4 Energi

Energiprincipen

4.1 Energin bevaras. Alltså är

$$E_{\text{före}} = E_{\text{efter}}$$

$$2{,}9 = 1{,}1 + 0{,}2 + E_3$$

vilket ger $E_3 = 2{,}9 - 1{,}1 - 0{,}2\ \text{J} = 1{,}6\ \text{J}$

Svar: 1,6 J

Arbete, effekt och verkningsgrad

4.2 Sant: Utfört arbete är lika stort som den energi som omvandlas p.g.a. arbetet.

Svar: Sant

4.3 Utfört arbete ges av

$$W = Fs$$

I och med att hastigheten är konstant under lyftet är kraften du lyfter med lika stor som tyngdkraften på hinken.

$$F = mg$$

vilket ger $W = mgs$

ur vilket det sökta djupet fås

$$s = \frac{W}{mg}$$

Där är W = 3,0 kJ och m = 10 kg

vilket ger $s = \dfrac{3000}{10 \cdot 9{,}82}$ m = 30,54 m

Svar: 31 m

4.4 Effekt $P = \frac{W}{t}$

där $W = Fs$

vilket ger $P = \frac{Fs}{t}$

Newtons andra lag ger

$$F = ma$$

vilket ger $P = \frac{mas}{t}$

där $a = \frac{v - v_0}{t}$ och $s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$

vilket ger $P = \frac{m\frac{v - v_0}{t}\frac{v_0 + v}{2} \cdot t}{t} = \frac{m(v - v_0)(v_0 + v)}{2t} = \frac{m\left(v^2 - v_0^2\right)}{2t}$

Där är m = 82 kg, v = 11 m/s, v_0 = 0 m/s och t = 6,0 s

vilket ger $P = \frac{82\left(11^2 - 0^2\right)}{2 \cdot 6{,}0}$ W = 827 W

Svar: 0,83 kW

4.5 Verkningsgrad

$$\eta = \frac{E_{\text{nyttig}}}{E_{\text{tillförd}}}$$

där $E_{\text{nyttig}} = W_{\text{nyttig}} = Fs = mgs$

vilket ger $\eta = \frac{mgs}{E_{\text{tillförd}}}$

och $E_{\text{tillförd}} = \frac{mgs}{\eta}$

Där är η = 0,75, m = 200 kg och s = 10 m

Detta ger $E_{\text{tillförd}} = \frac{200 \cdot 9{,}82 \cdot 10}{0{,}75}$ J = 26187 J

Svar: 26 kJ

4.6 Effekt $P = \frac{W}{t}$

där $W = Fs$

vilket ger $P = \frac{Fs}{t}$

I och med att lådans hastighet är konstant är kraften lådan dras med lika stor som friktionskraften mellan lådan och underlaget.

$$F = F_{\mu} = \mu F_N = \mu mg$$

vilket ger $P = \frac{Fs}{t} = \frac{\mu mgs}{t}$

där $\mu = 0{,}20$, m = 90 kg, s = 20 m och t = 8,0 s

Detta ger $P = \frac{0{,}20 \cdot 90 \cdot 9{,}82 \cdot 20}{8{,}0}$ W = 442 W

Svar: 0,44 kW

4.7 Arbetet den bromsande kraften utför på en mil är lika stort som den nyttiga energi bensinen tillför under den milen.

$$W = E_{\text{nyttig}}$$

$$Fs = \eta E_{\text{tillförd}}$$

där s = 1 mil = 10 km = 10 000 m,

η = 0,34 och $E_{\text{tillförd}} = 0{,}83 \cdot 31 \cdot 10^6$ J

vilket ger $F = \frac{\eta E_{\text{tillförd}}}{s} = \frac{0{,}34 \cdot 0{,}83 \cdot 31 \cdot 10^6}{10000}$ N = 874,8 N

Svar: 0,87 kN

Mekanisk energi

4.8 Den mekaniska energin bevaras endast då rörelse sker utan motstånd.

Svar: Falskt

4.9 Vagnens mekaniska energi uppe på den första backen är

$$E_{p_0} + E_{k_0} = mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2}$$

Vagnens mekaniska energi uppe på den andra backen är

$$E_{p_1} + E_{k_1} = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2}$$

Vagnens rörelse sker utan motstånd, och då bevaras den mekaniska energin.

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2}$$

Ur detta fås den sökta höjden h_0 enligt

$$gh_0 + \frac{v_0^2}{2} = gh_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

$$gh_0 = gh_1 + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

$$h_0 = \frac{gh_1 + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}}{g} = \frac{gh_1 + \frac{1}{2}\left(v_1^2 - v_0^2\right)}{g} =$$

$$= h_1 + \frac{1}{2g}\left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

Vagnens höjd då den rullat nedför första backen väljs som nollnivå för dess lägesenergi.

Då är $h_1 = 2{,}0\,\text{m}$, v_1=3,4 m/s och v_0=1,5 m/s

vilket ger $h_0 = 2{,}0 + \frac{1}{2 \cdot 9{,}82}\left(3{,}4^2 - 1{,}5^2\right)\text{m} = 2{,}47\text{ m}$

Svar: 2,5 m

4.10 Effekt $P = \frac{W}{t}$

där $W = Fs$

vilket ger $P = \frac{Fs}{t}$

Kraften F och sträckan s behöver bestämmas.

F: Newtons andra lag säger att det är den resulterande kraften som ger accelerationen. Här fås den resulterande kraften som den kraft som driver båten framåt minus den bromsande kraften från vattnet.

$$F - F_\mu = ma$$

$$F = ma + F_\mu$$

där $a = \frac{v}{t}$

$$F = m\frac{v}{t} + F_\mu$$

s: Det är en likformigt accelererad rörelse. Då gäller

$$s = \frac{v_0 + v}{2}t$$

Här är $v_0 = 0$ vilket ger

$$s = \frac{v}{2}t$$

Effekten kan nu skrivas som

$$P = \frac{Fs}{t} = \frac{\left(m\frac{v}{t} + F_\mu\right)\frac{v}{2}t}{t} = \left(m\frac{v}{t} + F_\mu\right)\frac{v}{2}$$

där $m = 1000$ kg, $v = 20$ m/s, $t = 5{,}0$ s och $F_\mu = 5{,}0 \cdot 10^2$ N

Detta ger den sökta effekten

$$P = \left(1000\frac{20}{5{,}0} + 500\right)\frac{20}{2} \text{ W} = 45000 \text{ W}$$

Svar: 45 kW

4.11 Den accelererande kraftens arbete är lika stor som ökningen i rörelseenergi hos det som accelereras.

$$Fs = \frac{mv^2}{2}$$

där F är den accelererande kraften som är lika med tyngdkraften på 100 g vikten och m är massan hos det som accelereras, d.v.s. vagnens plus viktens massa.

$$m_{\text{vikt}}gs = \frac{(m_{\text{vikt}} + m_{\text{vagn}})v^2}{2}$$

ur vilket den sökta hastigheten fås

$$v = \sqrt{\frac{2m_{\text{vikt}}gs}{m_{\text{vikt}} + m_{\text{vagn}}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}100 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}50}{0{,}100 + 2{,}82}}$$

där m_{vikt} =0,100 kg, s = 0,50 m och m_{vagn} = 2,82 kg

vilket ger $v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}100 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}50}{0{,}100 + 2{,}82}}$ m/s = 0,58 m/s

Svar: 0,58 m/s

4.12 Ett flöde på 125 m^3/s är samma som $125 \cdot 10^3$ kg/s i och med att vattens densitet är 1000 kg/ m^3. På en sekund passerar alltså vatten med massan $125 \cdot 10^3$ kg.

Effekten från kraftverket fås som

$$P = \frac{E_{\text{nyttig}}}{t} = \frac{\eta E_{\text{tillförd}}}{t}$$

där $E_{\text{tillförd}} = mgh$

$$P = \frac{\eta mgh}{t}$$

där η = 0,65, $m = 125 \cdot 10^3$ kg, h = 12 m och t = 1,0 s.

Detta ger $P = \frac{0{,}65 \cdot 125 \cdot 10^3 \cdot 9{,}82 \cdot 12}{1{,}0}$ W = 9574500 W

Svar: 9,6 MW

4.13 a) Den mekaniska energin bevaras här inte. Klossens lägesenergi i backens början blir till värme och rörelseenergi under klossens resa nedför backen.

$$mgh = E_\mu + \frac{mv^2}{2}$$

ur vilket den sökta värmeenergin fås

$$E_\mu = mgh - \frac{mv^2}{2} = m\left(gh - \frac{v^2}{2}\right)$$

där m = 3,0 kg, h = 6,0 m och v = 8,5 m/s.

Detta ger $E_\mu = 3{,}0\left(9{,}82 \cdot 6{,}0 - \frac{8{,}5^2}{2}\right)$ J = 68,38 J

b) Värmeenergin utvecklas p.g.a. att friktionskraften utför ett arbete under klossens resa.

$$E_\mu = F_\mu s$$

där $\sin 30^\circ = \frac{6}{s} \rightarrow s = \frac{6}{\sin 30^\circ}$ m = 12 m

vilket ger $F_\mu = \frac{E_\mu}{s} = \frac{68{,}38}{12}$ N = 5,70 N

Svar: a) 68 J och b) 5,7 N

4.14 Verkningsgrad kan uttryckas i effekter som

$$\eta = \frac{P_{\text{nyttig}}}{P_{\text{tillförd}}}$$

Här är $P_{\text{tillförd}}$ = 150 W

och $P_{\text{nyttig}} = \frac{W}{t}$

där arbetet är arbetet med att höja lådan 3,0 m upp i luften plus det arbete som friktionskraften under färden uppför backan.

$$W = mgh + F_\mu s$$

vilket ger $P_{\text{nyttig}} = \frac{mgh + F_\mu s}{t}$

och $\eta = \frac{mgh + F_\mu s}{tP_{\text{tillförd}}}$

där m = 7,0 kg, h = 3,0 m, F_μ = 8,5 N, s = 5,0 m, t = 6,5 s

Detta ger $\eta = \dfrac{7{,}0 \cdot 9{,}82 \cdot 3{,}0 + 8{,}5 \cdot 5{,}0}{6{,}5 \cdot 150} = 0{,}2551$

Svar: 26 %

Rörelseenergi och rörelsemängd

4.15 Rörelsemängden bevaras alltid vid en kollision. Vid en elastisk kollision fås ingen kvarstående deformation av föremålen. Ingen rörelseenergi har då övergått till någon annan form. En sådan kollision kallas elastisk.

Svar: Sant

4.16 Här är $m_{\text{röd}}$ = 0,25 kg, m_{ora} = 0,80 kg

$v_{\text{röd, före}}$ = 5,0 m/s, $v_{\text{ora, före}}$ = 0,0 m/s

och vi ska räkna ut $v_{\text{röd, efter}}$ och $v_{\text{ora, efter}}$

Vid en elastisk kollision bevaras rörelsemängd.

$$p_{\text{före}} = p_{\text{efter}}$$

$$p_{\text{röd, före}} + p_{\text{ora, före}} = p_{\text{röd, efter}} + p_{\text{ora, efter}}$$

$$m_{\text{röd}} v_{\text{röd, före}} + m_{\text{ora}} v_{\text{ora, före}} = m_{\text{röd}} v_{\text{röd, efter}} + m_{\text{ora}} v_{\text{ora, efter}}$$

Med aktuella värden fås

$$0{,}25 \cdot 5{,}0 + 0{,}80 \cdot 0{,}0 = 0{,}25 \cdot v_{\text{röd, efter}} + 0{,}80 \cdot v_{\text{ora, efter}} \qquad (1)$$

eller $1{,}25 = 0{,}25 \cdot v_{\text{röd, efter}} + 0{,}80 \cdot v_{\text{ora, efter}}$

Rörelseenergins bevarande ger

$$E_{k,\text{före}} = E_{k,\text{efter}}$$

$$\frac{m_{\text{röd}} v^2_{\text{röd,före}}}{2} + \frac{m_{\text{ora}} v^2_{\text{ora,före}}}{2} = \frac{m_{\text{röd}} v^2_{\text{röd,efter}}}{2} + \frac{m_{\text{ora}} v^2_{\text{ora,efter}}}{2}$$

Med aktuella värden fås

$$\frac{0{,}25 \cdot 5{,}0^2}{2} + \frac{0{,}80 \cdot 0^2}{2} = \frac{0{,}25 \cdot v^2_{\text{röd,efter}}}{2} + \frac{0{,}80 \cdot v^2_{\text{ora,efter}}}{2}$$

eller $3{,}125 = 0{,}125 \cdot v^2_{\text{röd,efter}} + 0{,}40 \cdot v^2_{\text{ora,efter}} \qquad (2)$

(1) ger $v_{\text{ora,efter}} = \dfrac{1{,}25 - 0{,}25 v_{\text{röd,efter}}}{0{,}80} = 1{,}5625 - 0{,}3125 v_{\text{röd,efter}}$ (3)

(3) i (2) $3{,}125 = 0{,}125 \cdot v^2_{\text{röd,efter}} + 0{,}40 \cdot \left(1{,}5625 - 0{,}3125 v_{\text{röd,efter}}\right)^2$

$$3{,}125 = 0{,}125 \cdot v^2_{\text{röd,efter}} + 0{,}40 \cdot \left(2{,}4414 + 0{,}09766 v^2_{\text{röd,efter}} - 0{,}97656 v_{\text{röd,efter}}\right)$$

$$0{,}1641 \cdot v^2_{\text{röd,efter}} - 0{,}3906 \cdot v_{\text{röd,efter}} - 2{,}1484 = 0$$

$$v^2_{\text{röd,efter}} - 2{,}3803 \cdot v_{\text{röd,efter}} - 13{,}0920 = 0$$

pq-formeln ger

$v_{\text{röd, efter}}$ = 5,0 m/s (orimligt) och -2,62 m/s

in i (3) $v_{\text{ora,efter}} = 1{,}5625 - 0{,}3125 v_{\text{röd,efter}} =$

$v_{\text{ora,efter}} = 1{,}5625 - 0{,}3125(-2{,}62)$ m/s = 2,38 m/s

Svar: Den röda rör sig i motsatt riktning med 2,6 m/s och den orange i röd bolls ursprungliga riktning med 2,4 m/s.

4.17 Rörelsemängden kulan har innan den fastnar är lika stor som rörelsemängd hos kula plus träklump just då kulan fastnat.

$$m_{\text{kula}} v_{\text{kula}} = \left(m_{\text{kula}} + m_{\text{klump}}\right) v_{\text{kula+klump}}$$

vilket ger den sökta kulhastigheten som

$$v_{\text{kula}} = \frac{\left(m_{\text{kula}} + m_{\text{klump}}\right)}{m_{\text{kula}}} v_{\text{kula+klump}}$$

där massorna är kända men kulans plus träklumpens hastighet just då kulan fastnat behöver bestämmas.

Rörelseenergin hos kula plus träklump har just då kulan fastnar blir till lägesenergi i pendlingens högsta punkt

$$\frac{\left(m_{\text{kula}} + m_{\text{klump}}\right) v^2_{\text{kula+klump}}}{2} = \left(m_{\text{kula}} + m_{\text{klump}}\right) gh$$

$$v_{\text{kula+klump}} = \sqrt{2gh}$$

vilket ger $v_{\text{kula}} = \dfrac{\left(m_{\text{kula}} + m_{\text{klump}}\right)}{m_{\text{kula}}} \sqrt{2gh}$

där $m_{\text{kula}} = 0{,}015\ \text{kg},\ m_{\text{klump}} = 3{,}0\ \text{kg och } h = 0{,}10\ \text{m}$

Detta ger den sökta hastigheten som

$$v_{\text{kula}} = \frac{(0{,}015 + 3{,}0)}{0{,}015}\sqrt{2 \cdot 9{,}82 \cdot 0{,}10}\ \text{m/s} = 282\ \text{m/s}$$

Svar: 280 m/s

4.18 Frans väger 39 kg. Hans hastighet innan omfamningen var 2,5 m/s och efter var den 1,0 m/s.

Eira väger 16 kg. Hennes hastighet innan omfamningen var –2,5 m/s och efter var den 1,0 m/s.

Deras totala rörelseenergi före omfamningen var:

$$E_{k,\text{före}} = E_{k,\text{före, Frans}} + E_{k,\text{före,Eira}} =$$

$$= \frac{m_{\text{Frans}} v_{\text{Frans,före}}^2}{2} + \frac{m_{\text{Eira}} v_{\text{Eira,före}}^2}{2} =$$

$$= \frac{39 \cdot 2{,}5^2}{2} + \frac{16 \cdot (-2{,}5)^2}{2}\ \text{J} = 171{,}875\ \text{J}$$

Deras totala rörelseenergi efter omfamningen var:

$$E_{k,\text{efter}} = E_{k,\text{efter, Frans}} + E_{k,\text{efter,Eira}} =$$

$$= \frac{m_{\text{Frans}} v_{\text{Frans,efter}}^2}{2} + \frac{m_{\text{Eira}} v_{\text{Eira,efter}}^2}{2} =$$

$$= \frac{39 \cdot 1{,}0^2}{2} + \frac{16 \cdot 1{,}0^2}{2}\ \text{J} = 27{,}5\ \text{J}$$

Alltså omvandlades

$$\frac{E_{k,\text{före}} - E_{k,\text{efter}}}{E_{k,\text{före}}} = \frac{171{,}875 - 27{,}5}{171{,}875} = 0{,}84 = 84\ \%$$

av rörelseenergin till andra former.

Svar: 84 %

Energi vid mycket höga hastigheter

4.19 Ett föremåls totala energi är lika med summan av dess rörelseenergi och dess viloenergi.

Svar: Falskt

4.20 Rymdskeppets totala energi fås som

$$E = mc^2\gamma$$

där m = 1500 kg

och $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

där v = 0,97c

vilket ger $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}97c}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}97^2}} = 4{,}1135$

och $E = 1500 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 \cdot 4{,}1135\,\text{J} = 5{,}553 \cdot 10^{20}$ J

Svar: $5{,}6 \cdot 10^{20}$ J

4.21 Rymdskeppets rörelseenergi fås som dess totala energi minus dess viloenergi

$$E_\text{k} = E - E_0 = mc^2\gamma - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$$

där m = 1500 kg

och $\gamma = 4{,}1135$

vilket ger $E_\text{k} = 1500 \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 (4{,}1135 - 1)\,\text{J} = 4{,}20 \cdot 10^{20}$ J

Svar: $4{,}2 \cdot 10^{20}$ J

4.22 a) Viloenergi ges av

$$E_0 = mc^2 = 9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 8{,}198 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

b) Den totala energin ges av

$$E = mc^2\gamma$$

där $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$

där $v = 0{,}9993c$

vilket ger $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{0{,}9993c}{c}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}9993^2}} = 26{,}731$

vilket ger $E = 8{,}198 \cdot 10^{-14} \cdot 26{,}731\ \text{J} = 2{,}191 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$

c) Rörelseenergin fås som

$$E_k = E - E_0 = 2{,}191 \cdot 10^{-12} - 8{,}198 \cdot 10^{-14}\ \text{J} = 2{,}109 \cdot 10^{-12}\ \text{J}$$

Svar: a) $8{,}2 \cdot 10^{-14}$ J, b) $2{,}2 \cdot 10^{-12}$ J och c) $2{,}1 \cdot 10^{-12}$ J