# 3 Rörelse och krafter 1

## Hastighet och acceleration

3.1 Om accelerationen har samma tecken som hastigheten ökar hastighetens storlek, rörelsen blir snabbare.

Svar: Falskt

3.2 Medelhastigheten fås som

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1500}{5{,}0 \cdot 60}\,\mathrm{m/s} = 5{,}0\ \mathrm{m/s}$$

Svar 5,0 m/s

3.3 Medelhastigheten fås som

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{\mathrm{slut}} - s_{\mathrm{start}}}{\Delta t}.$$

Förflyttningen startar och slutar på samma plats, d.v.s. $s_{\mathrm{slut}} = s_{\mathrm{start}}$, vilket ger

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_{\mathrm{start}} - s_{\mathrm{start}}}{\Delta t} = 0{,}0\ \mathrm{m/s}.$$

Svar 0,0 m/s

3.4 Hastigheten du går med fås från

$$s = v_{\mathrm{gå}} \cdot 50$$

som $$v_{\mathrm{gå}} = \frac{s}{50}$$

Hastigheten du åker med fås från

$$s = v_{\mathrm{åka}} \cdot 75$$

som $$v_{\mathrm{åka}} = \frac{s}{75}$$

Då du går samtidigt som du åker får vi

$$s = v_{\text{gå+åka}} \cdot t$$

där

$$v_{\text{gå+åka}} = v_{\text{gå}} + v_{\text{åka}} = \frac{s}{50} + \frac{s}{75} = s\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{75}\right)$$

Detta ger

$$s = s\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{75}\right) \cdot t$$

eller

$$1 = \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{75}\right) \cdot t$$

ur vilket den sökta tiden fås som

$$t = \frac{1}{\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{75}\right)} \text{ s} = 30 \text{ s}$$

Svar: 30 s

3.5 Boels medelhastighet fås som

$$v_{\text{m}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

där $s_1 = 1\,000$ m och $s_2 = 800$ m

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{1000}{17/3{,}6} \text{ s} = 211{,}8 \text{ s}$$

och

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{800}{12/3{,}6} \text{ s} = 240 \text{ s}$$

vilket ger $v_{\text{m}} = \dfrac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \dfrac{1000 + 800}{211{,}8 + 240} \text{ m/s} = 3{,}98 \text{ m/s}$

Svar: 4,0 m/s

3.6 Accelerationen fås som

$$a_{\text{m}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\text{slut}} - v_{\text{start}}}{\Delta t} = \frac{50/3{,}6 - 10/3{,}6}{8{,}0} \text{ m/s}^2 =$$

$$= 1{,}39 \text{ m/s}^2$$

Svar: 1,4 m/s$^2$

## Grafer

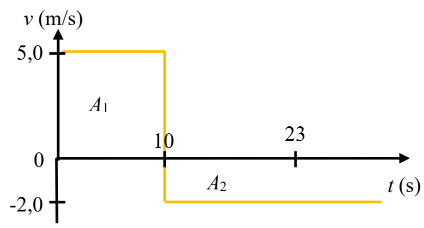
3.7 Kurvans lutning vid en viss tidpunkt i en *v*-*t*-graf ger oss momentanaccelerationen vid den tidpunkten.

Svar: Falskt

3.8 Kurvans lutning vid en viss tidpunkt i en *s*-*t*-graf ger oss momentanhastigheten vid den tidpunkten

Svar: Momentanhastigheten

3.9 Förflyttningen fås som arean under en *v*-*t*-graf.




Arean delas här lämpligen in i två delar, $A_1$ och $A_2$.

$$A_1 = 5{,}0 \cdot 10 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

$$A_2 = -2{,}0 \cdot (23 - 10) \text{ m} = -26 \text{ m}$$

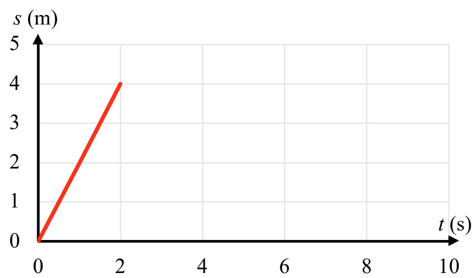
vilket ger den totala arean $A$ som

$$A = A_1 + A_2 = 50 + (-26) \text{ m} = 24\text{m}$$

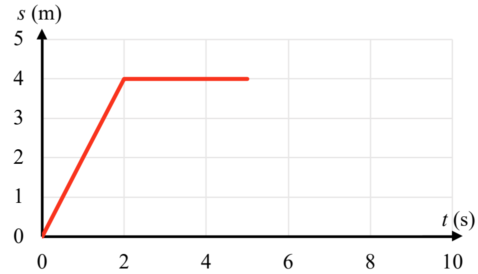
Svar: 24 m

3.10 Rörelsen kan delas in i tre delar.

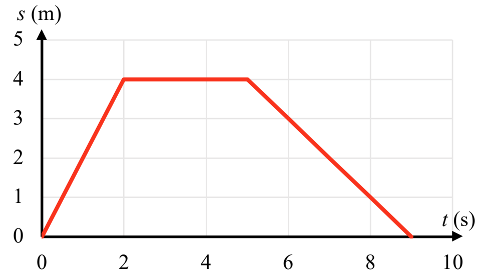
1) Under de första två sekunderna rör sig föremålet med konstant hastighet 2,0 m/s och förflyttar sig då från sin startpunkt till $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 2{,}0 \cdot 2{,}0 \text{ m} = 4{,}0 \text{ m}$.



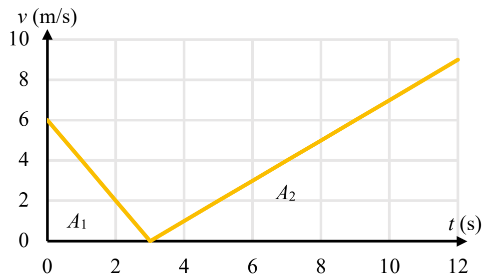
2) Under de därpå följande tre sekunderna är föremålet stilla.




3) Under de avslutande fyra sekunderna rör sig föremålet med en konstant hastighet –1,0 m/s och förflyttar sig då $s_3 = v_3 \cdot t_3 = -1{,}0 \cdot 4{,}0$ m = –4,0 m bakåt tillbaka till sin startpunkt.




3.11 Förflyttningen fås som arean under *v*-*t*-grafen.




Arean delas här lämpligen in i två delar, $A_1$ och $A_2$.

$$A_1 = \frac{3 \cdot 6}{2}\ \text{m} = 9\ \text{m}$$

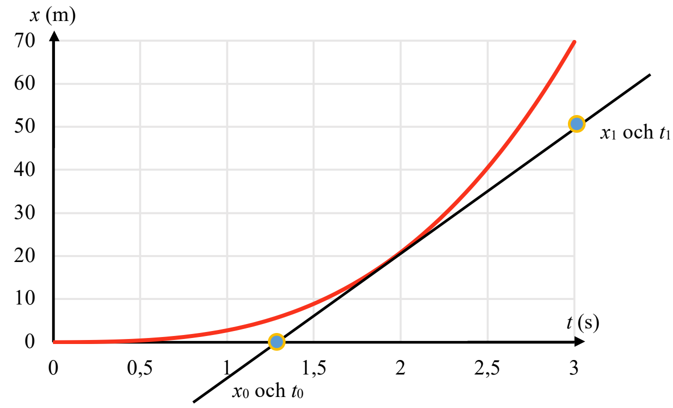
$$A_2 = \frac{(12-3)\cdot 9}{2}\ \text{m} = 40{,}5\ \text{m}$$

vilket ger den totala arean $A$ som

$$A = A_1 + A_2 = 9 + 40{,}5\ \text{m} = 49{,}5\ \text{m}$$

Svar: 50 m

3.12 Momentanhastigheten vid en viss tidpunkt fås som *x*-*t*-kurvans lutning vid den tidpunkten. Kurvans lutning vid den tidpunkten kan bestämmas genom att dra ett rakt streck, med samma lutning som kurvan, genom punkten vid den tidpunkt vid vilken momentanhastigheten ska bestämmas. Strecket har då samma lutning som kurvan, som i sin tur är densamma som momentanhastigheten.



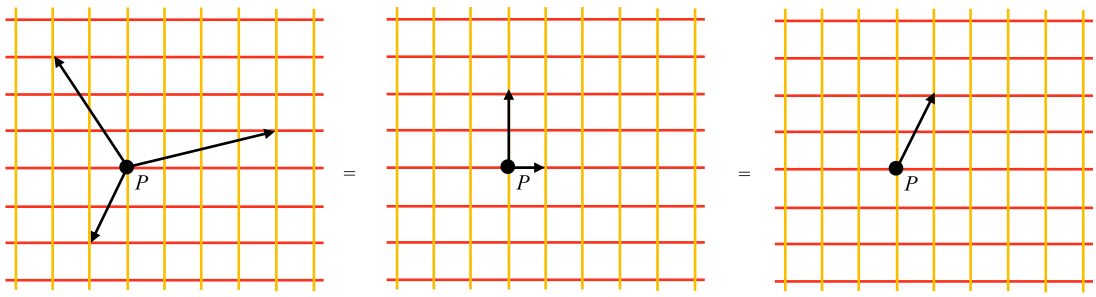

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{50 - 0{,}0}{3 - 1{,}25} \text{ m/s} = 28{,}6 \text{ m/s}$$

Svar: 29 m/s

# Acceleration och krafter

## Krafter

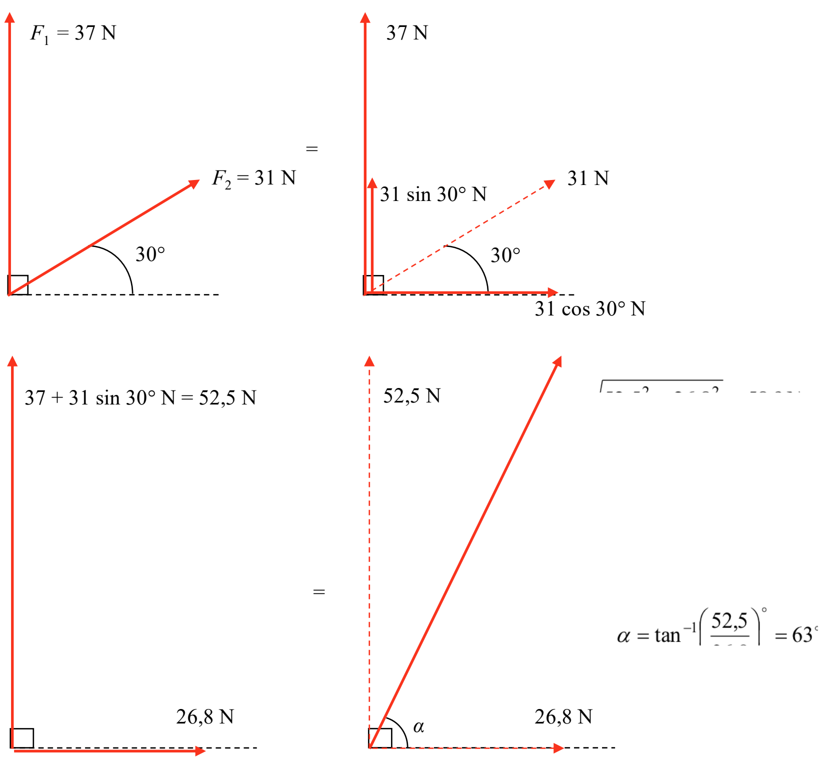
3.13 Kroppen får, enligt Newtons andra lag, acceleration noll om den resulterande kraften på den är noll. De tre krafterna i den övre figuren summerar ihop enligt:




Den resulterande kraften blir då noll om du lägger till en kraft som är lika stor som summan av de tre och motriktad, d.v.s. alternativ *F*.

Svar: *F*

3.14




Svar: 59 N med riktning 63° snett uppåt höger

## Newtons lagar

3.15 a) Falskt: Newtons andra lag säger att $a = F_{\text{res}}/m$. Accelerationen är sålunda beroende av föremålets massa.

b) Sant: Repets situation är densamma om du ersätter kompisen med en vägg och drar med 100 N din ände av repet. Kraften i repet är då, enligt Newtons tredje lag, 100 N.

Svar: a) Falskt och b) Sant

3.16 Newtons andra lag ger

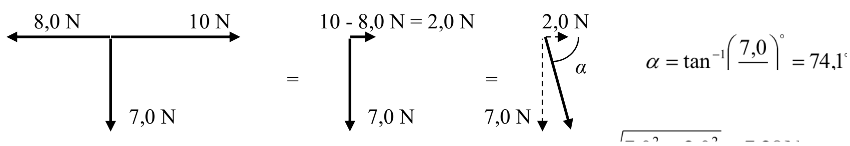
$$F_{res} = ma = 5{,}0 \cdot \frac{3{,}0 - 7{,}0}{2{,}0}\,\text{N} = -10\ \text{N}$$

Svar: $-10$ N

3.17 Newtons andra lag ger accelerationen som

$$a = \frac{F_{res}}{m}$$

där $m$ = 2,0 kg och $F_{res}$ behöver bestämmas.




Detta ger

$$a = \frac{F_{res}}{m} = \frac{7{,}28}{2{,}0}\,\text{m/s}^2 = 3{,}64\ \text{m/s}^2$$

med samma riktning som den resulterande kraften.

Svar: 3,7 m/s$^2$ riktad 74° nedåt höger

3.18 Newtons andra lag ger

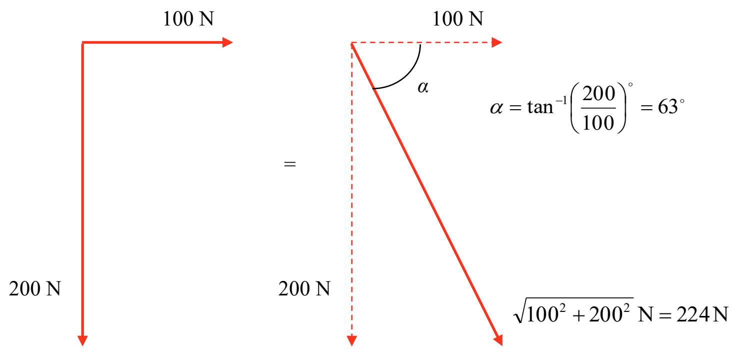
$$F_{res} = 1{,}5 \cdot 5{,}0\,\text{N} = m \cdot 11$$

ur vilket den sökta massan fås som

$$m = \frac{1{,}5 \cdot 5{,}0}{11}\,\text{kg} = 0{,}682\ \text{kg}$$

Svar: 0,68 kg

3.19 Newtons första lag ger att klossen ligger still om den resulterande kraften på den är noll. Det är den om kraften i det tredje snöret är lika stor som summan av de två andra men motriktad. Summan av de två första behövs sålunda.




Kraften i det tredje snöret behöver alltså vara 224 N stor och riktad 63° nordväst.

Svar: 224 N med riktning 63° nordväst.

## Vanliga krafter

3.20 a) Normalkraften är alltid riktad rakt ut från underlaget.

b) Accelerationen bestäms av den resulterande kraften. Om friktion saknas är det samma krafter som verkar på klossen då den åker upp som då den åker nedför planet: tyngdkraften och normalkraften.

Svar: a) Falskt och b) Sant

3.21 Jordens dragningskraft på månen utgörs av gravitationskraften:

$$F = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{6{,}0 \cdot 10^{24} \cdot \frac{6{,}0 \cdot 10^{24}}{81}}{\left(38000 \cdot 10^{4}\right)^{2}} \text{N} = 2{,}05 \cdot 10^{20} \text{N}$$

Svar: $2{,}1 \cdot 10^{20}\,\text{N}$

3.22 Först: $F = G\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Sen: $$F_{\text{sen}} = G\frac{\frac{m_1}{2} \cdot \frac{m_2}{2}}{(2r)^2} = G\frac{\frac{m_1 \cdot m_2}{4}}{4r^2} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{16r^2} = \frac{F}{16}$$

Svar: $\dfrac{F}{16}$

3.23 Newtons andra lag ger

Först: $F_{res1} = 82 - mg = ma \quad (1)$

Sen: $F_{res2} = 92 - mg = m2a \quad (2)$

(2) ger $\dfrac{92 - mg}{2} = ma \quad (3)$

(1) = (3) $82 - mg = \dfrac{92 - mg}{2}$

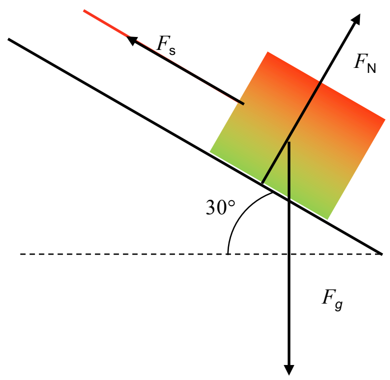
vilket ger $82 - mg = \dfrac{92}{2} - \dfrac{mg}{2}$

eller $\dfrac{mg}{2} = 82 - \dfrac{92}{2}$

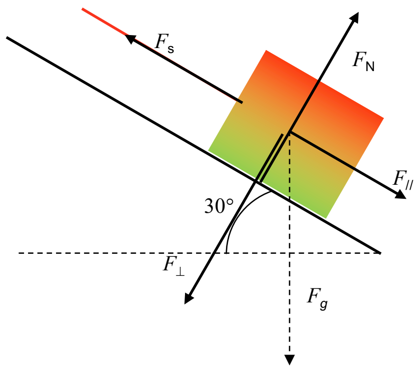
och $$m = \frac{2}{g}\left(82 - \frac{92}{2}\right) = 7{,}33 \text{ kg}$$

Svar: 7,3 kg

3.24 På klossen verkar tre krafter: tyngdkraften, normalkraften och kraften från snöret. I och med att klossen ligger still vet vi, enligt Newtons första lag, att den resulterande kraften på klossen är noll.




Här är det lämpligt att ersätta tyngdkraften med två krafter: en parallell med planet och en vinkelrät mot det.




$F_\perp = F_g \cos 30^\circ$ och $F_{//} = F_g \sin 30^\circ$

$F_\perp$ är då lika med den sökta normalkraften

och $F_{//}$ är lika stor som kraften i snöret.

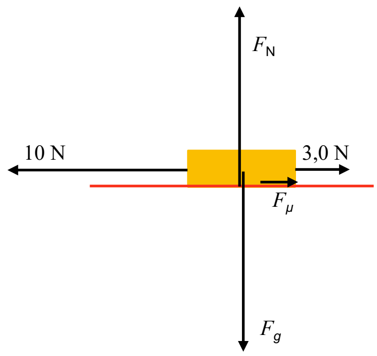
a) $$F_N = F_\perp = F_g \cos 30^\circ = mg \cos 30^\circ =$$
$$= 30 \cdot 9{,}82 \cdot \cos 30^\circ \text{ N} = 255{,}1 \text{ N}$$

b) $$F_s = F_{//} = F_g \sin 30^\circ = mg \sin 30^\circ =$$
$$= 30 \cdot 9{,}82 \cdot \sin 30^\circ \text{ N} = 147{,}3 \text{ N}$$

Svar: a) 260 N och b) 150 N

3.25 a) Tyngdkraften, normalkraften och friktionskraften.

Utan friktionskraften skulle klossen accelereras åt vänster, alltså är friktionskraften riktad åt höger.




b) I och med att bordet är horisontellt och klossen inte accelereras vertikalt säger Newtons första lag att den resulterande kraften i vertikalled är noll. Alltså är normalkraften lika stor som och motriktad tyngdkraften.

$$F_N = F_g = mg = 1{,}0 \cdot 9{,}82\,\text{N} = 9{,}82\text{ N}$$

c) $$F_{res} = 10 - 3{,}0 - F_\mu = 10 - 3{,}0 - \mu F_N =$$

$$= 10 - 3{,}0 - 0{,}20 \cdot 9{,}82\text{ N} = 5{,}04\text{ N åt vänster.}$$

Svar: a) Tyngdkraften, normalkraften och friktionskraften, b) 9,8 N och c) 5,0N åt vänster.

3.26 En konstant hastighet innebär att accelerationen är noll. Newtons första lag säger att om accelerationen är den resulterande kraften noll. Här betyder det att normalkraften är lika stor som tyngdkraften och att friktionskraften är lika stor som kraften du knuffar på boken med.

$$F_N = mg$$

$$F_\mu = \mu F_N = \mu mg = 1{,}0$$

vilket ger $\mu mg = 1{,}0$

eller $$m = \frac{1{,}0}{\mu g} = \frac{1{,}0}{0{,}19 \cdot 9{,}82}\text{kg} = 0{,}536\text{ kg}$$

Svar: 0,54 kg

3.27 Newtons andra lag ger att accelerationen som

$$a = \frac{F_{res}}{m}$$

där

$$F_{res} = F_{g,\text{kula}} g - F_{\mu} = m_{\text{kula}} g - \mu F_{\text{N}} =$$

$$= m_{\text{kula}} g - \mu m_{\text{kloss}} g = g\left(m_{\text{kula}} - \mu m_{\text{kloss}}\right)$$

och

$$m = m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}}$$

vilket ger

$$a = \frac{g\left(m_{\text{kula}} - \mu m_{\text{kloss}}\right)}{m_{\text{kula}} + m_{\text{kloss}}} = \frac{9{,}82\left(7{,}0 - 0{,}30 \cdot 4{,}0\right)}{7{,}0 + 4{,}0}\ \text{m/s}^2 =$$

$= 5{,}18\ \text{m/s}^2$.

Svar: $5{,}2\ \text{m/s}^2$

## Jämvikt och linjär rörelse

3.28 Läget hos en sten som utför ett fritt fall kan skrivas som

$$s = \frac{at^2}{2}$$

Alltså kan tiden för stenen att falla sträckan $s_1$ skrivas som

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a}}$$

Om stenen släpps från dubbla höjden, $s_2 = 2s$, tar det tiden

$$t_2 = \sqrt{\frac{2s_2}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2s_1}{a}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2s_1}{a}} = \sqrt{2}t_1$$

En sten som släpps från dubbelt så stor höjd träffar alltså marken

efter $\sqrt{2}$ gånger så lång tid.

Svar: Falskt

3.29 Vid fritt fall ändrar sig läget enligt:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

där $v = v_0 + at$

vilket ger $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$

a) $s = 3{,}0$ m/s, $v_0 = 0{,}0$ m/s och $a = g = 9{,}82$ m/s$^2$

vilket ger $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}0}{9{,}82}}$ s $= 0{,}782$ s

b) $v = v_0 + at = 0{,}0 + 9{,}82 \cdot 0{,}782 = 7{,}68$ m/s

Svar: a) 0,78 s och b) 7,7 m/s

3.30 Vid fritt fall ändrar sig läget enligt:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

och hastigheten enligt

$$v = v_0 + at$$

Här är utgångshastigheten och accelerationen motriktade varandra.

Uppåt väljs som positiv och då blir den motsatta, nedåt, negativ.

$$v_0 = 18 \text{ m/s}, \; a = -g = -9{,}82 \text{ m/s}^2 \text{ och } t = 4{,}0 \text{ s}$$

vilket ger $v = 18 + -9{,}82 \cdot 4{,}0 = -21{,}3$ m/s

och $$s = \frac{18 + -21{,}3}{2} \cdot 4{,}0\text{m} = -6{,}56 \text{ m}$$

Svar: −21 m/s och −6,6 m

3.31 Newtons andra lag ger att

$$F_{\text{res}} = ma$$

där $m = 84$ kg och $a$ behöver bestämmas.

$a$ fås från uttrycket för hur hastigheten ändrar sig

$$v = v_0 + at$$

som $$a = \frac{v - v_0}{t}$$

och tiden för hastighetsökningen fås från

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$$

$$t = \frac{s}{\left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)} = \frac{2s}{v_0 + v}$$

Detta ger oss accelerationen som

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(v - v_0)(v + v_0)}{2s} = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

där $v = 12$ m/s, $v_0 = 8{,}0$ m/s och $s = 30$ m

Detta ger $$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{12^2 - 8{,}0^2}{2 \cdot 30} = 1{,}33 \text{ m/s}^2$$

och $F_{\text{res}} = 84 \cdot 1{,}33 = 112$ N

Svar: 0,11 kN

3.32 Hastigheten fås som

$$v = v_0 + at$$

Newtons andra lag ger att

$$a = \frac{F_{res}}{m}$$

Detta ger $v = v_0 + \frac{F_{res}}{m} t$

där $v_0 = 0$,

$F_{\text{res}} = 40 - F_\mu = 40 - \mu F_N =$

$= 40 - \mu mg = 40 - 0{,}25 \cdot 100 \text{ N} = 15 \text{ N}$

$m = 100/9{,}82 \text{ kg} = 10{,}18 \text{ kg}$

och $t = 3{,}0\text{s}$

Den sökta hastigheten blir då

$$v = 0 + \frac{15}{10{,}18} \cdot 3{,}0 \text{ m/s} = 4{,}42 \text{ m/s}$$

Svar: 4,4 m/s

3.33 Under loppets tre delar har vi, i tur och ordning,

1) $s_1 = \frac{v_0 + v_2}{2} \cdot t_1 = v_0 t + \frac{at_1^2}{2}$

där $v_0 = 0$ m/s

vilket ger $s_1 = \frac{v_2}{2} \cdot t_1 = \frac{at_1^2}{2}$ (1)

2) $s_2 = v_2 \cdot t_2$

där $s_2 = 55$ m och $t_2 = 5{,}0$ s

vilket ger $v_2 = 55/5{,}0 \text{ m/s} = 11 \text{ m/s}$

3) $s_3 = \frac{v_3 + v_2}{2} \cdot t_3$

där $v_3 = 9{,}0$ m/s

vilket ger $s_3 = \frac{9{,}0 + 11}{2} \cdot t_3 = 10 \cdot t_3$

Vidare vet vi att

$$s_1 + s_2 + s_3 = 100 \qquad (2)$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 11 \qquad (3)$$

(2) ger $$\frac{at_1^2}{2} + 55 + 10 \cdot t_3 = 100 \qquad (4)$$

(3) ger $$t_3 = 11 - t_1 - t_2 = 11 - t_1 - 5{,}0 = 6 - t_1 \qquad (5)$$

(5) i (4) $$\frac{at_1^2}{2} + 10 \cdot (6 - t_1) = 45$$

$$\frac{at_1^2}{2} - 10t_1 = -15 \qquad (6)$$

(1) ger $$t_1 = \frac{v_2}{a} = \frac{11}{a}$$

in i (6) $$\frac{a\left(\frac{11}{a}\right)^2}{2} - 10\frac{11}{a} = -15$$

$$\frac{a}{2}\frac{121}{a^2} - \frac{110}{a} = -15$$

$$\frac{60{,}5}{a} - \frac{110}{a} = -15$$

$$\frac{-49{,}5}{a} = -15$$

$$a = \frac{-49{,}5}{-15}\ \text{m/s}^2 = 3{,}3\ \text{m/s}^2$$

Svar: $3{,}3\ \text{m/s}^2$

3.34 På tiden $t$ hinner den orange bilen

$$s_O = 19t$$

På tiden $t$ hinner den röda bilen

$$s_R = 24t$$

När är den röda bilen är 1,0 km före den orangea?

$$s_R = s_O + 1000$$

$$24t = 19t + 1000$$

eller $t = 200$ s

Svar: 3 min och 20 s

3.35 Här är den kastade bollens utgångshastighet och accelerationen motriktade varandra. Uppåt väljs som positiv och då blir den motsatta, nedåt, negativ.

Höjd för boll som kastas uppåt med $v_0$:

$$s_{\text{kasta}} = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t == v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Höjd för boll som släpps:

$$s_{\text{släpp}} = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = -\frac{gt^2}{2}$$

Skillnaden mellan bollarnas höjd

$$\Delta s = s_{\text{släpp}} - s_{\text{kasta}} = -\frac{gt^2}{2} - \left( v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) = -v_0 t$$

Skillnaden mellan bollarnas höjd ökar alltså linjärt med tiden.

Svar: b)

3.36 Bilens medelhastighet ges av

$$v_m = \frac{s}{t}$$

där $s = 150$ m och $t$ behövs.

Tiden fås från

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t$$

och $v = v_0 + at = at$

vilka ger $s = \frac{at}{2} \cdot t$

eller $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$

Medelhastigheten fås då som

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2s}{a}}} = s\sqrt{\frac{a}{2s}} = \sqrt{\frac{s^2 a}{2s}} = \sqrt{\frac{sa}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{sa}{2}} = \sqrt{\frac{150 \cdot 2{,}5}{2}} \text{ m/s} = 13{,}7 \text{ m/s}$$

Svar: 14 m/s

3.37 För en likformigt accelererad rörelse ändrar sig läget enligt

$$s = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v}{2} \cdot t$$

Hastigheten ändrar sig enligt

$$v = v_0 + at = at$$

vilket ger $t = \frac{v}{a}$

Dessa ger $s = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} = \frac{v^2}{2a}$

där $v = 8{,}0$ m/s och $a = g = 9{,}82$ m/s$^2$

vilket ger $s = \frac{8{,}0^2}{2 \cdot 9{,}82}$ m $= 3{,}26$ m

Svar: 3,3 m

# Rörelse vid mycket höga hastigheter

## Tidsdilatation

3.38 Den som är still i förhållande till något som händer mäter $t_0$.

Den som rör sig i förhållande till platsen där det händer mäter $t$.

Sambandet mellan dessa ser ut som

$$t = t_0 \gamma$$

där $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

I och med att $\gamma > 1$ är $t > t_0$.

Svar: Sant

3.39 Här är $t_0 = 45$ s och $v = 0{,}5c$

och vi ska räkna ut $t$.

$$t = t_0 \gamma$$

där $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Detta ger $$t = 45 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}5c}{c}\right)^2}} = 45 \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} \text{ s} = 51{,}96 \text{ s}$$

Svar: 52 s

3.40 Här är $t_0 = 3{,}0$ s och $t = 3{,}001$ s

och vi ska räkna ut $v$.

$$t = t_0\gamma$$

där
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Detta ger
$$t = t_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

ur vilket vi bryter ut $v$:

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{t_0}{t}$$

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{t_0}{t}\right)^2$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^2$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^2}$$

Detta ger
$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^2} = 3\cdot 10^8\sqrt{1-\left(\frac{3{,}0}{3{,}001}\right)^2}\ \text{m/s} = 7744031$$

m/s

Svar: 7700 km/s

## Längdkontraktion

3.41 Här är $l_0 = 0{,}30$ m och $l = 0{,}25$ m

och vi ska räkna ut $v$.

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

där $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Detta ger $$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

ur vilket vi bryter ut $v$:

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 = 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2$$

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2}$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{l}{l_0}\right)^2} = 3\cdot 10^8\sqrt{1-\left(\frac{0{,}25}{0{,}30}\right)^2}\ \text{m/s} =$$

$= 165831240$ m/s

Svar: $1{,}7\cdot 10^8$ m/s

3.42 Här är $l_0 = 26$ ljusår $= 26 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m och $v = 0{,}94c$

a) $$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

där $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

vilket ger $$l = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 26\sqrt{1-\left(\frac{0{,}94c}{c}\right)^2} =$$

$$= 26\sqrt{1-0{,}94^2} \text{ ljusår} = 8{,}87 \text{ ljusår}$$

b) Jordborna mäter längden $l_0$ och tiden $t$:

$$t = \frac{l_0}{v} = \frac{26 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15}}{0{,}94 \cdot 3 \cdot 10^{8}} \text{ s} = 875886524 \text{ s} =$$

$$= 875886524/(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) \text{ år} = 27{,}8 \text{ år}$$

c) Astronauten mäter tiden $t_0$:

$$t = t_0\gamma$$

där $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Detta ger $$t_0 = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 875885624\sqrt{1-\left(\frac{0{,}94c}{c}\right)^2} =$$

$$= 875885624\sqrt{1-0{,}94^2} \text{ s} = 298830096 \text{ s} =$$

$$= 298830096/(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60) \text{ år} = 9{,}48 \text{ år}$$

Svar: a) 8,9 ljusår, b) 28 år och c) 9,5 år

## Rörelsemängd och impuls

3.43 Om man tittar på ett enstaka föremål, eller ett begränsat antal föremål, kan den totala rörelsemängden hos det/de ändras. En förändring där innebär dock alltid en motsvarande förändring bland omgivande föremål. Tas hänsyn till alla föremål fås därför ingen förändring av den totala rörelsemängden. Exempel: en kloss som åker efter ett bord och har en rörelsemängd. Efter ett tag är klossen stilla och har då ingen rörelsemängd. . Rörelsemängden har dock inte försvunnit: bordet, jorden etc. har fått den.

Svar: Sant

3.44 Bågskyttens och pilens totala rörelsemängd bevaras eftersom summan av krafterna som utövas på dem av något annat är noll.

$$p_{\text{före}} = p_{\text{efter}}$$

$$p_{\text{skytt + pil}} = p_{\text{skytt}} + p_{\text{pil}}$$

$$(m_{\text{skytt}} + m_{\text{pil}})v_{\text{skytt+pil}} = m_{\text{skytt}}v_{\text{skytt}} + m_{\text{pil}}v_{\text{pil}}$$

Detta ger den sökta skyttens hastighet som

$$v_{\text{skytt}} = \frac{(m_{\text{skytt}} + m_{\text{pil}})v_{\text{skytt+pil}} - m_{\text{pil}}v_{\text{pil}}}{m_{\text{skytt}}}$$

där $m_{\text{skytt}} = 79$ kg, $m_{\text{pil}} = 0{,}036$ kg

$v_{\text{skytt+pil}} = 0{,}0$ m/s och $v_{\text{pil}} = 95$ m/s

vilket ger $v_{\text{skytt}} = \dfrac{(79 + 0{,}036)\cdot 0{,}0 - 0{,}036\cdot 95}{79}$ m/s = – 0,0433 m/s

Svar: –4,3 cm/s

3.45 Lokets och tågvagnarnas totala rörelsemängd bevaras eftersom summan av krafterna som utövas på dem av något annat är noll.

$$p_{\text{före}} = p_{\text{efter}}$$

$$p_{\text{lok}} + p_{\text{vagnar}} = p_{\text{lok + vagnar}}$$

$$m_{\text{lok}}v_{\text{lok}} + m_{\text{vagnar}}v_{\text{vagnar}} = (m_{\text{lok}} + m_{\text{vagnar}})v_{\text{lok + vagnar}}$$

Detta ger den sökta vagnarnas hastighet som

$$v_{\text{vagnar}} = \frac{(m_{\text{lok}} + m_{\text{vagnar}})v_{\text{lok+vagnar}} - m_{\text{lok}}v_{\text{lok}}}{m_{\text{vagnar}}}$$

där $m_{\text{lok}} = m$, $m_{\text{vagnar}} = 2m$, $v_{\text{lok}} = -2{,}0$ m/s, $v_{\text{lok + vagnar}} = 1{,}0$ m/s

så $$v_{\text{vagnar}} = \frac{(m + 2m)v_{\text{lok+vagnar}} - mv_{\text{lok}}}{2m} =$$

$$= \frac{3mv_{\text{lok+vagnar}} - mv_{\text{lok}}}{2m} =$$

$$= \frac{3v_{\text{lok+vagnar}} - v_{\text{lok}}}{2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1{,}0 - (-2{,}0)}{2}\text{ m/s} = 2{,}5\text{ m/s}$$

Svar: 2,5 m/s

3.46

$$p_{\text{före}} = p_{\text{efter}}$$

$$p_{\text{vagn}} = p_{\text{vagn + påse}}$$

$$m_{\text{vagn}}v_{\text{vagn}} = (m_{\text{vagn}} + m_{\text{påse}})v_{\text{vagn + påse}}$$

Detta ger den sökta gemensamma hastigheten som

$$v_{\text{vagn+påse}} = \frac{m_{\text{vagn}}v_{\text{vagn}}}{m_{\text{vagn}} + m_{\text{påse}}}$$

där $m_{\text{vagn}} = 2{,}5$ kg, $v_{\text{vagn}} = 3{,}8$ m/s och $m_{\text{påse}} = 0{,}85$ kg

vilket ger $$v_{\text{vagn+påse}} = \frac{2{,}5 \cdot 3{,}8}{2{,}5 + 0{,}85}\text{ m/s} = 2{,}84\text{ m/s}$$

Svar: 2,8 m/s

3.47 $$p_{\text{före}} = p_{\text{efter}}$$

$$p_1 + p_1 = p_{1+2}$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v_{1+2}$$

Detta ger den sökta gemensamma hastigheten som

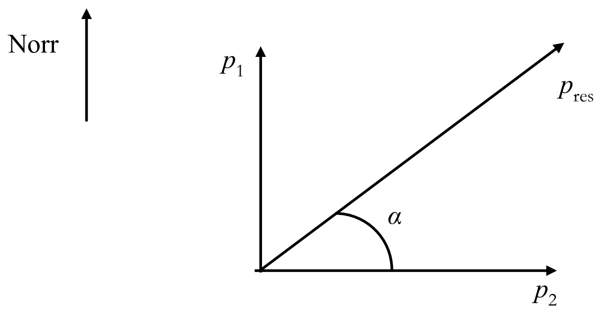
$$v_{1+2} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

där $m_1 = 0{,}10$ kg, $m_2 = 0{,}30$ kg, $v_1 = 2{,}8$ m/s och $v_2 = 0{,}0$ m/s

vilket ger $v_{1+2} = \dfrac{0{,}10 \cdot 2{,}8 + 0{,}30 \cdot 0{,}0}{0{,}10 + 0{,}30}$ m/s = 0,70 m/s

Svar: 0,70 m/s

3.48 a) Deras totala rörelsemängd fås som summan av de två rörelsemängderna. Viktigt är, som alltid vid vektorer, att ta hänsyn till båda dess egenskaper. Storlek och riktning.




där $p_1 = m_1 \cdot v_1 = 1000 \cdot 15$ kgm/s = 150000 kgm/s

och $p_2 = m_2 \cdot v_2 = 2000 \cdot 10$ kgm/s = 200000 kgm/s

vilket ger den totala rörelsemängdens storlek som

$$p_{\text{res}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{15000^2 + 20000^2} \text{ kgm/s} =$$

$$= 25000 \text{ kgm/s}$$

och riktning som

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{15000}{20000}\right)^{\circ} = 36{,}9^{\circ}$$

b) Rörelsemängden bevaras vilket ger:

$$p_{\text{res}} = p_{\text{efter}}$$

$$p_{\text{res}} = (m_1 + m_2)v_{\text{efter}}$$

vilket ger oss hastighetens storlek som

$$v_{\text{efter}} = p_{\text{res}}/(m_1 + m_2) =$$

$$= 25000/(1000 + 2000) = 8{,}33 \text{ m/s}$$

och dess riktning är samma

som totala rörelsemängden före kollisionen.

Svar: a) $2{,}5 \cdot 10^3$ kgm/s med riktning 37° nordost och

b) 8,3 m/s med samma riktning som i a)

3.49 Ändringen i vagnens rörelsemängd fås som

$$\Delta p = p_{\text{efter}} - p_{\text{före}} = mv_{\text{efter}} - mv_{\text{före}} = m(v_{\text{efter}} - v_{\text{före}}) =$$

$$= 1{,}6(1{,}0 - 5{,}0) = -6{,}4 \text{ kgm/s}$$

Svar: −6,4 kgm/s

3.50 Bollens hastigheter före resp. efter studs är motriktade varandra.

Uppåt väljs som positiv riktning.

a) Bollens rörelsemängd just före studs fås som

$$p_{\text{före}} = mv_{\text{före}}$$

där $m = 0{,}100$ kg

och $v_{\text{före}}$ storlek fås från att bollen utför ett fritt fall

$$s = \frac{v_0 + v_{\text{före}}}{2} \cdot t = \frac{v_{\text{före}}}{2} \cdot t$$

vilket ger $v_{\text{före}} = \dfrac{2s}{t}$

$t$ fås från $v_{\text{före}} = v_0 + at = at$

som $t = \dfrac{v_{\text{före}}}{a}$

och $v_{\text{före}} = \dfrac{2s}{v_{\text{före}}/a} = \dfrac{2sa}{v_{\text{före}}}$

eller $v_{\text{före}} = \sqrt{2sa}$

där $s = 2{,}0$ m och $a = g = 9{,}82$ m/s$^2$

vilket ger $v_{\text{före}} = \sqrt{2 \cdot 2{,}0 \cdot 9{,}82}$ m/s = 6,27 m/s

och storleken på rörelsemängden för studsen

$$p_{\text{före}} = mv_{\text{före}} = 0{,}100 \cdot 6{,}27 \text{ kgm/s} = 0{,}627 \text{ kgm/s}$$

Denna är dock i negativ riktning så

$$p_{\text{före}} = -0{,}627 \text{ kgm/s}$$

Bollens rörelsemängd just efter studs fås som

$$p_{\text{efter}} = mv_{\text{efter}}$$

där $m = 0{,}100$ kg och $v_{\text{efter}}$ storlek fås på samma sätt som $v_{\text{före}}$

$$v_{\text{efter}} = \sqrt{2sa}$$

där $s = 1{,}5$ m och $a = g = 9{,}82$ m/s$^2$

vilket ger $v_{\text{efter}} = \sqrt{2 \cdot 1{,}5 \cdot 9{,}82}$ m/s = 5,43 m/s

och storleken på rörelsemängden för studsen

$$p_{\text{efter}} = mv_{\text{efter}} = 0{,}100 \cdot 5{,}43 \text{ kgm/s} = 0{,}543 \text{ kgm/s}$$

i positiv riktning, så

$$p_{\text{efter}} = 0{,}543 \text{ kgm/s}$$

b) Impulsen ges av

$$I = Ft = \Delta p = p_{\text{efter}} - p_{\text{före}}$$

ur vilket den sökta kraften fås som

$$F = \frac{p_{\text{efter}} - p_{\text{före}}}{t} = \frac{0{,}543 - (-0{,}627)}{1{,}0 \cdot 10^{-3}} \text{ N} = 1170 \text{ N}$$

Svar: a) –0,627 kgm/s resp. 0,543 kgm/s och b) 1,2 kN

3.51 Du ger bilen en impuls

$$I = Ft = \Delta p = p_{\text{efter}} - p_{\text{före}}$$

ur vilket den sökta kraften fås som

$$F = \frac{p_{\text{efter}} - p_{\text{före}}}{t} = \frac{mv_{\text{efter}} - mv_{\text{före}}}{t} = \frac{m(v_{\text{efter}} - v_{\text{före}})}{t}$$

där $m = 1200$ kg, $v_{\text{efter}} = 2{,}0$ m/s, $v_{\text{före}} = 0{,}0$ m/s och $t = 4{,}8$ s vilket ger $F = \frac{m(v_{\text{efter}} - v_{\text{före}})}{t} = \frac{1200(2{,}0 - 0{,}0)}{4{,}8} \text{N} = 500 \text{ N}$

Svar: 0,50 kN

## Tryck och Arkimedes princip

3.52 a) Ovanför dig finns luft som har massa. Tyngdkraften drar luften mot jorden och dig och orsakar det lufttryck vi lever i.
b) Lyftkraften är beroende på hur stor volym som trängs undan. Bowlingklotet har större volym och påverkas därmed av en större lyftkraft.
Svar: Sant och b) falskt

3.53 Densitet beräknas enligt:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

där $m = 0{,}567 \text{ kg} = 567 \text{ g}$ och $V = 6{,}0 \cdot 3{,}0 \cdot 4{,}0 \text{ cm}^3 = 72 \text{ cm}^3$

vilket ger $\rho = \frac{567}{72} \text{ g/cm}^3 = 7{,}88 \text{ g/cm}^3$

Svar: 7,9 g/cm$^3$

3.54 Vätskans densitet kan skrivas som

$$\rho_{\text{vätska}} = \frac{m_{\text{vätska}}}{V_{\text{vätska}}}$$

där $V_{\text{vätska}} = 100 \text{ ml} = 100 \text{ cm}^3$ och $m_{\text{vätska}}$ behövs.

Före: $m_{\text{bägare}} = 67 \text{ g}$

Efter $m_{\text{bägare}} + m_{\text{vätska}} = 153 \text{ g}$

vilket ger $m_{\text{vätska}} = 153 - m_{\text{bägare}} = 153 - 67 \text{ g} = 86 \text{ g}$

Vätskans densitet kan beräknas som

$$\rho_{\text{vätska}} = \frac{m_{\text{vätska}}}{V_{\text{vätska}}} = \frac{86}{100} \text{ g/cm}^3 = 0{,}86 \text{ g/cm}^3$$

Svar: 0,86 g/cm$^3$

3.55 Trycket ges av

$$p = \frac{F}{A}$$

där $F = mg = 0{,}84 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}82 \text{ N} = 8{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ N}$

och $A = 0{,}133 \cdot 0{,}066 \text{ m}^2 = 8{,}78 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$

vilket ger $p = \dfrac{8{,}25 \cdot 10^{-3}}{8{,}78 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 0{,}940 \text{ Pa}$

Svar: 0,94 Pa

3.56 Det totala trycket ges av

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{luft}} + \rho h g$$

där $p_{\text{luft}} = 101 \cdot 10^3 \text{ Pa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

$h = 12{,}5 \text{ m}$ och $g = 9{,}82 \text{ m/s}^2$

Detta ger $p_{\text{tot}} = 101 \cdot 10^3 + 1000 \cdot 12{,}5 \cdot 9{,}82 \text{ Pa} = 223750 \text{ Pa}$

Svar: 0,22 MPa

3.57 Det totala trycket nere hos dykaren ges av

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{luft}} + \rho h g$$

ur vilket det sökta lufttrycket fås som

$$p_{\text{luft}} = p_{\text{tot}} - \rho h g =$$

$$= 140 \cdot 10^3 - 1000 \cdot 9{,}82 \cdot 5{,}0 \text{ Pa} = 90900 \text{ Pa}$$

Svar: 91 kPa

3.58 a) I och med att båten flyter är lyftkraften lika stor som tyngdkraften

$$F_{\text{L}} = F_{\text{g}} = mg = 0{,}27 \cdot 9{,}82 \text{ N} = 2{,}65 \text{ N}$$

b) Lyftkraften kan också skrivas som

$$F_{\text{L}} = m_{\text{u}} \cdot g = \rho_{\text{u}} \cdot V_{\text{u}}\, g$$

ur vilket den sökta volymen fås som

$$V_{\text{u}} = \frac{F_{\text{L}}}{\rho_{\text{u}} g}$$

där $\rho_{\mathrm{u}} = \rho_{\mathrm{vatten}} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

vilket ger $V_{\mathrm{u}} = \dfrac{2{,}65}{1000 \cdot 9{,}82}\ \mathrm{m^3} = 2{,}70 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^3} =$

$= 0{,}27\ \mathrm{dm^3} = 0{,}27$ liter

Svar: a) 2,7 N och b) 0,27 liter

3.59 Summan av krafterna uppåt

$$F_{\mathrm{upp}} = F_{\mathrm{du}} + F_{\mathrm{L}} = F_{\mathrm{du}} + \rho_{\mathrm{u}} V_{\mathrm{u}} g =$$

$$= F_{\mathrm{du}} + \rho_{\mathrm{u}} V_{\mathrm{sten}} g = F_{\mathrm{du}} + \rho_{\mathrm{u}} \frac{m_{\mathrm{sten}}}{\rho_{\mathrm{sten}}} g$$

Kraften nedåt

$$F_{\mathrm{ned}} = F_g = m_{\mathrm{sten}} g$$

Stenen är stilla, alltså är summan av krafterna uppåt

lika med summan av krafterna nedåt:

$$F_{\mathrm{upp}} = F_{\mathrm{ned}}$$

$$F_{\mathrm{du}} + \rho_{\mathrm{u}} \frac{m_{\mathrm{sten}}}{\rho_{\mathrm{sten}}} g = m_{\mathrm{sten}} g$$

ur vilket den sökta kraften fås som

$$F_{\mathrm{du}} = m_{\mathrm{sten}} g - \rho_{\mathrm{u}} \frac{m_{\mathrm{sten}}}{\rho_{\mathrm{sten}}} g =$$

$$= m_{\mathrm{sten}} g \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{u}}}{\rho_{\mathrm{sten}}}\right) = 37 \cdot 9{,}82 \left(1 - \frac{1{,}0}{2{,}7}\right) = 229\ \mathrm{N}$$

Svar: 230 N

3.60 Kraft nedåt, tyngdkraften på oljetankern,

är lika med kraft uppåt, lyftkraft från vattnet på oljetankern.

$$mg = \rho_{\mathrm{u}} V_{\mathrm{u}} g$$

$$m = \rho_{\mathrm{u}} V_{\mathrm{u}} = 1000 \cdot 277 \cdot 48 \cdot 15\ \mathrm{kg} = 199 \cdot 10^6\ \mathrm{kg}$$

Svar: $200 \cdot 10^6$ kg

3.61 Klossen flyter om maximal kraft uppåt

är minst lika stor som total kraft nedåt.

Kraft uppåt: $F_{\text{upp}} = F_{\text{L}} = \rho_{\text{u}} V_{\text{u}} g$

där $\rho_{\text{u}} = \rho_{\text{vatten}} = 1000\,\text{kg/m}^3$

$V_{\text{u}} = V_{\text{träkloss}} = 0{,}025 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}050\,\text{m}^3 = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$

vilket ger $F_{\text{upp}} = 1000 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}82\,\text{N} = 1{,}23\ \text{N}$

Kraft ned: $F_{\text{ned}} = F_{g,\text{träkloss}} + F_{g,\text{vikt}} = g(m_{\text{träkloss}} + m_{\text{vikt}}) =$

$= g(\rho_{\text{träkloss}} V_{\text{träkloss}} + m_{\text{vikt}}) =$

$= 9{,}82(450 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4} + 0{,}0060)\,\text{N} = 0{,}611\ \text{N}$

Svar: Ja, den flyter eftersom maximal kraft uppåt
är större än kraft nedåt.

3.62 Kraft upp $F_{\text{upp}} = NF_{\text{L}} = N\rho_{\text{u}} V_{\text{u}} g = N\rho_{\text{u}} V_{\text{ballong}} g$

Kraft ned $F_{\text{ned}} = m_{\text{barn}} g + N(m_{\text{ballong}} g + m_{\text{helium}} g) =$

$= g(m_{\text{barn}} + N(m_{\text{ballong}} + m_{\text{helium}})) =$

$= g(m_{\text{barn}} + N(m_{\text{ballong}} + \rho_{\text{helium}} V_{\text{ballong}}))$

2-åringen flyger iväg då kraften uppåt blir större än kraften nedåt.

$F_{\text{upp}} = F_{\text{ned}}$

$N\rho_{\text{u}} V_{\text{ballong}} g = g(m_{\text{barn}} + N(m_{\text{ballong}} + \rho_{\text{helium}} V_{\text{ballong}}))$

Bryt ut $N$ $N\rho_{\text{u}} V_{\text{ballong}} = m_{\text{barn}} + N(m_{\text{ballong}} + \rho_{\text{helium}} V_{\text{ballong}})$

$N\rho_{\text{u}} V_{\text{ballong}} - N(m_{\text{ballong}} + \rho_{\text{helium}} V_{\text{ballong}}) = m_{\text{barn}}$

$N(\rho_{\text{u}} V_{\text{ballong}} - (m_{\text{ballong}} + \rho_{\text{helium}} V_{\text{ballong}})) = m_{\text{barn}}$

$$N = \frac{m_{\text{barn}}}{\rho_{\text{u}} V_{\text{ballong}} - m_{\text{ballong}} - \rho_{\text{helium}} V_{\text{ballong}}}$$

$$N = \frac{m_{\text{barn}}}{V_{\text{ballong}}(\rho_{\text{u}} - \rho_{\text{helium}}) - m_{\text{ballong}}} =$$

$$= \frac{10}{0{,}011(1{,}29 - 0{,}178) - 0{,}0040} = 1215$$

Svar: 1200 st