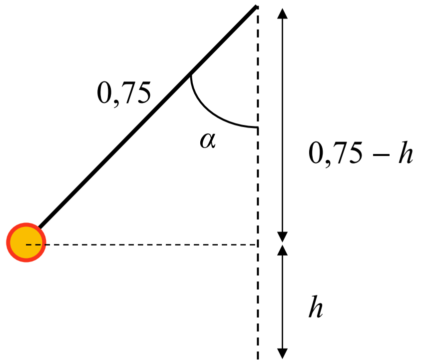
och den sökta kraften i snöret som

$$F_s = \frac{mv_{nere}^2}{r} + F_g = \frac{mv_{nere}^2}{r} + mg = m\left(\frac{v_{nere}^2}{r} + g\right) =$$

$$= 2{,}0\left(\frac{6{,}27^2}{0{,}80} + 9{,}82\right) \text{N} = 117{,}9 \text{ N}$$

Svar: a) 2,8 m/s, b) 6,3 m/s och c) 120 N

9.29



Vinkeln α fås som

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{0{,}75 - h}{0{,}75}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{h}{0{,}75}\right)$$

där h fås från den mekaniska energins bevarande enligt

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

som $h = \frac{v^2}{2g}$

vilket ger $\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{v^2}{2g0{,}75}\right)$

Den saknade v^2 fås i sin tur från att kulan utför en centralrörelse. Därmed är den resulterande kraften riktad mot cirkelns centrum och dess storlek är

$$F_{\text{res}} = \frac{mv^2}{r}$$

I rörelsens nedersta punkt är

$$F_{\text{res}} = F_s - F_g$$

Detta ger $\frac{mv^2}{r} = F_s - mg$

och den sökta v^2 som

$$v^2 = r\left(\frac{F_s}{m} - g\right)$$

vilket ger den sökta vinkeln som

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{r\left(\frac{F_s}{m} - g\right)}{2g0{,}75}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{r}{2g0{,}75}\left(\frac{F_s}{m} - g\right)\right)$$

där $F_s = 2{,}0\,\text{N}$, $r = 0{,}75$ m och $m = 0{,}150$ kg

Den sökta vinkeln fås nu som

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{0{,}75}{2\cdot 9{,}82\cdot 0{,}75}\left(\frac{2{,}0}{0{,}150} - 9{,}82\right)\right)^\circ =$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2\cdot 9{,}82}\left(\frac{2{,}0}{0{,}150} - 9{,}82\right)\right)^\circ = 34{,}8^\circ$$

Svar: 35°

Harmonisk rörelse

9.30 En harmonisk rörelses period ges av

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{y}{a}}$$

vilket är inte innehåller något amplitudberoende.

Svar: Sant

9.31 Vinkelhastigheten ges av

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

där $T = 60\ \text{s}$

vilket ger $\omega = \dfrac{2\pi}{60}$ rad/s = 0,1047 rad/s

Svar: 0,10 rad /s

9.32 a) Ett uttryck för kulans fart fås genom att derivera uttrycket för hastigheten en gång med avseende på tiden. Detta ger

$$v\,(t) = y'\,(t) = 1{,}3\cdot 0{,}19\cos(1{,}3t) = 0{,}247\cos(1{,}3t)$$

Kulans fart vid $t = 0{,}8$ s fås sedan som

$$v\,(0{,}8) = 0{,}247\cos(1{,}3\cdot 0{,}8)\ \text{m/s} = 0{,}1251\ \text{m/s}$$

b) Newtons 2:a lag ger den resulterande kraften som

$$F_{\text{res}} = ma$$

Här är $m = 0{,}85$ kg

och ett uttryck för accelerationen fås genom att derivera uttrycket för hastigheten en gång med avseende på tiden. Detta ger

$$a\,(t) = v'\,(t) = 1{,}3 \cdot 0{,}247\sin(1{,}3t) = 0{,}3211\sin(1{,}3t)$$

Kulans acceleration vid $t = 0{,}8$ s fås sedan som

$$a\,(0{,}8) = 0{,}3211\sin(1{,}3 \cdot 0{,}8)\ \text{m/s}^2 = 0{,}277\ \text{m/s}^2$$

Den resulterande kraften fås nu som

$$F_{\text{res}} = 0{,}85 \cdot 0{,}277\ \text{N} = 0{,}236\ \text{N}$$

Svar: a) 0,13 m/s och b) 0,24 N

Kraftresultant

9.33 Vid en harmonisk rörelse ges kraftresultanten av

$$F_{\text{res}} = -m\omega^2 y$$

Se t.ex. Figur 9.17: Då massan befinner sig nedanför jämviktsläget är y negativ. Detta ger en positiv kraftresultant som då är riktad uppåt, mot jämviktläget. Då massan befinner sig ovanför jämviktsläget är y positiv. Detta ger en negativ kraftresultant som då är riktad nedåt, mot jämviktläget.

Svar: Sant

9.34 Vid jämvikt är summan av krafterna på föremålet noll. På föremålet verkar två krafter: tyngdkraften nedåt och kraften från fjädern uppåt. Detta ger

$$mg = k\Delta L$$

Ur detta fås fjäderkonstanten som

$$k = \frac{mg}{\Delta L}$$

där $m = 0{,}47$ kg och $\Delta L = 0{,}014$ m

Detta ger $k = \dfrac{0{,}47 \cdot 9{,}82}{0{,}014}$ N/m = 329,7 N/m

Svar: 330 N/m

Svängningsenergi

9.35 Denna övning kan lösas på minst två sätt

1) Föremålets rörelseenergi ges av

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{mv^2}{2}$$

där hastigheten vid harmonisk rörelse ges av

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t)$$

Föremålets hastighet, och därmed också rörelseenergi, är maximal vid jämviktsläget. Då är hastigheten

$$v(t) = \omega A$$

och rörelseenergin

$$E_{\mathrm{k,max}} = \frac{m(\omega A)^2}{2}$$

Mitt emellan jämviktsläget och vändläget är föremålets hastighet

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t)$$

och rörelseenergin

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{m(\omega A \cos \omega t)^2}{2} = \frac{m(\omega A)^2 (\cos \omega t)^2}{2} = E_{\mathrm{k,max}} (\cos \omega t)^2$$

t är tidpunkten då föremålet befinner sig mitt emellan jämviktsläget och vändläget. Denna fås från

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

med $y = A/2$ som

$$t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

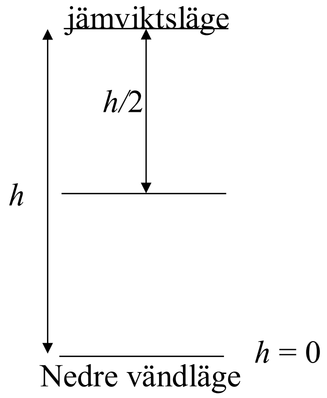
Föremålets rörelseenergi mitt emellan jämviktsläget och vändläget kan nu skrivas som

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k,max}}\left(\cos\left(\omega\frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2 =$$

$$= E_{\mathrm{k,max}}\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)^2 = E_{\mathrm{k,max}}\frac{3}{4}$$

Då föremålet är mitt emellan jämviktsläget och vändläget är dess rörelseenergi alltså ¾ av sitt maximala värde.

2) En alternativ lösningsväg går via energi:



Antag att fjädern är sträckt ΔL då föremålet är i jämviktsläget.

Då gäller $k\Delta L = mg$

eller $\Delta L = \dfrac{mg}{k}$

Sedan dras föremålet en sträcka *h* nedanför jämviktsläget och släpps. Den totala svängningsenergin är då

$$E_{\mathrm{sväng}} = \frac{k(\Delta L + h)^2}{2} = \frac{k\Delta L^2}{2} + \frac{kh^2}{2} + k\Delta L h$$

Föremålet har sin största hastighet, och därmed sin största rörelseenergi $E_{\mathrm{k,max}}$, då det passerar jämviktsläget.

Då föremålet passerar jämviktsläget har en del av svängningsenergin omvandlats till lägesenergi och en del till rörelseenergi.

$$E_{\mathrm{sväng}} = \frac{k\Delta L^2}{2} + E_{\mathrm{k,max}} + mgh$$

Den totala svängningsenergin bevaras vilket ger oss

$$\frac{k\Delta L^2}{2}+\frac{kh^2}{2}+k\Delta Lh=\frac{k\Delta L^2}{2}+E_{\mathrm{k,max}}+mgh$$

vilket ges oss den maximala rörelseenergin som

$$E_{\mathrm{k,max}}=\frac{kh^2}{2}+k\Delta Lh-mgh=$$

$$=\frac{kh^2}{2}+k\frac{mg}{k}h-mgh=$$

$$=\frac{kh^2}{2}+mgh-mgh=$$

$$=\frac{kh^2}{2}$$

Då föremålet just passerar läget mitt emellan jämviktsläget och vändläget jämviktsläget har vi

$$E_{\mathrm{sväng}}=\frac{k\left(\Delta L+\frac{h}{2}\right)^2}{2}+E_{\mathrm{k}}+mg\frac{h}{2}$$

eller $$E_{\mathrm{sväng}}=\frac{k\Delta L^2}{2}+\frac{kh^2}{8}+\frac{k\Delta Lh}{2}+E_{\mathrm{k}}+mg\frac{h}{2}$$

Den totala svängningsenergin bevaras vilket ger oss

$$\frac{k\Delta L^2}{2}+\frac{kh^2}{2}+k\Delta Lh=\frac{k\Delta L^2}{2}+\frac{kh^2}{8}+\frac{k\Delta Lh}{2}+E_{\mathrm{k}}+mg\frac{h}{2}$$

vilket ges oss rörelseenergin i detta läge enligt

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{kh^2}{2}+k\Delta Lh-\frac{kh^2}{8}-\frac{k\Delta Lh}{2}-mg\frac{h}{2}=$$

$$=\frac{3kh^2}{8}+\frac{k\Delta Lh}{2}-\frac{mgh}{2}=$$

$$=\frac{3kh^2}{8}+\frac{k\frac{mg}{k}h}{2}-\frac{mgh}{2}=$$

$$=\frac{3kh^2}{8}+\frac{mgh}{2}-\frac{mgh}{2}=$$

$$=\frac{3kh^2}{8}=\frac{3}{4}\frac{kh^2}{2}=\frac{3}{4}E_{\mathrm{k,max}}$$

Då föremålet är mitt emellan jämviktsläget och vändläget är dess rörelseenergi alltså ¾ av sitt maximala värde.

Svar: Falskt

9.36 a) Hookes lag kopplar ihop fjäderns förlängning med kraften som kompisen drar i fjädern med.

$$F = k\Delta L$$

vilket ger oss fjäderns förlängning som

$$\Delta L = \frac{F}{k}$$

där F = 850 N och k = 3,4 kN/m

Detta ger $\Delta L = \dfrac{850}{3400}$ m = 0,25 m

b) Den maximala hastigheten fås då all energi som lagrats i fjädern omvandlats till rörelseenergi

$$\frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

ur vilket den sökta hastigheten fås som

$$v = \sqrt{\frac{k\Delta L^2}{m}} = \Delta L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

där ΔL = 0,25 m, k = 3,4 kN/m och m = 70 kg

vilket ger $v = 0{,}25\sqrt{\dfrac{3400}{70}}$ m/s = 1,74 m/s

Svar: a) 0,25 m och b) 1,7 m/s

9.37 Just då kulan fastnat i klossen har de en gemensam rörelseenergi som, under hoptryckandet av fjädern, omvandlas till potentiell energi i fjädern.

$$\frac{(m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}})v_{\text{efter}}^2}{2} = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

ur vilket den sökta hoptryckningen fås som

$$\Delta L = \sqrt{\frac{(m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}})v_{\text{efter}}^2}{k}} = v_{\text{efter}}\sqrt{\frac{(m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}})}{k}}$$

där m_{kula} = 0,0070 kg, m_{kloss} = 2,5 kg, k = 15 N/m och v_{efter} är kulans och klossens gemensamma hastighet just efter kollisionen.

Rörelsemängdens bevarande ger oss den saknade hastigheten.

$$m_{\text{kula}} v_{\text{före}} = (m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}}) v_{\text{efter}}$$

$$v_{\text{efter}} = \frac{m_{\text{kula}} v_{\text{före}}}{(m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}})} = \frac{0{,}0070 \cdot 120}{(0{,}0070 + 2{,}5)} \text{ m/s} = 0{,}3351 \text{ m/s}$$

Nu kan den sökta hoptryckningen beräknas

$$\Delta L = 0{,}3351 \sqrt{\frac{(0{,}0070 + 2{,}5)}{15}} \text{ m} = 0{,}137 \text{ m}$$

Svar: 0,14 m

9.38 Antag att

i) det osträckta gummibandets sökta längd är l.

ii) gummibandet är h långt då det är maximalt sträckt.

Gummibandets maximala förlängning är då $\Delta L = h - l$.

Din totala fallhöjd är lika med gummibandets största längd h.

Innan du faller har du således lägesenergin

$$mgh$$

Då gummibandet bromsat upp dig har din lägesenergi omvandlats till potentiell energi i gummibandet

$$mgh = \frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{k(h-l)^2}{2}$$

ur vilket den sökta längden fås enligt

$$\frac{2mgh}{k} = (h-l)^2$$

$$\frac{2mgh}{k} = h^2 + l^2 - 2lh$$

Detta är en andragradsekvation som skrivs om för att kunna lösas med pg-formeln

$$l^2 - 2lh + h^2 - \frac{2mgh}{k} = 0$$

In med siffror

$$l^2 - 2\cdot 52\cdot l + 52^2 - \frac{2\cdot 78\cdot 9{,}82\cdot 52}{83} = 0$$

$$l^2 - 104\cdot l + 1744{,}2 = 0$$

pq-formeln

$$l = \frac{104}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{104}{2}\right)^2 - 1744{,}2}\ \text{m} = 52 \pm 30{,}981\ \text{m}$$

där 21,02 m är det enda möjliga alternativet.

Svar: 21 m

9.39 a) Bilens ursprungliga lägesenergi omvandlas till potentiell energi i fjädern under kollisionen.

$$mgh = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

ur vilket den sökta hoptryckningen fås som

$$\Delta L = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$$

där m = 1 300 kg, h = 12 m och k = $2{,}0\cdot 10^6$ N/m

vilket ger $\Delta L = \sqrt{\dfrac{2\cdot 1300\cdot 9{,}82\cdot 12}{2{,}0\cdot 10^6}}$ m = 0,391 m

b) Bilens acceleration är, enligt Newtons 2:a lag, störst då den resulterande kraften är störst. Kraften som accelererar bilen är kraften från fjädern. Detta ger oss

$$ma = -k\Delta L$$

eller $a = \dfrac{-k\Delta L}{m} = \dfrac{-2{,}0\cdot 10^6\cdot 0{,}391}{1300}$ m/s² = –602 m/s²

Svar: 600 m/s²

9.40 a) Fjäderns maximala utsträckning, ΔL, fås då laddningens potentiella energi i fältet omvandlats till potentiell energi i fjädern.

$$Q\overline{E}\Delta L = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

vilket ger den maximala förlängningen som

$$\Delta L = \frac{2Q\overline{E}}{k}$$

där $Q = 40 \cdot 10^{-6}$ C, $\overline{E} = 4{,}0 \cdot 10^{5}$ N/m och $k = 75$ N/m

vilket ger $\Delta L = \dfrac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{5}}{75}$ m = 0,427 m

b) Klossens jämviktsläge infinner sig där kraften från fältet är lika stor som kraften från fjädern

$$Q\overline{E} = kx$$

eller $x = \dfrac{Q\overline{E}}{k} = \dfrac{\Delta L}{2}$ m = 0,213 m

Svar: a) 0,43 m och b) 0,21 m

Periodtid

9.41 Periodtiden för en matematisk pendel ges av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

vilket är oberoende av massan hos det hänger i pendeln.

Svar: Sant

9.42 a) Vinkelhastigheten fås som

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

där $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

vilket ger $\omega = \dfrac{2\pi}{\left(2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right)} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

där $k = 65$ N/m och $m = 0{,}680$ kg

vilket ger $\omega = \sqrt{\dfrac{65}{0{,}680}}$ rad/s = 9,78 rad/s

Frekvensen fås som

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}9{,}78 \text{ Hz} =$$

$$= 1{,}56 \text{ Hz}$$

och amplituden blir lika med avståndet klossen dras från sitt jämviktsläge, d.v.s. 0,11 m

b) Klossens hastighet ges av

$$v = \omega A\cos(\omega t)$$

och är maximal då cos-termen är maximal.

Hastighetens maximala värde fås då som

$$v_{\max} = \omega A = 9{,}78 \cdot 0{,}11 \text{ m/s} = 1{,}08 \text{ m/s}$$

Detta inträffar då den accelererande kraften verkat så länge som möjligt i samma riktning, d.v.s. då klossen passerar jämviktsläget.

c) Klossens acceleration ges av

$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t)$$

och är maximal då sin-termen är maximal.

Accelerationens maximala värde fås då som

$$a_{\max} = \omega^2 A = 9{,}78^2 \cdot 0{,}11 \text{ m/s}^2 = 10{,}52 \text{ m/ s}^2$$

Detta inträffar då den resulterande kraften på klossen är maximal, d.v.s. då fjädern är som mest sträckt, d.v.s. i vändläget.

Svar: a) 9,8 rad/s 1,6 Hz och 0,11 m,

b) 1,1 m/s då jämviktsläget passeras och c) 11 m/ s^2 i vändläget.

9.43 Periodtiden ges av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ur vilket den sökta fjäderkonstanten fås som

$$k = \frac{m}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

där $m = 0{,}440$ kg och $T = 8{,}8/15$ s $= 0{,}5867$ s

Detta ger $k = 0{,}440\left(\frac{2\pi}{0{,}5867}\right)^2$ N/m = 50,4 N/m

Svar: 50 N/m

9.44 Denna övning kan lösas på minst två sätt

1) Mitt emellan jämviktsläget och vändläget är kulans fart

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t)$$

där t är tidpunkten då kulan befinner sig mitt emellan jämviktsläget och vändläget. Denna fås från

$$y(t) = A\sin(\omega t)$$

med $y = A/2$ som

$$t = \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Kulans fart mitt emellan jämviktsläget och vändläget kan nu skrivas som

$$v = \omega A\cos\left(\omega\frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \omega A\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

där $\omega = \frac{2\pi}{T}$

vilket ger $v = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

där $T = 0{,}75$ s och $A = 0{,}15$ m

Detta ger $v = \frac{2\pi}{0{,}75}0{,}15\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ m/s = 1,09 m/s

2) En alternativ lösningsväg går via energi.

Kulans rörelseenergi ges av

$$E_\mathrm{k} = \frac{mv^2}{2}$$

Kulans rörelseenergi då den befinner sig mitt emellan vändläget och jämviktsläget ges, enligt 9.35, också av

$$E_\mathrm{k} = \frac{3}{4}\frac{kh^2}{2}$$

Detta ger $\dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{3}{4}\dfrac{kh^2}{2}$

eller $v = \sqrt{\dfrac{3}{4}\dfrac{kh^2}{m}} = \dfrac{h}{2}\sqrt{3\dfrac{k}{m}}$

där $h = 0{,}15$ m

och k behöver bestämmas. Fjäderkonstanten fås från

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

som $k = m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$

vilket ger $v = \dfrac{h}{2}\sqrt{3\dfrac{m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2}{m}} = \dfrac{h}{2}\sqrt{3\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2} =$

$$= \frac{2\pi}{T}\frac{h}{2}\sqrt{3} = \frac{h\pi}{T}\sqrt{3}$$

där $T = 0{,}75$ s

Den sökta hastigheten fås nu som

$$v = \frac{h\pi}{T}\sqrt{3} = \frac{0{,}15\cdot\pi}{0{,}75}\sqrt{3}\text{ m/s} = 1{,}09\text{ m/s}$$

Svar: 1,1 m/s

9.45 Pendelns svängningstid ges av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

där $l = 1{,}0$ m och $g = 9{,}82$ m/s^2. Detta ger periodtiden

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}0}{9{,}82}}\text{ s} = 2{,}004\text{ s}$$

Pendelns längd på Mars fås som

$$l = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

där $g = 3{,}77$ m/s^2

och $T = 2{,}004$ s

$$l = 3{,}77\left(\frac{2{,}004}{2\pi}\right)^2 \text{ m} = 0{,}384 \text{ m}$$

Svar: 0,38 m

9.46 a) Klotet har sin maximala hastighet då jämviktsläget passeras. Detta inträffar 0,25 s efter att det släppts. Rörelsen från det att klotet släppts till det passerar jämviktsläget första gången utgör en fjärdedel av hela svängningsrörelsen. Alltså utgör tiden för detta en fjärdedel av periodtiden. Detta ger

$$\frac{T}{4} = 0{,}25 \text{ s}$$

eller $T = 1{,}0 \text{ s}$

b) Klotets lägesenergi då det hålls 25 cm ovan jämviktsläget har helt omvandlats till rörelseenergi då det passerar jämviktsläget.

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

Detta ger $v = \sqrt{2gh}$

där $h = 0{,}25 \text{ m}$

vilket ger $v = \sqrt{2 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}25} \text{ m/s} = 2{,}22 \text{ m/s}$

Svar: a) 1,0 s och b) 2,2 m/s

9.47 Först har vi

$$mg = k_1 \Delta L$$

och $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$

eller $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}$

Sedan har vi

$$mg = k_2 2\Delta L$$

eller $k_2 = \frac{mg}{2\Delta L} = \frac{k_1}{2}$

och $\quad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_1$

Svar: $f_2 = \frac{f_1}{\sqrt{2}}$

9.48 Rörelsens period fås som

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Kvoten $\frac{m}{k}$ kan fås på minst två sätt

1) Via kraft: I jämviktsläget har vi

$$k\Delta L = mg$$

Detta ger $\frac{m}{k} = \frac{\Delta L}{g}$

där $\quad \Delta L = \frac{0{,}35}{2}\text{ m} = 0{,}175\text{ m}$

Perioden fås här som

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}175}{9{,}82}} = 0{,}839\text{ s}$$

2) Via energi: Om rörelsens botten väljs som nollnivå för kulans lägesenergi fås lägesenergin som

$$E_\text{p} = mg\Delta L$$

där $\quad \Delta L = 0{,}35\text{ m}$

Vid rörelsens botten har all lägesenergi omvandlats till potentiell energi i fjädern

$$mg\Delta L = \frac{k\Delta L^2}{2}$$

Detta ger $\frac{m}{k} = \frac{\Delta L}{2g}$

och perioden som

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}35}{2\cdot 9{,}82}} = 0{,}839 \text{ s}$$

Svar. 0,84 s